

**РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ ИМЕНИ
ПАТРИСА ЛУМУМБЫ**

На правах рукописи

Маслов Александр Русланович

**МЕТОД АНАЛИЗА РЕСУРСНОЙ МОДЕЛИ С СИГНАЛАМИ И
ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСЧЕТУ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ МОБИЛЬНОЙ
СЕТИ**

Специальность 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
Сопин Эдуард Сергеевич

Москва – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. МОДЕЛИ БАЗОВОЙ СТАНЦИИ МОБИЛЬНОЙ СЕТИ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ	11
1.1. Неоднородность требований сессий к радиоресурсам в сетях пятого поколения	11
1.2. Методы расчёта вероятностных характеристик ресурсной системы с сигналами	13
1.3. Разработка и анализ ресурсной модели с повторными вызовами.....	20
1.4. Постановка задачи исследования.....	31
ГЛАВА 2. МЕТОД ПРИБЛИЖЁННОГО РАСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕСУРСНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С СИГНАЛАМИ.....	32
2.1. Стационарное распределение ресурсной системы без сигналов в моменты окончания обслуживания	32
2.2. Разработка метода приближённого расчёта вероятностей потери и прерывания.....	66
2.3. Численный анализ точности метода приближённого расчёта.....	69
ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕССИЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ	75
3.1. Построение модели в виде ресурсной системы с сигналами и орбитой	75
3.2. Анализ вероятностных характеристик модели.....	91
3.3. Численный анализ	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	101
СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ	102

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	110

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Ресурсные системы представляют собой системы массового обслуживания, в которых заявкам для обслуживания требуется сервер и случайный объём ресурса, который определяется заданным вероятностным распределением. Недавно они получили широкое применение при анализе сотовых систем 5G и 6G, в которых процессоры и частотно-временные ресурсы, используемые входящими заявками совместно, ограничены. В современных сотовых системах, использующих миллиметровые и терагерцовые диапазоны частот, множества различных факторов влияют на требования заявок к частотно-временным ресурсам передачи данных. В них входят непредсказуемые местоположения пользователей и изменения качества радиоканала. Всё это в совокупности делает объём необходимых ресурсов случайной величиной. Помимо всего прочего, действующие сессии могут прерываться из-за блокировок путей прямого распространения сигнала. Для принятия во внимание этой особенности РеСМО была дополнена так называемыми «сигналами». Сигналы инициируют перераспределение ресурсов у действующих сессий. Другими словами, заявки освобождают занятые ими ресурсы и требуют новое их количество для продолжения своего обслуживания.

Несмотря на все приложения РеСМО с сигналами, для них так и не было предложено никакого аналитического решения. Следовательно, распределение стационарных вероятностей каждый раз приходится получать путём численного решения системы уравнений равновесия. Но из-за того, что пространство состояний системы, как правило, довольно большое, возникает проблема вычислительной сложности подобных решений.

Помимо этого, в классических РеСМО не учитывается сценарий, при котором пользователи беспроводных сетей не могут просто так смириться с тем, что у них не получилось установить соединение или что их сеанс связи был прерван. Вместо этого они пытаются восстановить свою сессию, оказывая дополнительную нагрузку на систему. При этом зачастую возникает деградация

качества связи, так как это, в некотором смысле, мера для того, чтобы подобное поведение системы не повторилось. Для пользователя более приоритетным является сохранить свою сессию активной, нежели не допустить потерю качества сигнала.

Степень разработанности темы. Анализ вероятностных характеристик систем массового обслуживания с сигналами и орбитой проведён с помощью аппарата теории вероятностей, теории массового обслуживания, теории случайных процессов, теории телетрафика. К российским учёным, исследователям, внёсшим большой вклад в эти области, относятся Г.П. Башарин [1 – 6], П.П. Бочаров [2, 7], В.М. Вишневский [8 - 11], Ю.В. Гайдамака [6, 32, 33, 52], А.Н. Дудин [9], А.И. Зейфман [36-40], Гольдштейн Б.С. [12], А.Е. Кучерявый [12, 13], Е.А. Кучерявый [13, 18, 57], А.Н. Моисеев [15, 16], С.П. Моисеева [14], Д.А. Молчанов [17, 18, 54, 57 – 69], А.А. Назаров [19], В.А. Наумов [20 – 23, 32, 33, 52], А.П. Пшеничников [24], В.В. Рыков [56], К.Е. Самуйлов [4, 6, 21 – 23, 32, 33, 42, 52, 54], С.Н. Степанов [28 – 30], М.С. Степанов [30], И.И. Цитович [43, 44], С.Я. Шоргин [34, 35, 41, 42] и др., а к зарубежным – М. Dohler [51, 53, 54], J.G. Andrews [47-50], F.P. Kelly [25, 26], V.B. Iversen [31], L. Kleinrock [61], E. Gelenbe [45, 46], Luis M Correia [55], K.W. Ross [27], J. R. Artalejo [73], T. Phung Duc [74] и др.

В диссертационной работе представлен обзор конкретных работ в главах, относящихся к конкретной тематике.

Целью диссертационной работы является разработка и анализ ресурсной модели с сигналами и повторными вызовами для расчёта вероятностных характеристик высокочастотной мобильной сети.

Для достижения цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Разработка марковской модели ресурсной системы массового обслуживания с дискретными требованиями к ресурсу и повторными вызовами.

2. Разработка метода приближённого анализа вероятностных характеристик ресурсной системы массового обслуживания с сигналами.
3. Разработка модели обслуживания сессий в высокочастотной мобильной сети с учётом повторных вызовов из-за нехватки ресурсов.

Объём и структура работы. Структура диссертации построена из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 77 источника. Научная работа изложена на 118 страницах текста, содержит 12 рисунков и 9 таблиц.

Краткое изложение диссертации. Диссертация состоит из трёх глав. В **первой главе** работы рассмотрены модели базовой станции мобильной сети с повторными вызовами, проведены обзор методов анализа ресурсных систем массового обслуживания с сигналами и построение ресурсной системы массового обслуживания с орбитой. В разделе 1.1 рассмотрены особенности возникновения неоднородности требований к ресурсам в сетях пятого поколения. В разделе 1.2 изложены методы анализа ресурсной системы массового обслуживания с сигналами. В разделе 1.3 рассмотрена ресурсная модель с повторными вызовами в виде системы массового обслуживания с орбитой. В разделе 1.4 сформулирована задача исследования.

Во второй главе представлен метод приближённого расчёта вероятностных характеристик ресурсной системы массового обслуживания с сигналами. В разделе 2.1 получено стационарное распределение ресурсной системы без сигналов в моменты окончания обслуживания, разработан механизм для расчёта вероятности потерь с использованием данного распределения и разработан алгоритм свёртки требований к ресурсу. В разделе 2.2 разработан метод приближённого расчёта вероятностей потерь и прерывания ресурсной системы массового обслуживания с сигналами. В разделе 2.3 приведены результаты численного анализа точности метода приближённого расчёта.

В третьей главе построена и проанализирована ресурсная система массового обслуживания с сигналами и орбитой для анализа вероятностных

характеристик высокочастотных беспроводных сетей. В разделе 3.1 представлена ресурсная модель с сигналами и повторными вызовами. В разделе 3.2 разработан метод анализа вероятностных характеристик данной модели. В разделе 3.3 приведены результаты численного анализа.

В заключительном разделе приведены основные результаты диссертационной работы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для моделирования обслуживания сессий в беспроводной сети с учётом настойчивого поведения пользователей может быть использована ресурсная система массового обслуживания с повторными вызовами. Модель позволяет рассчитывать показатели эффективности обслуживания сессий.
2. Для приближенного анализа вероятностных характеристик ресурсной системы массового обслуживания с сигналами можно использовать модель без сигналов, но с дополнительным входящим потоком, интенсивность которого вычисляется итерационно. Для повышения точности расчета вероятностей потери и прерывания заявок использовано стационарное распределение цепи Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания заявок в ресурсной системе без сигналов.
3. Моделирование обслуживания сессий передачи данных в высокочастотной беспроводной сети с учетом настойчивого поведения пользователей может быть проведено при помощи ресурсной системы массового обслуживания с сигналами и повторными вызовами. Для приближенного расчета вероятностно-временных характеристик может быть использован метод, разработанный для ресурсных систем с сигналами.

Научная новизна диссертационной работы:

1. В РеСМО с повторными вызовами, в отличие от известных, было учтено снижение требований к ресурсам при повторной попытке поступления на обслуживание. Случайные величины требований заявок, поступающих с

орбиты, определяются отличным от исходного распределением с меньшим математическим ожиданием.

2. В аналитическом виде получено стационарное распределение экспоненциальной РеСМО с дискретными требованиями к ресурсу по цепи Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания. Показано, что распределение по цепи отличается от распределения по времени не только нормирующей константой, но также дополнительным множителем, зависящим от состояния системы.
3. Проведён анализ вероятностно-временных характеристик РеСМО с дискретными требованиями к ограниченному ресурсу и повторными вызовами. Ранее подобные системы не рассматривались. Получены формулы для ряда вероятностных характеристик модели, таких как вероятность обслуживания без ожидания, вероятность прерывания обслуживания и другие.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории массового обслуживания, теории вероятностей, теории случайных процессов и математической теории телетрафика.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы операторами сетей связи и проектными телекоммуникационными компаниями для разработки оборудования для высокочастотных мобильных сетей.

Разработанные математические модели, приближённый анализ которых возможен благодаря разработанному методу, позволяют провести расчёт показателей эффективности высокочастотных мобильных сетей.

Результаты работы включены в исследования по гранту РФФИ №22-79-10128 «Алгоритмы и модели обеспечения показателей качества обслуживания в беспроводных гетерогенных сетях шестого поколения» и по системе грантовой поддержки научных проектов РУДН 021937-2-000 «Модели математической

теории телетрафика для анализа приоритетного обслуживания потокового и эластичного трафика в сетях новых поколений».

Реализация результатов работы. Основные научные достижения, полученные в диссертации, использованы в совместных исследовательских мероприятиях в рамках сотрудничества РУДН, в исследованиях по грантам РФФИ, в системе грантовой поддержки научных проектов РУДН.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на научных конференциях: всероссийская конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем (ИТТММ)» (Москва, апрель 2023 г.); XIV всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, июнь 2024 г.); международная конференция «Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications (DCCN)» (Москва, сентябрь 2024 г.). Также основные результаты докладывались на научном межвузовском семинаре.

Основные результаты опубликованы в ведущих научных журналах – IEEE Communications Letters, IEEE Transactions on Wireless Communications, Информатика и её применения, Mathematics, Lecture Notes in Computer Science, а также в трудах всероссийских и международных конференций, индексируемых WoS (Web of Science) и Scopus.

Степень достоверности результатов подтверждается их строгими математическими доказательствами.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационное исследование соответствует следующим разделам паспорта специальности 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика, а именно **п. 11** «Распределенные многопользовательские системы»; **п. 12** «Модели информационных процессов и структур»; **п. 23** «Новые интернет - технологии, включая средства поиска, анализа и фильтрации информации».

Личный вклад. Численные эксперименты, представленные в диссертации, были проведены с помощью программных средств, разработанных с участием автора. Модели, представленные в диссертации, и результаты их анализа были также получены с участием автора.

Публикации. Основные результаты по теме диссертационного исследования изложены в 5 печатных изданиях [68, 69, 70, 71, 72], которые входят в базы данных Scopus/WoS.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИ БАЗОВОЙ СТАНЦИИ МОБИЛЬНОЙ СЕТИ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

1.1. Неоднородность требований сессий к радиоресурсам в сетях пятого поколения

Рассмотрим базовую станции (БС) мобильной сети, начиная с 4-го поколения. БС фактически распределяет частотно-временной ресурс. В сетях 4-го поколения и выше частотно-временной ресурс выделяется ресурсными блоками. В зависимости от качества радиоканала объём информации, которую можно передать в одном ресурсном блоке, может сильно отличаться.

Существуют различные модели распространения, указанные в технических спецификациях. Если выбрать какую-то конкретную из них и совместить её с некоторой моделью расположения пользователей, то можно получить функцию распределения отношения сигнала к шуму (ОСШ). Согласно стандартам и техническим спецификациям, в каждой системе радиодоступа имеется свой набор модуляционно-кодовых схем (MCS), выбор которых производится на основе оценки качества радиоканала. Для этого используют индикатор качества канала (CQI). Чем он меньше, тем больше избыточности требуется от MCS, что приводит к снижению спектральной эффективности, как показано в таблице 1.1 на примере системы радиодоступа в сети LTE 3GPP TR 38.901. Стоит отметить, что спектральная эффективность – это количество бит в секунду, которое можно получить на полосе частот шириной 1 Гц.

Таблица 1.1. Набор MCS и их спектральная эффективность

CQI	MCS	Спектральная эффективность
0	-	-
1	QPSK, 78/1024	0.15237
2	QPSK, 78/1024	0.2344
3	QPSK, 78/1024	0.377
4	QPSK, 78/1024	0.6016
5	QPSK, 78/1024	0.877

6	QPSK, 78/1024	1.1758
7	QPSK, 78/1024	1.4766
8	QPSK, 78/1024	1.9141
9	QPSK, 78/1024	2.4063
10	QPSK, 78/1024	2.7305
11	QPSK, 78/1024	3.3223
12	QPSK, 78/1024	3.9023
13	QPSK, 78/1024	4.5234
14	QPSK, 78/1024	5.1152
15	QPSK, 78/1024	5.5547

Для каждой MCS можно определить границы ОСШ. Имея границы и функцию распределения ОСШ, можно элементарно вычислить вероятность назначения конкретной MCS. Пусть η – случайная величина ОСШ с функцией распределения $F_{\eta}(x)$, K – количество MCS, а $s_i, i = 1, \dots, K$ – нижняя граница для назначения i -ой MCS. Тогда $m_i, i = 1, \dots, K$, где m_i – это вероятность назначения i -ой MCS, можно получить в виде:

$$m_i = F_{\eta}(s_{i+1}) - F_{\eta}(s_i), i = 1, \dots, K; \quad (1.1)$$

$$m_K = 1 - F_{\eta}(s_K). \quad (1.2)$$

При фиксированной скорости передачи данных и заданной в стандартах ширины полосы ресурсного блока возможно посчитать число требуемых ресурсных блоков. Пусть $e_i, i = 1, \dots, K$ – спектральная эффективность i -ой MCS, C – требуемая скорость передачи данных в битах в секунду, а B – ширина полосы ресурсного блока в герцах. Тогда $r_i, i = 1, \dots, K$, где r_i – число требуемых ресурсных блоков для поддержания скорости C на i -ой MCS, можно найти по формуле

$$r_i = \left\lceil \frac{C}{B e_i} \right\rceil, i = 1, \dots, K. \quad (1.3)$$

В таблице 1.2. приведён пример расчёта дискретного требования к ресурсу для конкретных значений. Таким образом, набор пар (m_i, r_i) задаёт дискретное распределение вероятностей требований к ресурсу.

Таблица 1.2. Пример получения дискретного требования к ресурсу

CQI	MCS	Спектральная эффективность	Интервалы ОСШ	Вероятность назначения	Число требуемых ресурсных блоков
0	-	-			
1	QPSK, 78/1024	0.15237	(s_1, s_2)	m_1	r_1
2	QPSK, 78/1024	0.2344	(s_2, s_3)	m_2	r_2
3	QPSK, 78/1024	0.377	(s_3, s_4)	m_3	r_3
4	QPSK, 78/1024	0.6016	(s_4, s_5)	m_4	r_4
5	QPSK, 78/1024	0.877	(s_5, s_6)	m_5	r_5
6	QPSK, 78/1024	1.1758	(s_6, s_7)	m_6	r_6
7	QPSK, 78/1024	1.4766	(s_7, s_8)	m_7	r_7
8	QPSK, 78/1024	1.9141	(s_8, s_9)	m_8	r_8
9	QPSK, 78/1024	2.4063	(s_9, s_{10})	m_9	r_9
10	QPSK, 78/1024	2.7305	(s_{10}, s_{11})	m_{10}	r_{10}
11	QPSK, 78/1024	3.3223	(s_{11}, s_{12})	m_{11}	r_{11}
12	QPSK, 78/1024	3.9023	(s_{12}, s_{13})	m_{12}	r_{12}
13	QPSK, 78/1024	4.5234	(s_{13}, s_{14})	m_{13}	r_{13}
14	QPSK, 78/1024	5.1152	(s_{14}, s_{15})	m_{14}	r_{14}
15	QPSK, 78/1024	5.5547	(s_{15}, ∞)	m_{15}	r_{15}

1.2. Методы расчёта вероятностных характеристик ресурсной системы с сигналами

Рассмотрим ресурсную систему массового обслуживания (РеСМО) с N приборами. В системе имеется некоторый объём ресурса, который можно разделить на R единиц. Входящий поток заявок соответствует пуассоновскому процессу и имеет интенсивность λ . Для обслуживания каждой заявке требуется прибор и некоторый объём ресурса. За объёмы заявок отвечает распределение $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Требования заявок не зависят ни от входящего потока, ни от процесса обслуживания. Если система может позволить себе выделить

необходимый ресурс и прибор, заявка принимается на обслуживание. В ином случае она считается заблокированной. Время обслуживания заявки генерируется экспоненциально с интенсивностью μ . Когда обслуживание завершается, заявка освобождает занимаемый ею объём ресурса и прибор.

Для каждой заявки на обслуживании существует пуассоновский поток событий или, по-другому, сигналов с интенсивностью γ . Когда заявке поступает событие, она освобождает занятый объём ресурса, не дожидаясь окончания обслуживания. После этого она запрашивает новый объём согласно тому же распределению $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Если в этот момент в системе нет достаточного количества свободного ресурса, заявка покидает систему, не завершив своё обслуживание. В ином случае процесс обслуживания продолжается.

Стоит упомянуть, что вероятностное распределение $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$ можно записать без ограничений на объём ресурса в виде $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq \infty$. Тогда возможны случаи, когда требования одной заявки будут превышать общий объём ресурса в системе. Однако даже настолько объёмные заявки никаким образом не меняют поведение системы. Они лишь увеличивают вероятность блокировки доступа на $\sum_{j=R+1}^{\infty} p_j$. Соответственно, далее мы полагаем, что $\sum_{j=0}^R p_j = 1$.

Поведение системы можно описать при помощи марковского процесса $X(t) = \{\xi(t), r_1(t), \dots, r_{\xi(t)}(t)\}$. Под $\xi(t)$ здесь понимается количество заявок на обслуживании в момент времени t , а под $r_i(t)$ – объём i -ой заявки. Однако из-за того, что пространство состояний растёт экспоненциально с ростом R , как правило, используют более упрощенный подход [32]. Вместо объёмов каждой заявки по отдельности, отслеживается лишь суммарный объём всех заявок на обслуживании $\delta(t) = r_1(t) + \dots + r_{\xi(t)}(t)$. Таким образом, рассматривается стохастический процесс $Y(t) = \{\xi(t), \delta(t)\}$.

Процесс $Y(t)$ не является марковским, так как неизвестно какой объём ресурса освободится, когда одна из заявок завершит своё обслуживание или когда

в систему поступит сигнал. Для определения объёма используется подход Байеса [65], согласно которому вероятность того, что объём составит j единиц ресурса, равна:

$$\frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}}; \quad (1.4)$$

при условии, что система находится в состоянии $(\xi(t) = n, \delta(t) = r)$.

При этом $\{p_r^{(n)}\}$ – это вероятность того, что n заявок вместе займут r единиц ресурса. Вероятности $\{p_r^{(n)}\}$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq r \leq R$ можно вычислить рекуррентно, используя распределение требований к ресурсу $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$:

$$p_r^{(n)} = \sum_{j=0}^r p_j p_{r-j}^{(n-1)}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 1 \leq n \leq N; \quad (1.5)$$

и начальные условия:

$$p_0^{(0)} = 1, \quad p_r^{(0)} = 0, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (1.6)$$

Таким образом, $Y(t)$ становится марковским процессом, хотя освобождаемый объём ресурса при покидании заявкой системы может не соответствовать объёму, который заявка заняла при поступлении. Однако для РеСМО без сигналов стационарное распределение числа заявок и общего объёма занятых ресурсов исходной системы с векторным представлением занятых ресурсов эквивалентно соответствующему распределению упрощенной системы [23]. Несмотря на то, что для систем с сигналами подобная эквивалентность не была доказана, данный подход всё ещё даёт хорошую аппроксимацию стационарного поведения [65].

Пространство состояний процесса $Y(t)$ может быть поделено на $N + 1$ подмножеств:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n; \quad (1.7)$$

$$S_n = \{(n, r): 0 \leq r \leq R, p_r^{(n)} > 0\}. \quad (1.8)$$

Стационарные вероятности можно представить в виде:

$$q_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = 0\}; \quad (1.9)$$

$$q_n(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \delta(t) = r\}, \quad (n, r) \in X_n. \quad (1.10)$$

Теперь опишем события, которые могут перевести систему из одного состояния в другое. Пусть в некоторый момент времени $t > 0$ система находится в состоянии (n, r) . Возможны три различных события:

- 1) Новая заявка, которой требуется j единиц ресурса, принимается в систему, если $n < N$ и $r + j \leq R$. Тогда система переходит в состояние $(n + 1, r + j)$. Иначе заявке блокируется доступ на обслуживание, и состояние системы никак не меняется.
- 2) Заявка завершает своё обслуживание, и система переходит в состояние $(n - 1, r - j)$ с вероятностью $\frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}}$.
- 3) В систему поступает сигнал, и заявка освобождает j единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}}$ и запрашивает i единиц ресурса с вероятностью p_i . Если $r - j + i \leq R$, заявка продолжает своё обслуживание, и система переходит в состояние $(n, r - j + i)$. Иначе обслуживание заявки прерывается, а система переходит в состояние $(n - 1, r - j)$.

Таким образом, возможны четыре различных перехода состояний:

- 1) В систему приходит новая заявка;
- 2) Одна из заявок заканчивает своё обслуживание;

- 3) Одной из заявок поступает сигнал, и она продолжает обслуживание с новым требованием к ресурсу;
- 4) Одной из заявок поступает сигнал, и она покидает систему в связи с тем, что новое требование заявки по ресурсу не может быть удовлетворено.

Систему уравнений равновесия процесса $Y(t)$ можно построить в виде:

$$\lambda q_0 = \mu \sum_{j=0}^R q_1(j); \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} q_n(r) & \left[\lambda \sum_{j=0}^{R-r} p_j + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}} p_j \right) \right] \\ & = \lambda \sum_{j=0}^r q_{n-1}(r-j) p_j + (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q_{n+1}(r+j) \frac{p_j p_r^{(n)}}{p_{r+j}^{(n+1)}} \\ & + n\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q_n(s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}} p_{r-s+j} \\ & + (n+1)\gamma \sum_{j=0}^{R-r} q_{n+1}(r+j) \frac{p_j p_r^{(n)}}{p_{r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_s, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ & (n, r) \in X_n; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} q_N(r) & \left[N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_j p_{r-j}^{(N-1)}}{p_r^{(N)}} p_j \right) \right] \\ & = \lambda \sum_{j=0}^r q_{N-1}(r-j) p_j + N\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q_n(s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_j p_{r-j}^{(N-1)}}{p_r^{(N)}} p_{r-s+j}, \\ & (N, r) \in X_N. \end{aligned} \quad (1.13)$$

У данной системы существует лишь одно решение, которое можно найти численно, используя условие нормировки. Решение представим в виде вектора q , полученного из матричного уравнения $q^T A = 0^T$. Условие нормировки формирует начальное условие в виде $q^T 1 = 1$. Матрица A имеет трёхдиагональную блочную структуру. На главной диагонали расположены блоки $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_N$. Непосредственно над главной диагональю находятся блоки $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$. Непосредственно под главной диагональю располагаются блоки $M_0, \dots, M_{N-1}$. Блоки формируются следующим образом:

$$\Psi_0 = -\lambda. \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_n((n, i), (n, j)) \\ &= \begin{cases} -\left[\lambda \sum_{s=0}^{R-i} p_s + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(n-1)}}{p_i^{(n)}} p_s \right) \right], & i = j, \\ n\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(n-1)}}{p_i^{(n)}} p_{j-i+s}, & i < j, \\ n\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(n-1)}}{p_i^{(n)}} p_{j-i+s}, & i > j, \end{cases} \quad 1 \leq n \leq N-1; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\Psi_N((N, i), (N, j)) = \begin{cases} -\left[N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(N-1)}}{p_i^{(N)}} p_s \right) \right], & i = j; \\ N\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(N-1)}}{p_i^{(N)}} p_{j-i+s}, & i < j; \\ N\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_s p_{i-s}^{(N-1)}}{p_i^{(N)}} p_{j-i+s}, & i > j. \end{cases} \quad (1.16)$$

$$\Lambda_1 = (\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_R). \quad (1.17)$$

$$\Lambda_n((n-1, i), (n, j)) = \begin{cases} \lambda p_{j-i}, & 0 \leq i \leq j \leq R, \\ 0, & i > j. \end{cases} \quad 2 \leq n \leq N; \quad (1.18)$$

$$M_0 = (\mu, \mu, \mu, \dots, \mu)^T. \quad (1.19)$$

$$M_n((n+1, i), (n, j)) = \begin{cases} (n+1)\mu \frac{p_{i-j}p_j^{(n)}}{p_i^{(n+1)}} + (n+1)\gamma \frac{p_{i-j}p_j^{(n)}}{p_i^{(n+1)}} \sum_{s=R-j+1}^R p_s, & 0 \leq j \leq i \leq R, \\ 1 \leq n \leq N-1; \\ 0, & j > i. \end{cases} \quad (1.20)$$

Используя распределение стационарных вероятностей, можно посчитать вероятностные характеристики системы. В первую очередь, нас интересует вероятность потери π_N :

$$\pi_N = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R q_n(r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j + \sum_{r=0}^R q_N(r). \quad (1.21)$$

Также мы можем посчитать вероятность π_s того, что пришедший сигнал приведёт к прерыванию обслуживания заявки:

$$\pi_s = \sum_{n=2}^N \sum_{r=1}^R q_n(r) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}} \sum_{i=R-r+j+1}^R p_i. \quad (1.22)$$

Заявке за период её обслуживания может прийти неограниченно много сигналов. Вероятность того, что обслуживание принятой заявки не сможет завершиться или, другими словами, вероятность прерывания π_T можно получить следующим образом:

$$\pi_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N} \gamma \pi_s T}{\lambda (1 - \pi_N) T} = \frac{\bar{N} \gamma \pi_s}{\lambda (1 - \pi_N)}; \quad (1.23)$$

где $\bar{N}$ выглядит как:

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^N \sum_{r=0}^R n q_n(r). \quad (1.24)$$

Отметим, что вероятность прерывания можно воспринимать как вероятность того, что заявка будет принята на обслуживание, но не сможет обслужиться до конца. Тогда её можно получить в виде:

$$\pi_T = (1 - \pi_N) \frac{\bar{N} \gamma \pi_s}{\lambda (1 - \pi_N)} = \frac{\bar{N} \gamma \pi_s}{\lambda}. \quad (1.25)$$

Мы можем также посчитать среднюю долю занятых единиц ресурса:

$$\bar{R} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^R r q_n(r). \quad (1.26)$$

Помимо этого мы можем вычислить среднюю долю единиц ресурса, затраченных впустую:

$$\bar{R}_T = \bar{R} \frac{\pi_T}{1 - \pi_N}; \quad (1.27)$$

где π_T находится по формуле (1.25).

1.3. Разработка и анализ ресурсной модели с повторными вызовами

Добавим логику появления повторных вызовов в систему из главы 1.2 для частного случая $\gamma = 0$. Имеем ресурсную систему массового обслуживания с N приборами, дискретным ресурсом ограниченной ёмкости в R единиц и орбитой ограниченной ёмкости, на которой помещаются максимум M заявок. В системе имеется пуассоновский входящий поток заявок с интенсивностью λ . Время обслуживания заявок является независимым и распределено экспоненциально с параметром μ .

При поступлении новой заявки в систему ей требуется прибор и случайный объём ресурса, который, в свою очередь, также является независимым и имеет

вероятностное распределение $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Если требования заявки к ресурсу могут быть удовлетворены и в системе имеется, по крайней мере, один свободный прибор, то заявка принимается на обслуживание. В ином случае заявка либо отправляется на орбиту с вероятностью θ , если максимальная ёмкость орбиты ещё не достигнута, либо покидает систему с вероятностью $1 - \theta$.

Интервалы времени, провидимые на орбите, являются независимыми и распределены экспоненциально с параметром α . Затем заявки вновь пытаются попасть на обслуживание. Заявки, поступающие с орбиты, далее будем называть повторными, а остальные заявки – первичными. Повторные заявки проходят через ту же процедуру доступа на обслуживание, что и первичные. При этом они не запоминают информацию об объёме ресурса, запрашиваемого ими на предыдущих итерациях, а каждый раз генерируют новое требование. Однако в случае отказа в обслуживании повторная заявка отправляется на орбиту с вероятностью θ без каких-либо дополнительных условий, так как то место на орбите, которая она до этого занимала, по факту ещё не было освобождено и, следовательно, не могло быть занято никакой другой заявкой.

Поведение системы можно описать стохастическим процессом $X(t) = \{\xi(t), \varphi(t), r_1(t), \dots, r_{\xi(t)}(t)\}$, где $\xi(t)$ – количество заявок на обслуживании, $\varphi(t)$ – количество заявок на орбите, а $r_i(t)$ – объём i -ой заявки на обслуживании. Так же, как и для системы из главы 1.2, отдельно следить за объёмом каждой конкретной заявки избыточно, поэтому можно ограничиться суммарным объёмом всех заявок на обслуживании $\delta(t) = r_1(t) + \dots + r_{\xi(t)}(t)$ [23]. Однако тогда нельзя с уверенностью спрогнозировать объём освободившегося ресурса, когда одна из заявок закончит своё обслуживание. Для его расчёта можно использовать формулу Байеса, которая применима в этом сценарии и имеет хорошую аппроксимацию [65]. Таким образом, далее рассматривается стохастический процесс $Y(t) = \{\xi(t), \varphi(t), \delta(t)\}$.

Пространство состояний процесса $Y(t)$ можно представить в виде:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n; \quad (1.28)$$

$$S_n = \{(n, m, r): 0 \leq m \leq M, 0 \leq r \leq R, p_r^{(n)} > 0\}. \quad (1.29)$$

Вероятности $p_r^{(n)}$, $0 \leq n \leq N, 0 \leq r \leq R$ можно найти, используя формулы (1.12) и (1.13).

Стационарную вероятность состояния (n, m, r) стохастического процесса $Y(t)$ можно представить в виде:

$$q(n, m, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = n, \varphi(t) = m, \delta(t) = r\}. \quad (1.30)$$

События, которые могут перевести систему из одного состояния в другое, могут быть представлены в следующем виде. Предположим, что в данный момент $t > 0$ система находится в состоянии (n, m, r) . Тогда переход в иное состояние произойдет в одном из следующих случаев:

- 1) Новая заявка поступает в систему, и ей требуется j единиц ресурса с вероятностью p_j . Если $j \leq R - r$ и $n < N$, то заявка принимается на обслуживание, и система переходит в состояние $(n + 1, m, r + j)$. В ином случае, то есть если $j > R - r$ или $n = N$, то заявка либо уходит на орбиту с вероятностью θ при условии, что $m < M$, меняя состояние системы на $(n, m + 1, r)$, либо покидает систему с вероятностью $1 - \theta$, никак не изменяя её состояния. Если же на орбите нет места, то есть $m = M$, тогда заявка гарантированно покидает систему.
- 2) Одна из n заявок завершает своё обслуживание. В этом случае высвобождение ресурсов, занимаемых этой заявкой, приводит к изменению состояния системы. Напомним, что из-за того, что невозможно с уверенностью сказать, сколько единиц ресурса будет освобождено, придётся прибегнуть к вероятностному подходу. Заявка освобождает j

единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_j p_{r-j}^{(n-1)}}{p_r^{(n)}}$, и система переходит в состояние $(n-1, m, r-j)$.

- 3) У одной из m заявок заканчивается время пребывания на орбите, и она пытается попасть на обслуживание. Для этого ей требуется j единиц ресурса с вероятностью p_j . Если $j \leq R-r$ и $n < N$, то заявка принимается на обслуживание, и система переходит в состояние $(n+1, m-1, r+j)$. В ином случае заявка либо возвращается обратно на орбиту с вероятностью θ , не оказывая никакого влияния на состояние системы, либо покидает систему с вероятностью $1-\theta$. Тогда система переходит в состояние $(n, m-1, r)$.

Получается, возможны пять различных переходов состояний:

- 1) В систему поступает новая заявка и принимается на обслуживание;
- 2) В систему поступает новая заявка и уходит на орбиту;
- 3) Одна из заявок на обслуживании покидает систему;
- 4) Одна из заявок на орбите принимается на обслуживание;
- 5) Одна из заявок на орбите покидает систему.

Функционирование данной системы описывается системой уравнений равновесия:

$$q(0,0,0)\lambda = \mu \sum_{j=0}^R q(1,0,j); \quad (1.31)$$

$$q(0,m,0)(\lambda + m \cdot \alpha) = \mu \sum_{j=0}^R q(1,m,j), \quad 0 < m \leq M; \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
& q(n, 0, r) \left[\lambda \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_j + \theta \sum_{j=R-r+1}^R p_j \right) + n\mu \right] \\
&= \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, 0, r-j) p_j + (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, 0, r+j) \frac{p_j p_r^{(n)}}{p_{r+j}^{(n+1)}} \\
&+ \alpha \sum_{j=0}^r q(n-1, 1, r-j) p_j + \alpha(1-\theta) q(n, 1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j, \\
&0 < n < N, \quad (n, r) \in X_n;
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
& q(n, m, r) \left[\lambda \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_j + \theta \sum_{j=R-r+1}^R p_j \right) + n\mu + m\alpha \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_j + (1-\theta) \sum_{j=R-r+1}^R p_j \right) \right] \\
&= \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, m, r-j) p_j + \lambda \theta q(n, m-1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j \\
&+ (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, m, r+j) \frac{p_j \cdot p_r^{(n)}}{p_{r+j}^{(n+1)}} \\
&+ (m+1)\alpha \sum_{j=0}^r q(n-1, m+1, r-j) p_j \\
&+ (m+1)\alpha(1-\theta) q(n, m+1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j, \quad 0 < n < N, \\
&0 < m < M, \quad (n, r) \in X_n;
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
& (n, M, r) \left[\lambda \sum_{j=0}^{R-r} p_j + n\mu + M\alpha \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_j + (1-\theta) \sum_{j=R-r+1}^R p_j \right) \right] \\
&= \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, M, r-j) p_j + \lambda \theta q(n, M-1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j
\end{aligned}$$

$$+ (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, M, r+j) \frac{p_j p_r^{(n)}}{p_{r+j}^{(n+1)}}, \quad 0 < n < N, \quad (n, r) \in X_n; \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} & q(N, 0, r)(\lambda\theta + N\mu) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, 0, r-j)p_j + \alpha \sum_{j=0}^r q(N-1, 1, r-j)p_j \\ &+ \alpha(1-\theta)q(N, 1, r), \quad (N, r) \in X_N; \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} & q(N, m, r)[\lambda\theta + N\mu + m\alpha(1-\theta)] \\ &= \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, m, r-j)p_j + \lambda\theta q(N, m-1, r) \\ &+ (m+1)\alpha \sum_{j=0}^r q(N-1, m+1, r-j)p_j \\ &+ (m+1)\alpha(1-\theta)q(N, m+1, r), \quad 0 < m < M, \\ &(N, r) \in X_N; \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} q(N, M, r)[N\mu + M\alpha(1-\theta)] &= \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, M, r-j)p_j + \lambda\theta q(N, M-1, r), \\ &(N, r) \in X_N. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Инфинитезимальная матрица процесса $X(t)$ имеет блочный трёхдиагональный вид и состоит из блоков $\Psi_{i,j}$; $\Lambda_{1,i}$; $\Lambda_{2,i}$; $A_{1,i}$; $A_{2,i}$ и M_i . Блоки $\Psi_{0,0}$; $\Psi_{0,1}$; ..., $\Psi_{0,M}$; $\Psi_{1,0}$; $\Psi_{1,1}$; ...; $\Psi_{N,M}$ находятся на главной диагонали. Блоки $\Lambda_{1,1}$; $\Lambda_{1,2}$; ...; $\Lambda_{1,N \cdot (M+1)}$ располагаются на M блоков выше главной диагонали,

начиная с блока $\Psi_{1,0}$. Блоки $\Lambda_{2,1}; \Lambda_{2,2}; \dots; \Lambda_{2,N \cdot M}$ находятся непосредственно над главной диагональю, начиная с блока $\Psi_{1,1}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков. Блоки $A_{1,1}; A_{1,2}; \dots; A_{1,N \cdot M}$ располагаются на $M - 1$ блок выше главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{1,0}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков. Блоки $A_{2,1}; A_{2,2}; \dots; A_{2,N \cdot M}$ находятся непосредственно под главной диагональю, начиная с блока $\Psi_{1,0}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков. Блоки $M_1; M_2; \dots; M_{N \cdot (M+1)}$ располагаются на M блоков ниже главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{0,0}$. Блоки составляются в виде:

$$\Psi_{0,0} = -\lambda. \quad (1.39)$$

$$\Psi_{0,m} = -(\lambda + m\alpha), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{n,0}((n, 0, i), (n, 0, j)) \\ &= \begin{cases} -\left[\lambda \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_s + \theta \sum_{s=R-i+1}^R p_s \right) + n\mu \right], & i = j, \quad 1 \leq n \leq N - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{n,m}((n, m, i), (n, m, j)) \\ &= \begin{cases} -\left[\lambda \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_s + \theta \sum_{s=R-i+1}^R p_s \right) + n\mu + m\alpha \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_s + (1 - \theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_s \right) \right], & i = j, \quad 1 \leq n \leq N - 1, \quad 1 \leq m \leq M - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{n,M}((n, M, i), (n, M, j)) \\ &= \begin{cases} -\left[\lambda \sum_{s=0}^{R-i} p_s + n\mu + M\alpha \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_s + (1 - \theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_s \right) \right], & i = j, \quad 1 \leq n \leq N - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\Psi_{N,0}((N, 0, i), (N, 0, j)) = \begin{cases} -(\lambda\theta + N\mu), & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{N,m}((N, m, i), (N, m, j)) \\ &= \begin{cases} -[\lambda\theta + N\mu + m\alpha(1 - \theta)], & i = j, & 1 \leq m \leq M - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\Psi_{N,M}((N, M, i), (N, M, j)) = \begin{cases} -[N\mu + M\alpha(1 - \theta)], & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.46)$$

$$\Lambda_{1,m+1} = (\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_R), \quad 0 \leq m \leq M. \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{1,(M+1) \cdot (n-1) + m+1}((n-1, m, i), (n, m, j)) \\ &= \begin{cases} \lambda p_{j-i}, & 0 \leq i \leq j \leq R, & 2 \leq n \leq N, & 0 \leq m \leq M; \\ 0, & i > j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda_{2,M \cdot (n-1) + m}((n, m-1, i), (n, m, j)) \\ &= \begin{cases} \lambda\theta \sum_{s=R-i+1}^R p_s, & i = j, & 1 \leq n \leq N-1, & 1 \leq m \leq M; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\Lambda_{2,M \cdot (N-1) + m}((N, m-1, i), (N, m, j)) = \begin{cases} \lambda\theta, & i = j, & 1 \leq m \leq M; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.50)$$

$$A_{1,m} = (m\alpha p_0, m\alpha p_1, m\alpha p_2, \dots, m\alpha p_R), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} & A_{1,M \cdot n + m+1}((n-1, m+1, i), (n, m, j)) \\ &= \begin{cases} (m+1)\alpha p_{j-i}, & 0 \leq i \leq j \leq R, & 1 \leq n \leq N-1, & 0 \leq m \leq M-1; \\ 0, & i > j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{2,M \cdot (n-1) + m + 1}((n, m + 1, i), (n, m, j)) \\
 &= \begin{cases} (m + 1)\alpha(1 - \theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_s, & i = j, & 1 \leq n \leq N - 1, & 0 \leq m \leq M - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{2,M \cdot (N-1) + m + 1}((N, m + 1, i), (N, m, j)) \\
 &= \begin{cases} (m + 1)\alpha(1 - \theta), & i = j, & 0 \leq m \leq M - 1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

$$M_{m+1} = (\mu, \mu, \mu, \dots, \mu)^T, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned}
 & M_{(M+1) \cdot n + m + 1}((n + 1, m, i), (n, m, j)) \\
 &= \begin{cases} (n + 1)\mu \frac{p_{i-j} p_j^{(n)}}{p_i^{(n+1)}}, & 0 \leq j \leq i \leq R, & 1 \leq n \leq N - 1, & 0 \leq m \leq M; \\ 0, & j > i. \end{cases} \quad (1.56)
 \end{aligned}$$

Стоит учитывать, что перед тем, как попасть на обслуживание или покинуть систему в связи с блокировкой доступа, заявка может пройти несколько периодов ожидания. Периодом ожидания будем называть то время, которое заявка проводит на орбите перед тем, как вновь поучаствовать в процедуре получения доступа.

В первую очередь, нас интересует вероятность потери π_N . Это вероятность того, что заявка покинет систему, так и не попав на обслуживание. Для вычисления этой метрики необходимо сначала посчитать несколько вспомогательных вероятностей. Начать можно с вероятности первичной потери π_1 или, по-другому, вероятности того, что заявка покинет систему после первой процедуры получения доступа на обслуживание:

$$\begin{aligned} \pi_1 = & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \left(\sum_{m=0}^{M-1} (1-\theta)q(n, m, r) + q(n, M, r) \right) \sum_{j=R-r+1}^R p_j \\ & + \sum_{r=0}^R \left(\sum_{m=0}^{M-1} (1-\theta)q(N, m, r) + q(N, M, r) \right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Для того, чтобы у заявки начались периоды ожидания, ей предварительно нужно попасть на орбиту. Вероятность этого события можно посчитать в виде:

$$\pi_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^R \theta q(n, m, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j + \sum_{r=0}^R \sum_{m=0}^{M-1} \theta q(N, m, r). \quad (1.58)$$

Введём обозначения вероятности того, что после окончания периода ожидания и прохождения процедуры получения доступа заявка покинет систему π_3 , и вероятности того, что после тех же событий у заявки начнётся новый период ожидания π_4 . Эти вероятности можно посчитать с помощью нескольких интенсивностей. Во-первых, нам понадобится средняя интенсивность прохождения процедуры получения доступа повторными заявками:

$$v_1 = \alpha \bar{M}; \quad (1.59)$$

где $\bar{M}$ можно рассчитать по формуле:

$$\bar{M} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M \sum_{r=0}^R m q(n, m, r). \quad (1.60)$$

Во-вторых, нам понадобится средняя интенсивность покидания системы повторными заявками в связи с блокировкой доступа на обслуживание:

$$v_2 = (1-\theta)\alpha \left(\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^R m q(n, m, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j + \sum_{m=1}^M \sum_{r=0}^R m q(N, m, r) \right). \quad (1.61)$$

Также нам понадобится средняя интенсивность запуска нового периода ожидания у повторных заявок:

$$v_3 = \frac{\theta}{(1 - \theta)} v_2. \quad (1.62)$$

Таким образом, вероятности π_3 и π_4 могут быть посчитаны в виде:

$$\pi_3 = \frac{v_2}{v_1}; \quad (1.63)$$

$$\pi_4 = \frac{v_3}{v_1}. \quad (1.64)$$

Сформулируем определение потерянной заявки. Заявку можно считать потерянной, если она так и не смогла попасть на обслуживание, несмотря на все периоды ожидания. Данное событие может произойти в одном из двух случаев: 1) заявка покинула систему после первой процедуры получения доступа на обслуживание; 2) заявка покинула систему после некоторого количества периодов ожидания. Вероятность первого события, по сути, является вероятностью первичной потери. Для вычисления вероятности второго события стоит учитывать, что заявке нужно пройти, как минимум, один период ожидания, а итоговое их количество может быть каким-угодно.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение 1.1. Вероятность потери π_N можно найти в виде:

$$\pi_N = \pi_1 + \frac{\pi_2 \pi_3}{1 - \pi_4}. \quad (1.65)$$

■

Отметим также, что среднюю долю занятого объёма ресурса можно посчитать в виде:

$$\bar{R} = \frac{1}{R} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \sum_{r=1}^R r q(n, m, r). \quad (1.66)$$

1.4. Постановка задачи исследования

При добавлении в состояние системы третьего показателя количество уравнений системы уравнений равновесия увеличивается многократно. Даже при сравнительно небольших параметрах размерности вычисления могут получаться очень громоздкими. Из-за этого возникает потребность в методах для приближённых расчётов. Однако приближённые методы должны иметь относительно небольшую погрешность, чтобы их можно было с уверенностью использовать для аппроксимации исходной системы.

Таким образом, формулируются следующие задачи исследования:

1. Разработка марковской модели ресурсной системы массового обслуживания с дискретными требованиями к ресурсу и повторными вызовами. Разработка алгоритма расчёта стационарного распределения, а также вывод формул для вычисления вероятностных характеристик.
2. Разработка метода приближённого анализа вероятностных характеристик ресурсной системы массового обслуживания с сигналами.
3. Разработка в виде ресурсной системы с сигналами и орбитой модели обслуживания сессий в высокочастотной мобильной сети с учётом повторных вызовов из-за нехватки ресурсов. Вывод формул для расчёта вероятностно-временных характеристик.

ГЛАВА 2. МЕТОД ПРИБЛИЖЁННОГО РАСЧЁТА ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕСУРСНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С СИГНАЛАМИ

2.1. Стационарное распределение ресурсной системы без сигналов в моменты окончания обслуживания

Из системы с сигналами, описанной в главе 1.2, можно перейти к системе без сигналов, если положить, что $\gamma = 0$. Тогда систему уравнений равновесия можно решить аналитически [23], и решение будет выглядеть как:

$$q_n(r) = q_0 \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (2.1)$$

$$q_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^N \sum_{r=0}^R \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)} \right)^{-1}; \quad (2.2)$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

В [66] был предложен способ вычисления вероятностных характеристик системы без необходимости вычислять свёртки требований к ресурсу. Для этого обозначим за $G(n, r)$ функцию, которая равна:

$$G(n, r) = \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (n, r) \in X_n. \quad (2.3)$$

Тогда вероятность q_0 или, по-другому, нормирующая константа равна:

$$q_0 = G(N, R)^{-1}. \quad (2.4)$$

Функцию $G(n, r)$ можно считать рекуррентно с помощью соотношения:

$$G(n, r) = G(n-1, r) + \frac{\rho}{n} \sum_{j=0}^r p_j (G(n-1, r-j) - G(n-2, r-j)), \quad 0 \leq n \leq N, \\ (n, r) \in X_n; \quad (2.5)$$

с начальными условиями:

$$G(0, r) = 1, \quad G(1, r) = 1 + \rho \sum_{j=0}^r p_j, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (2.6)$$

В свою очередь, вероятность потери по времени π_N и среднюю долю занятых единиц ресурса $\bar{R}$ можно посчитать как:

$$\pi_N = 1 - \frac{1}{G(N, R)} \sum_{j=0}^R p_j G(N-1, R-j); \quad (2.7)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{R} \left(R - \frac{1}{G(N, R)} \sum_{j=1}^R G(N, R-j) \right). \quad (2.8)$$

Если же $\gamma \neq 0$, тогда такую систему можно аппроксимировать системой без сигналов [67]. Однако для хорошей аппроксимации нам недостаточно стационарного распределения ресурсной системы без сигналов по времени, так как при поступлении сигнала заявка освобождает занимаемый ею объём ресурса и требует новый мгновенно, а не спустя какое-то время. Чтобы учесть эту особенность, необходимо найти стационарное распределение ресурсной системы без сигналов по моментам окончания обслуживания заявок.

Воспользуемся подходом, предложенном в [70]. Рассмотрим марковский процесс $Y(t)$ при нулевой интенсивности сигналов ($\gamma = 0$). Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ – моменты, в которые заявки покидают систему. Тогда процесс $Y_n = \{\xi(\tau_n + 0), \delta(\tau_n + 0)\}$ является цепью Маркова, вложенной по моментам окончания обслуживания заявок. Пространство состояний данной цепи можно описать следующим образом:

$$\hat{S} = \bigcup_{n=0}^{N-1} \hat{S}_n; \quad (2.9)$$

$$\hat{S}_n = \{(n, r): 0 \leq r \leq R, p_r^{(n)} > 0; \exists j: r \leq j \leq R, p_j^{(n+1)} > 0\}. \quad (2.10)$$

Пусть $\beta_{n,r}(k, i)$ – вероятность того, что если в системе находятся n заявок на обслуживании с суммарным объёмом r единиц ресурса, за время до первого обслуживания любой из заявок, в систему будут приняты ровно k новых заявок с суммарным объёмом i единиц ресурса. Отметим, что пока система находится в состоянии (n, r) , временные интервалы между принятиями новых заявок распределены экспоненциально с интенсивностью $\lambda \sum_{i=0}^{R-r} p_i$. Следовательно, вероятность того, что новая заявка будет принята на обслуживание перед тем, как одна из заявок на обслуживании покинет систему, можно выразить как:

$$\frac{\lambda \sum_{i=0}^{R-r} p_i}{\lambda \sum_{i=0}^{R-r} p_i + n\mu}. \quad (2.11)$$

Вероятность того, что принятая на обслуживание заявка займёт j единиц ресурса, можно получить как условную вероятность $p_j / \sum_{i=0}^{R-r} p_i$. Таким образом, вероятности $\beta_{n,r}(k, i)$ могут быть посчитаны в следующем виде:

$$\beta_{n,r}(k, i) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-r} p_s + n\mu} \prod_{m=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-r-\sum_{t=1}^m i_t} p_s + (n+m)\mu} \right) \cdot \frac{(n+k)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-r-i} p_s + (n+k)\mu}, \quad 1 \leq k+n \leq N-1; \quad (2.12)$$

$$\beta_{n,r}(k, i) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-r} p_s + n\mu} \prod_{m=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-r-\sum_{t=1}^m i_t} p_s + (n+m)\mu} \right), \quad k+n = N. \quad (2.13)$$

Отметим, что перейти в состояние (n, r) , $1 \leq n \leq N-2$, $0 \leq r \leq R$ возможно несколькими способами:

- 1) Система изначально находится в состоянии $(0,0)$. Затем в систему поступает $n+1$ заявка с суммарным требованием к ресурсу $r+i$. После

этого систему покидает одна из $n + 1$ заявок и освобождает i единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_i p_r^{(n)}}{p_{r+i}^{(n+1)}}$;

2) Система изначально находится в одном из состояний (k, j) , $1 \leq k \leq n$, $0 \leq j \leq R$. Затем в систему поступает $n - k + 1$ заявка с суммарным требованием к ресурсу i . После этого систему покидает одна из $n + 1$ заявок и освобождает $j + i - r$ единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}}$;

3) Система изначально находится в состоянии $(n + 1, r + i)$, $0 \leq i \leq R - r$. После этого систему покидает одна из $n + 1$ заявок и освобождает i единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_i p_r^{(n)}}{p_{r+i}^{(n+1)}}$.

Систему уравнений равновесия с использованием вероятностей $\beta_{n,r}(k, i)$ можно построить в следующем виде:

$$\hat{q}_0 = \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \beta_{1,j}(0,0) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_1(j) \beta_{1,j}(0,0); \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_n(r) = & \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(n, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(n - k + 1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\ & + \sum_{j=0}^R \hat{q}_{n+1}(j) \beta_{n+1,j}(0,0) \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}}, \quad 1 \leq n \leq N - 2, \end{aligned}$$

$$0 \leq r \leq R; \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{N-1}(r) = & \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(N-1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(N-k, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}}, \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Теорема 2.1. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова Y_n , которое является решением системы уравнений равновесия (2.14) – (2.16), может быть получено аналитически в следующем виде:

$$\hat{q}_n(r) = \hat{q}_0 \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s, \quad 1 \leq n \leq N-1, 0 \leq r \leq R; \quad (2.17)$$

$$\hat{q}_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=0}^R \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \right)^{-1}. \quad (2.18)$$

Доказательство: Убедимся в правильности этого решения. Так как цепь Маркова Y_n является ограниченной, а пространство состояний цепи $\hat{S}$ конечно, система уравнений равновесия имеет единственное решение с учётом условия нормировки. Проверим, что (2.17) действительно является решением.

Для начала подставим (2.17) в уравнение (2.14). Получаем:

$$\begin{aligned} \hat{q}_0 &= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \beta_{1,j}(0,0) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_1(j) \beta_{1,j}(0,0) \\ &= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \beta_{1,j}(0,0) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\rho^1}{1!} p_j \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{1,j}(0,0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \beta_{1,j}(0,0) + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda}{\mu} p_j \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{1,j}(0,0) \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \beta_{1,j}(0,0) + \hat{q}_0 \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=0}^R p_j \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{1,j}(0,0) \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \frac{\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} + \hat{q}_0 \frac{\lambda}{\mu} \sum_{j=0}^R p_j \sum_{s=0}^{R-j} p_s \frac{\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \frac{\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} + \hat{q}_0 \frac{\mu}{\mu} \sum_{j=0}^R p_j \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \frac{\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} + \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} = \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j = \hat{q}_0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Получается, (2.17) является решением уравнения (2.14). Теперь подставим (2.17) в уравнение (2.15):

$$\begin{aligned}
\hat{q}_n(r) &= \hat{q}_0 \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s = \hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(n, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(n-k+1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R \hat{q}_{n+1}(j) \beta_{n+1,j}(0,0) \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(n, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\rho^k}{k!} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(n-k+1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} p_j^{(n+1)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{n+1,j}(0,0) \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}} \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(n, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(n-k+1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)! \mu^{n+1}} p_j^{(n+1)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{n+1,j}(0,0) \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}}; \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Подставим функции $\beta_{n,r}(k, i)$, $1 \leq k+n \leq N-1$ из формулы (2.12).

Получаем:

$$\begin{aligned}
&\hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(n, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(n-k+1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)! \mu^{n+1}} p_j^{(n+1)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \beta_{n+1,j}(0,0) \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \\
&\cdot \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{\lambda p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r} p_r^{(n)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)! \mu^{n+1}} p_j^{(n+1)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j-r} p_r^{(n)}}{p_j^{(n+1)}}; \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Поделим обе стороны на $\hat{q}_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} p_r^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{(n+1)! \mu^{n+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{j=0}^R \frac{(n+1)! \mu^{n+1} p_j^{(n+1)}}{(n+1)! \mu^{n+1} p_j^{(n+1)}} p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{(n+1)! \mu^{n+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu}; \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Отметим, что во 2-ой сумме у первого слагаемого (при $k = 1$) знаменатель совпадает со знаменателем из 1-ой суммы. Сложим эти элементы:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \\
&\quad \cdot \frac{(n+1)! \mu^{n+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \\
&\quad \cdot \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \cdot \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} = \\
&= \sum_{j=0}^R p_j \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \left[\sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{\mu p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{t=1}^m i_t} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^R p_j \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \left(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
 &\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} ; \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Тогда множитель $(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s)$ можно сократить:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^R p_j \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \left(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
 &\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R p_j (n+1)! \mu^n \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
 &\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R p_j (n+1)! \mu^n \\
 &\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} ; \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Изменив порядок суммирования, данное слагаемое можно преобразовать следующим способом:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^R p_j (n+1)! \mu^n \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{z=0}^i \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i-z} \frac{p_j (n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=z}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i-z} \frac{p_j(n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j(n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j(n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}} ; \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Изменим ещё раз порядок суммирования. Возьмём $t = j + z$. Тогда $j = t - z$. Имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j(n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \\
& \cdot \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{t=0}^R \sum_{z=0}^t \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_{t-z}(n+1)! \mu^n p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \\
& \cdot \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(n+1)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(n+1)}} \\
&\cdot \sum_{z=0}^t p_{t-z} p_z \\
&= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \\
&\cdot \frac{p_{t+i-r} p_t^{(2)}}{p_{t+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{(n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \\
&\cdot \frac{p_{j+i-r} p_j^{(2)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j^{(2)} (n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \\
&\cdot \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}}; \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^R p_j (n+1)! \mu^n \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \prod_{m=1}^n \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j^{(2)} (n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}}; \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Вернёмся к равенству (2.21). Получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^{R-r} p_s \\
&= \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \\
& \cdot \frac{(n+1)! \mu^{n+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\
&= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{p_j^{(2)} (n+1)! \mu^n}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \cdot \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2) \cdot \mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu}; \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Теперь у первого слагаемого 2-ой суммы (при $k = 2$) знаменатель вновь совпадает со знаменателем из 1-ой суммы. Можно было бы опять их сложить и преобразовать получившуюся сумму, но вместо этого проделаем данную процедуру для произвольного k , $1 \leq k \leq n$. Имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{(n+1)! \mu^{n-k+2}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
& + \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{k!} \frac{(n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
& \cdot \left[\sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{k\mu p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \right] \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{k!} \frac{(n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \left(k\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} ; \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Аналогично формуле (2.23) множитель $(\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu)$ можно сократить:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{k!} \frac{(n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \left(k\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
&\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{t=1}^m i_t} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} ; \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Получается, сумма этих двух элементов равна:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{(n+1)! \mu^{n-k+2}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&+ \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&= \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
&\cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} ; \tag{2.30}
\end{aligned}$$

Изменим порядок суммирования по аналогии с формулой (2.24):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{z=0}^i \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i-z} \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
& \cdot \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=z}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i-z} \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \cdot \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
& \cdot \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{p_j^{(k)}(n+1)!\mu^{n-k+1}}{k!} \cdot \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}}; \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Изменим ещё раз порядок суммирования аналогично формуле (2.25). Возьмём $t = j + z$. Тогда $j = t - z$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{p_j^{(k)}(n+1)!\mu^{n-k+1}}{k!} \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{z=0}^t \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{p_{t-z}^{(k)}(n+1)!\mu^{n-k+1}}{k!} \frac{p_z}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{1}{k!} \frac{(n+1)!\mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(n+1)}} \sum_{z=0}^t p_{t-z}^{(k)} p_z \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{1}{k!} \frac{(n+1)!\mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r} p_t^{(k+1)}}{p_{t+i}^{(n+1)}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{1}{k!} \frac{(n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r} p_j^{(k+1)}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k+1)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{1}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}}; \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \\
 &\quad \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \prod_{m=1}^{n-k+1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k+1)} (n+1)! \mu^{n-k+1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k}=i} \frac{1}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
 &\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}}; \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Получается, используя формулы (2.30) и (2.33) можно складывать 1-ую сумму с первым элементом из 2-ой суммы, затем преобразовывать получившиеся слагаемое таким образом, чтобы его можно было сложить со следующим элементом из 2-ой суммы, до тех пор, пока эти две суммы не превратятся в один единственный элемент. Имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R p_j^{(2)} (n+1)! \mu^n \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-1}=i} \frac{1}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(\frac{p_{i_m}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{n-k+1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{n-k} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s (n+1)! \mu^{n-k+1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(n)} \frac{(n+1)!}{n!} \mu \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(n)} \frac{(n+1)!}{n!} \mu \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(n)} (n+1)\mu \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\
&\quad + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(n)} \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i (n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu}; \quad (2.34)$$

Преобразуем порядок суммирования. Возьмём $t = j + i$. Тогда $j = t - i$.
Получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R p_j^{(n)} \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-i} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(n+1)}} \\ &+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{t=0}^R p_{t-i}^{(n)} \sum_{i=0}^t \frac{p_i(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{t-r}}{p_t^{(n+1)}} \\ &+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{t=0}^R \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_{t-r}}{p_t^{(n+1)}} \sum_{i=0}^t p_{t-i}^{(n)} p_i \\ &+ \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{t=0}^R p_{t-r} \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (n+1)\mu} \frac{p_t^{(n+1)}}{p_t^{(n+1)}} + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{t=0}^R p_{t-r} \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (n+1)\mu} + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{(n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} + \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} \\ &= \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{(n+1)\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} = \sum_{j=0}^R p_{j-r} \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (n+1)\mu} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^R p_{j-r} = \sum_{s=0}^R p_{s-r} = \sum_{s=-r}^{R-r} p_s; \quad (2.35)$$

Так как $p_s = 0$, $s < 0$ имеем:

$$\sum_{s=0}^{R-r} p_s = \sum_{s=-r}^{R-r} p_s = \sum_{s=0}^{R-r} p_s. \quad (2.36)$$

Получается, (2.17) является решением уравнения (2.15). Теперь подставим (2.17) в уравнение (2.16):

$$\begin{aligned} \hat{q}_{N-1}(r) &= \hat{q}_0 \frac{\rho^{N-1}}{(N-1)!} p_r^{(N-1)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s = \hat{q}_0 \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)! \mu^{N-1}} p_r^{(N-1)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \\ &= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(N-1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_k(j) \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(N-k, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ &= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(N-1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\rho^k}{k!} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(N-k, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ &= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(N-1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ &+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(N-k, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}}; \end{aligned} \quad (2.37)$$

Подставим функции $\beta_{n,r}(k, i)$, $k + n = N$ из формулы (2.13). Получаем:

$$\begin{aligned}
& \hat{q}_0 \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)! \mu^{N-1}} p_r^{(N-1)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{1,j}(N-1, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \beta_{k,j}(N-k, i) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&= \hat{q}_0 \sum_{j=0}^R p_j \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{\lambda \cdot p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R \hat{q}_0 \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_j^{(k)} \sum_{s=0}^{R-j} p_s \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{\lambda p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{\lambda p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r} p_r^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Поделим обе стороны на $\hat{q}_0 \frac{\lambda^{N-1}}{(N-1)! \mu^{N-1}} p_r^{(N-1)}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{k!} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Заметим, что во 2-ой сумме у первого слагаемого (при $k = 1$) знаменатель равен знаменателю из 1-ой суммы. По аналогии с формулой (2.22) произведём сложение этих элементов:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \cdot \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & + \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{1!} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R p_j \frac{(N-1)! \mu^{N-2}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
 & \cdot \left[\sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{\mu p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \right. \\
 & \left. + \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \right] \\
 & = \sum_{j=0}^R p_j \frac{(N-1)! \mu^{N-2}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \left(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
 & \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \cdot \sum_{t=1}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1) \cdot \mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

Тогда множитель $(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s)$ можно сократить:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R p_j \frac{(N-1)! \mu^{N-2}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \left(\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \\
& \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Преобразуем данное слагаемое, изменив порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \\
& \cdot \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{z=0}^i \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i-z} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=z}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i-z} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(N)}} \\
 &= \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} p_j (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(N)}}; \tag{2.42}
 \end{aligned}$$

Возьмём замену $t = j + z$. Тогда $j = t - z$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} p_j (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(N)}} \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{z=0}^t \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} p_{t-z} (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(N)}} \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(N)}} \sum_{z=0}^t p_{t-z} p_z \\
 &= \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r} p_t^{(2)}}{p_{t+i}^{(N)}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} (N-1)! \mu^{N-2} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r} p_j^{(2)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(2)} (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Вернёмся к равенству (2.39). Получаем:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R p_j (N-1)! \mu^{N-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + \mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{N-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{k!} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&= \sum_{j=0}^R p_j^{(2)} (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
&\quad \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu}.
\end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{t=1}^m i_t} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{k!} \frac{p_{j+i}^{(N)}}{p_{j+i}}; \quad (2.44)$$

По аналогии с формулой (2.27) можно было бы опять производить сложение 1-ой суммы с первым слагаемым из 2-ой суммы (при $k = 2$) и преобразовывать результат суммирования. Однако проделаем данную процедуру для произвольного k , $1 \leq k \leq N - 1$. Получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k}}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\ & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ & + \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\ & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\ & = \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \frac{1}{k!} \\ & \cdot \left[\sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{k\mu p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \right] \\ & = \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \left(k\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \\ & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \quad (2.45) \end{aligned}$$

Тогда по аналогии с формулой (2.41) множитель $(k\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s)$ можно сократить:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \left(k\mu + \lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s \right) \frac{1}{k!} \\
 & \cdot \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.46}
 \end{aligned}$$

Получается, сумма двух слагаемых равна:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k}}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k) \cdot \mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & + \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Преобразуем данное слагаемое, изменив порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{z=0}^i \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i-z} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=z}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i-z} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i+z}^{(N)}}; \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

По аналогии с формулой (2.43) возьмём замену $t = j + z$. Тогда $j = t - z$.
Имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^R \sum_{z=0}^{R-j} \sum_{i=0}^{R-j-z} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-z-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i+z-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{t=0}^R \sum_{z=0}^t \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{p_{t-z}^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_z p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r}}{p_{t+i}^{(N)}} \sum_{z=0}^t p_{t-z}^{(k)} p_z \\
& = \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^{R-t} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-t-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{t+i-r} \cdot p_t^{(k+1)}}{p_{t+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{(N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r} p_j^{(k+1)}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
& = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k+1)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
& \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} p_{i_1} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(k+1)} (N-1)! \mu^{N-k-1}}{k!} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k-1}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + (k+1)\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-2} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k+1)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}}; \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

Получается, формулы (2.47) и (2.50) можно использовать в паре по аналогии с формулами (2.30) и (2.33). Имеем:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=0}^{R-r} p_s & = \sum_{j=0}^R p_j^{(2)} (N-1)! \mu^{N-2} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-2}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + 2\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-3} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+2)\mu} \right) \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & + \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} (N-1)! \mu^{N-k-1} \sum_{i=0}^{R-j} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_{N-k}=i} \frac{p_{i_1}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s + k\mu} \\
 & \cdot \prod_{m=1}^{N-k-1} \left(\frac{p_{i_{m+1}}}{\lambda \sum_{s=0}^{R-j-\sum_{p=1}^m i_p} p_s + (m+k)\mu} \right) \frac{\lambda \sum_{s=0}^{R-j} p_s}{k!} \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R \frac{p_j^{(N-1)} \cdot (N-1)! \cdot \mu^{N-N+1-1}}{(N-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} p_i \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} \\
 & = \sum_{j=0}^R p_j^{(N-1)} \mu^0 \frac{(N-1)!}{(N-1)!} \sum_{i=0}^{R-j} p_i \frac{p_{j+i-r}}{p_{j+i}^{(N)}} = \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i p_{j+i-r} p_j^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}}; \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Возьмём $t = j + i$. Тогда $j = t - i$. Получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{R-r} p_s &= \sum_{j=0}^R \sum_{i=0}^{R-j} \frac{p_i p_{j+i-r} p_j^{(N-1)}}{p_{j+i}^{(N)}} = \sum_{t=0}^R \sum_{i=0}^t \frac{p_i p_{t-r} p_{t-i}^{(N-1)}}{p_t^{(N)}} = \sum_{t=0}^R \frac{p_{t-r}}{p_t^{(N)}} \sum_{i=0}^t p_{t-i}^{(N-1)} p_i \\ &= \sum_{t=0}^R \frac{p_{t-r} p_t^{(N)}}{p_t^{(N)}} = \sum_{t=0}^R p_{t-r} = \sum_{s=0}^R p_{s-r} = \sum_{s=-r}^{R-r} p_s ; \end{aligned} \quad (2.52)$$

Так как $p_s = 0$, $s < 0$ имеем:

$$\sum_{s=0}^{R-r} p_s = \sum_{s=-r}^{R-r} p_s = \sum_{s=0}^{R-r} p_s. \quad (2.53)$$

Получается, (2.17) является решением уравнения (2.16).

■

Нас интересует вероятность потери заявки в случае, если она пришла сразу после ухода другой заявки. Обозначим её как $\hat{\pi}_N$ и в дальнейшем будем называть её вероятностью потери в момент ухода. Она задаётся следующей формулой:

$$\hat{\pi}_N = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \hat{q}_n(r) \cdot \sum_{j=R-r+1}^R p_j. \quad (2.54)$$

Отметим, что причиной потери может послужить исключительно нехватка свободного ресурса, так как стационарной вероятности для состояния (N, r) , где $0 \leq r \leq R$, не существует.

Напомним, что в стационарных вероятностях $\hat{q}_n(r)$, $0 \leq n \leq N - 1, 0 \leq r \leq R$ присутствует вероятности $p_r^{(n)}$, $0 \leq n \leq N - 1, 0 \leq r \leq R$ того, что n заявок суммарно займут r единиц ресурса, которые представляют из себя свёртки требований к ресурсу. Их можно вычислить, используя формулы (1.5) и (1.6). Однако из-за того, что при больших значениях N и R расчёт этих вероятностей имеет большую вычислительную сложность, в [71] был предложен алгоритм,

который позволяет производить вычисления вероятности потери в момент ухода $\hat{\pi}_N$ без использования свёрток требований к ресурсу по аналогии с формулами (2.7) и (2.8).

Утверждение 2.1. Вероятность потери в момент ухода $\hat{\pi}_N$ может быть посчитана, не используя свёртки требований к ресурсу $p_r^{(n)}$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq n \leq N$, по формуле

$$\hat{\pi}_N = \frac{\sum_{s=0}^R p_s \sum_{i=0}^s p_i (G(N-1, R-i) - G(N-1, R-s))}{\sum_{i=0}^R p_i G(N-1, R-i)}. \quad (2.55)$$

Доказательство: Введём обозначение функций $\hat{G}(n, r)$ и $H(n, r)$ равных:

$$\begin{aligned} \hat{G}(n, r) &= \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ &0 \leq r \leq R; \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} H(n, r) &= \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{R-j} p_i \right)^2 = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^r p_j^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{R-j} p_i \right)^2, \\ &0 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Тогда нормирующую константу $\hat{q}_0$ можно получить в виде:

$$\hat{q}_0 = \hat{G}(N-1, R)^{-1}. \quad (2.58)$$

В свою очередь, вероятность потери в момент ухода $\hat{\pi}_N$ может быть получена в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_N &= \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \hat{q}_n(r) \sum_{j=R-r+1}^R p_j = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^R \hat{q}_n(r) \sum_{j=0}^{R-r} p_j \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^R \hat{q}_0 \frac{\rho^n}{n!} p_r^{(n)} \sum_{s=0}^{R-r} p_s \sum_{j=0}^{R-r} p_j = 1 - \hat{q}_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{r=0}^R p_r^{(n)} \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_j \right)^2 \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{H(N-1, R)}{\hat{G}(N-1, R)} = \frac{\hat{G}(N-1, R) - H(N-1, R)}{\hat{G}(N-1, R)}. \quad (2.59)$$

Чтобы избавиться от свёрток требований к ресурсу при вычислении значений $\hat{G}(N-1, R)$ и $H(N-1, R)$, воспользуемся функцией $G(n, r)$ из формулы (2.3). Имеем:

$$\begin{aligned} \hat{G}(N-1, R) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^R p_i \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} = \sum_{i=0}^R p_i \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^R p_i G(N-1, R-i); \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} H(N-1, R) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{R-j} p_i \right)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^R p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i \sum_{s=0}^{R-j} p_s \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{s=0}^R p_s \sum_{j=0}^{R-s} p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i = \sum_{s=0}^R p_s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^{R-s} p_j^{(k)} \sum_{i=0}^{R-j} p_i \\ &= \sum_{s=0}^R p_s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^R p_i \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} - \sum_{i=0}^s p_i \sum_{j=R-s+1}^{R-i} p_j^{(k)} \right) \\ &= \sum_{s=0}^R p_s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^R p_i \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} - \sum_{s=0}^R p_s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^s p_i \sum_{j=R-s+1}^{R-i} p_j^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^R p_i \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} - \sum_{s=0}^R p_s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{i=0}^s p_i \sum_{j=R-s+1}^{R-i} p_j^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^R p_i \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=0}^{R-i} p_j^{(k)} - \sum_{s=0}^R p_s \sum_{i=0}^s p_i \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{j=R-s+1}^{R-i} p_j^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^R p_i G(N-1, R-i) - \end{aligned}$$

$$- \sum_{s=0}^R p_s \sum_{i=0}^s p_i (G(N-1, R-i) - G(N-1, R-s)). \quad (2.61)$$

Получаем:

$$\hat{\pi}_N = \frac{\sum_{s=0}^R p_s \sum_{i=0}^s p_i (G(N-1, R-i) - G(N-1, R-s))}{\sum_{i=0}^R p_i G(N-1, R-i)}. \quad (2.62)$$

Таким образом, утверждение доказано. ■

2.2. Разработка метода приближённого расчёта вероятностей потери и прерывания

В [67] был предложен метод аппроксимации системы из главы 1.2. Для этого рассматривается ресурсная система без сигналов, в которой заявки покидают систему с интенсивностью $\mu + \gamma$, а не μ . Это равносильно тому, что сигнал в исходной системе приводил бы к уходу заявки, а не к обновлению требований к ресурсу. Однако при покидании системы заявки возвращаются обратно с вероятностью $\frac{\gamma}{\mu + \gamma}$ и вновь проходят процедуру доступа на обслуживание с новыми требованиями $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$. Таким образом, возвращающиеся заявки формируют дополнительный поток с интенсивностью $\bar{N} \cdot \gamma$, где $\bar{N}$ – среднее количество заявок на обслуживании.

Данный метод основывается на предположении, что дополнительный поток заявок является пуассоновским. Так как заявки из обоих потоков используют одно и то же вероятностное распределение $\{p_j\}$, $0 \leq j \leq R$ для генерации требований к ресурсу, их можно объединить в один единственный поток с интенсивностью $\lambda + \bar{N}\gamma$. Тогда $\rho = \frac{\lambda + \bar{N}\gamma}{\mu + \gamma}$, и остаётся лишь посчитать $\bar{N}$ с использованием итерационного алгоритма с определённой точностью. Суть его заключается в том, что изначально берётся $\bar{N} = 0$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu + \gamma}$ и вычисляется вероятность потери по

времени π_N (например, по формуле (2.7)). Затем находится среднее количество заявок на обслуживании $\bar{N}$ в виде:

$$\bar{N} = \rho(1 - \pi_N). \quad (2.63)$$

После этого ρ пересчитывается как:

$$\rho = \frac{\lambda + \bar{N}\gamma}{\mu + \gamma}. \quad (2.64)$$

Затем вновь вычисляется π_N и так далее. Весь цикл расчётов повторяется до тех пор, пока не выполнится условие $|\bar{N}_1 - \bar{N}_2| < \varepsilon$, а затем вычисляется финальное ρ . С его помощью можно аналитически получить стационарное распределение по формулам (2.1) и (2.2), а затем подставить получившиеся распределение в формулы (1.21) – (1.27) для расчёта вероятностных характеристик системы. Отметим, что для расчёта вероятности потери по времени и средней доли занятого ресурса можно напрямую использовать формулы (2.7) и (2.8) без необходимости вычислять свёртки требований к ресурсу.

Однако при таком подходе удаётся добиться слабой аппроксимации исходной системы. Если дополнительный поток заявок является пуассоновским, тогда заявки возвращаются в систему спустя некоторое время после ухода. В исходной же системе, напротив, при поступлении сигнала запрос нового объёма ресурса происходит мгновенно. Из-за этого, в частности, появляется несоответствие сценарию, при котором новое требование заявки меньше или равно предыдущему. При таком развитии событий в исходной системе заявка гарантированно продолжает своё обслуживание, в то время как в аппроксимирующей системе заявка может быть потеряна.

Данный метод аппроксимации можно значительно улучшить, если сделать предположение о том, что возвращающиеся заявки поступают в систему только в моменты окончания обслуживания других заявок.

Тогда вероятность потери заявок из основного потока будет отличаться от соответствующей вероятности для заявок из дополнительного потока. Первая является вероятностью потери по времени и считается по формуле (2.7), а вторая является вероятностью потери в момент ухода и считается по формуле (2.55). Таким образом, стационарный режим получившейся системы принимает вид:

$$\lambda(1 - \pi_N) = \bar{N}\mu + \bar{N}\gamma\hat{\pi}_N. \quad (2.65)$$

Из него можно получить среднее количество заявок на обслуживании:

$$\bar{N} = \frac{\lambda(1 - \pi_N)}{\mu + \gamma\hat{\pi}_N}. \quad (2.66)$$

Так как интенсивность дополнительного потока заявок при этом никак не меняется, ρ остаётся в том же виде, что и в формуле (2.64). Посчитать $\bar{N}$ можно при помощи описанного ранее итерационного алгоритма с двумя отличиями. Во-первых, вместо вычисления только вероятности потери по времени π_N мы будем дополнительно вычислять вероятность в момент ухода $\hat{\pi}_N$ (например, по формуле (2.55)). Во-вторых, для расчёта $\bar{N}$ вместо формулы (2.63) будет использоваться формула (2.66). После этого, как и ранее, можно аналитически получать стационарное распределение или считать некоторые вероятностные характеристики напрямую.

Отметим, что при приближённом расчёте вероятности прерывания π_T по формулам (1.23) или (1.25) следует использовать вероятность потери в момент ухода $\hat{\pi}_N$ вместо вероятности π_s , так как вероятность потери заявок из дополнительного потока, по сути, означает вероятность того, что в исходной системе при поступлении сигнала обслуживание заявки будет прервано. Таким образом, π_T принимает вид:

$$\pi_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}\gamma\hat{\pi}_N T}{\lambda(1 - \pi_N)T} = \frac{\bar{N}\gamma\hat{\pi}_N}{\lambda(1 - \pi_N)}; \quad (2.67)$$

или

$$\pi_T = (1 - \pi_N) \frac{\bar{N} \gamma \hat{\pi}_N}{\lambda(1 - \pi_N)} = \frac{\bar{N} \gamma \hat{\pi}_N}{\lambda}. \quad (2.68)$$

2.3. Численный анализ точности метода приближённого расчёта

В этом разделе представлены результаты численного анализа точности рассматриваемого приближённого метода. Значения параметров исходных данных для численных экспериментов представлены в таблицах 2.1 и 2.3.

Для первого набора исходных данных функция вероятности $\{p_j\}, 0 \leq j \leq R$ была сгенерирована с помощью геометрического распределения с параметром $p = 0.2$, при этом $p_0 = 0$. Следовательно, $p_i = \frac{p(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)^R}, 1 \leq i \leq R$. Для второго набора исходных данных функция вероятности была взята в виде, который представлен в таблице 2.3. Для остальных $i, p_i = 0$.

Отметим, что для расчёта вероятности прерывания π_T использовались формулы (1.25) и (2.68) соответственно.

Таблица 2.1. Первый набор исходных данных для численного анализа

Параметр	Значение
N	100
R	100
λ	20
μ	1
γ	2

На рисунках ниже представлены результаты расчётов вероятности блокировки π_N и вероятности прерывания π_T тремя способами: аналитически (a и d), приближённо по-старому (b и e) и приближённо по-новому (c и f). Также представлены погрешности вычислений для приближённых методов (зелёным цветом – π_N , жёлтым – π_T ; пунктиром – по-старому, сплошной линией – по-

новому). По оси абсцисс указано значение зависимого параметра, а по оси ординат – значение вероятностной характеристики.

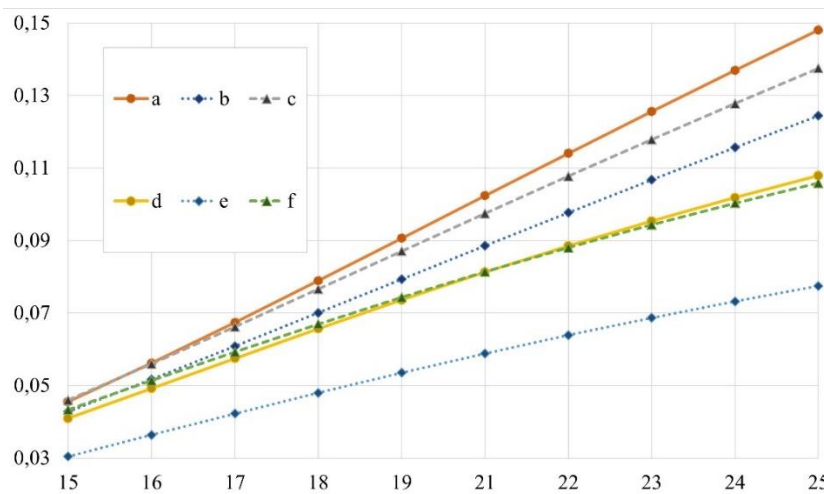


Рис. 2.1. Результаты расчётов для первого набора исходных данных при λ в пределах от 15 до 25

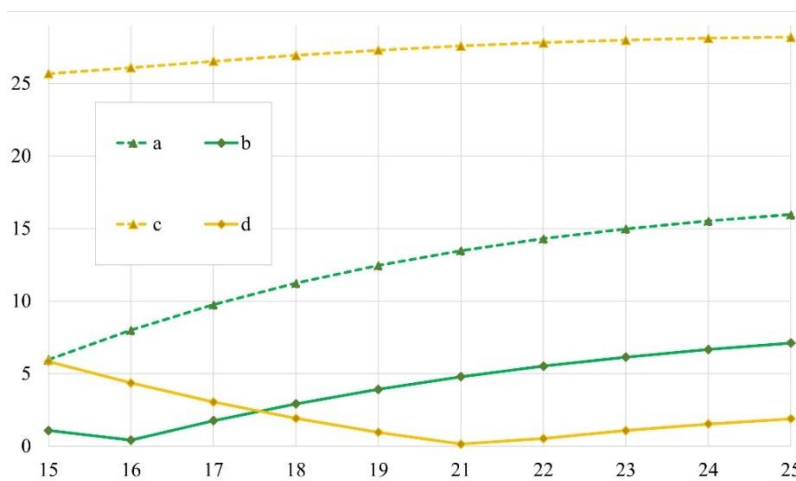


Рис. 2.2. Погрешность приближённых вычислений для первого набора исходных данных при λ в пределах от 15 до 25

На рисунках 2.1 и 2.2 видно, что на заданном диапазоне λ исходный алгоритм показывает приемлемую погрешность для вероятности блокировки π_N . Однако погрешность для вероятности прерывания π_T начинается от отметки выше 25 процентов, что категорически неприемлемо для современных беспроводных сетей. В это же время, улучшенная версия алгоритма

демонстрирует погрешность для обеих вероятностных характеристик в пределах 10 процентов на том же диапазоне.

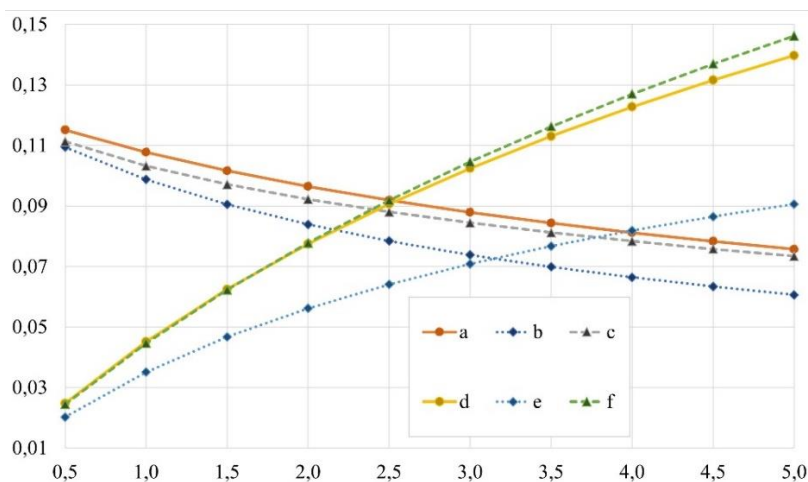


Рис. 2.3. Результаты расчётов для первого набора исходных данных при γ в пределах от 0.5 до 5.0

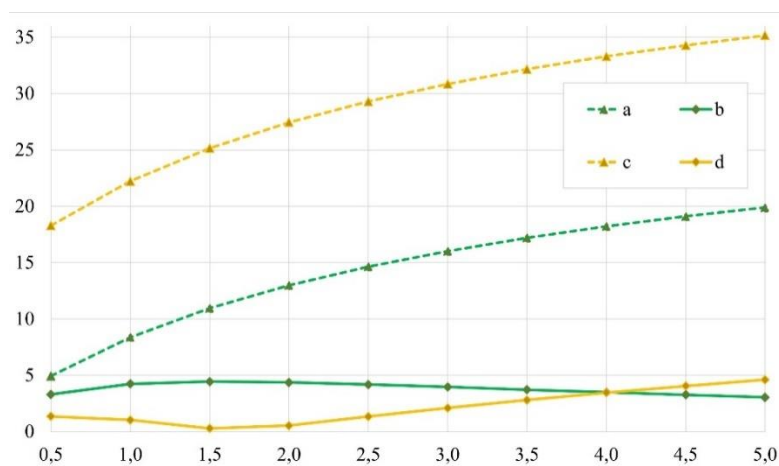


Рис. 2.4. Погрешность приближённых вычислений для первого набора исходных данных при γ в пределах от 0.5 до 5.0

На рисунках 2.3 и 2.4 видно, что на заданном диапазоне γ погрешность для вероятности блокировки π_N у исходного алгоритма уже является пограничной. А погрешность для вероятности прерывания π_T на некотором участке выбранного диапазона превышает отметку в 30 процентов. Одновременно с этим улучшенная версия алгоритма демонстрирует погрешность для обеих вероятностных

характеристик в пределах 5 процентов, что является крайне успешным показателем.

Таблица 2.2. Второй набор исходных данных для численного анализа

Параметр	Значение
N	70
R	70
λ	0.5
μ	1/30
γ	0.3325117

Таблица 2.3. Вероятностное распределение требований к ресурсу для второго набора исходных данных

Параметр	Значение
p_3	0.10059
p_4	0.0822959
p_5	0.0579115
p_6	0.143329
p_8	0.0919175
p_{10}	0.0858848
p_{12}	0.0934725
p_{16}	0.0861611
p_{24}	0.0828521
p_{37}	0.0715487
p_{60}	0.0599868
p_{92}	0.0440499

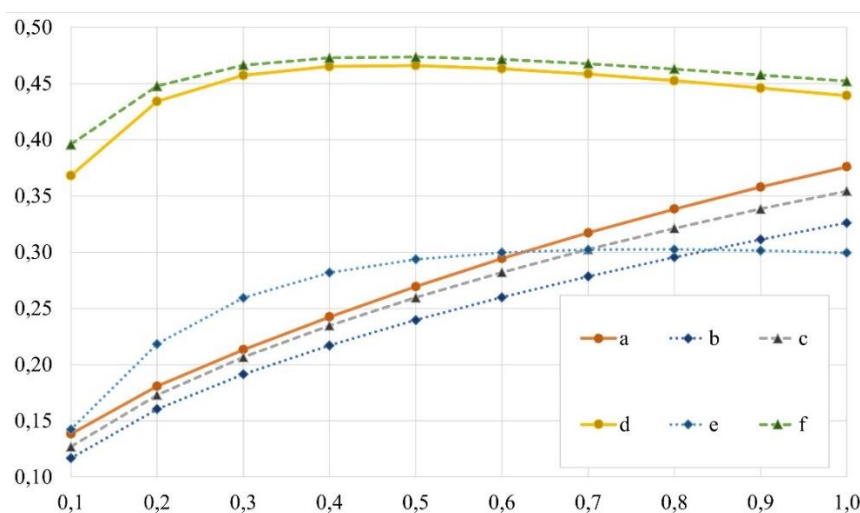


Рис. 2.5. Результаты расчётов для второго набора исходных данных при λ в пределах от 0.1 до 1.0

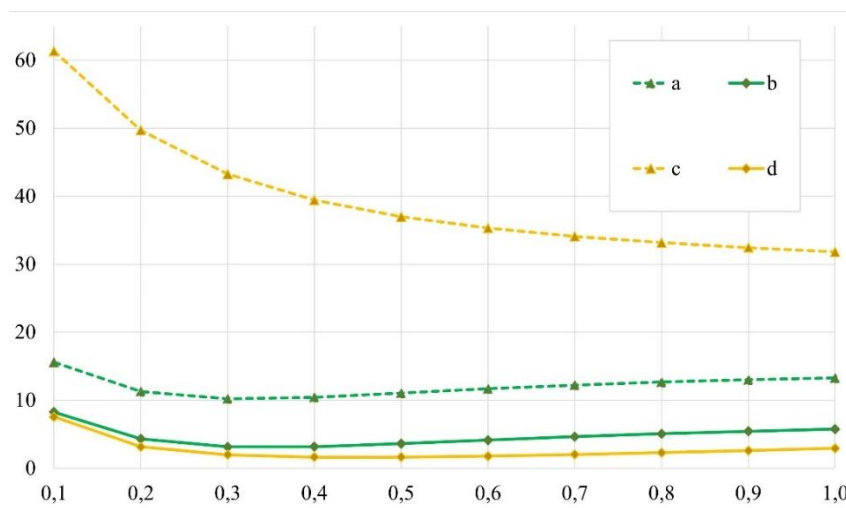


Рис. 2.6. Погрешность приближённых вычислений для второго набора исходных данных при λ в пределах от 0.1 до 1.0

На рисунках 2.5 и 2.6 видно, что на заданном диапазоне λ исходный алгоритм показывает приемлемую погрешность для вероятности блокировки π_N за исключением граничных точек. Однако погрешность для вероятности прерывания π_T не опускается ниже отметки в 30 процентов, а на границе даже превышает 60 процентов. Одновременно с этим улучшенная версия алгоритма демонстрирует погрешность для обеих вероятностных характеристик ниже 10 процентов на том же диапазоне.

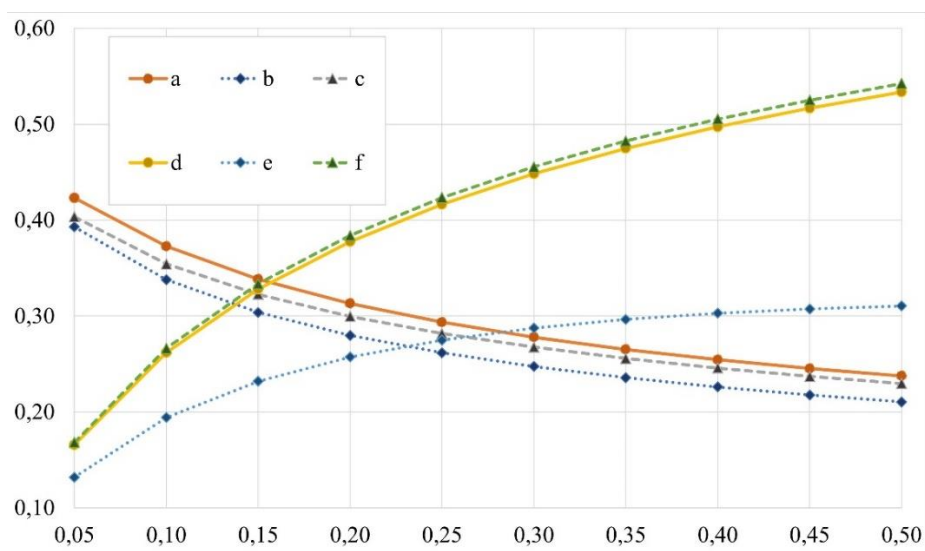


Рис. 2.7. Результаты расчётов для второго набора исходных данных при γ в пределах от 0.05 до 0.5

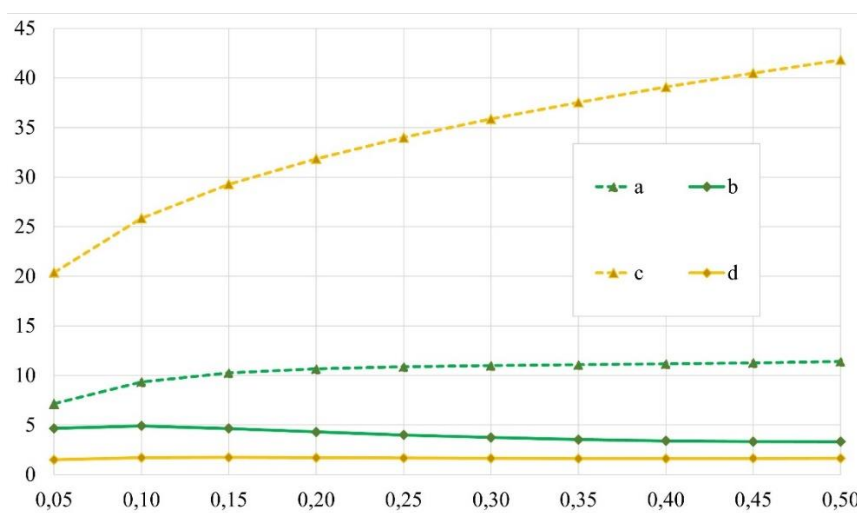


Рис. 2.8. Погрешность приближённых вычислений для первого набора исходных данных при γ в пределах от 0.05 до 0.5

На рисунках 2.7 и 2.8 видно, что на заданном диапазоне γ погрешность для вероятности блокировки π_N у исходного алгоритма по-прежнему приемлема. А погрешность для вероятности прерывания π_T приемлема только в граничной точке $\gamma = 0.05$. В то время, как улучшенная версия алгоритма демонстрирует погрешность для обеих вероятностных характеристик ниже 5 процентов на всём указанном диапазоне.

ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ОБСЛУЖИВАНИЯ СЕССИЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

Прерывание обслуживания сессий в результате событий блокировок прямой видимости – одно из самых больших препятствий на пути к широкомасштабному использованию систем 5G New Radio (5G NR), и эта проблема никуда не уйдёт при переходе на субтерагерцовые системы 6G. Подобные перебои приводят к настойчивому поведению пользователей, которое выражается в неоднократных попытках восстановить свою сессию, из-за чего, в свою очередь, падает качество услуги. С одной стороны, в этом случае большой объём ресурса системы затрачивается впустую. А с другой, часть пользователей, которые покинули бы систему, не начав или не завершив своё обслуживание, начинают его или возобновляют после нескольких неудачных попыток.

3.1. Построение модели в виде ресурсной системы с сигналами и орбитой

Рассмотрим сценарий, представленный на рисунке 3.1. Субтерагерцовая БС с радиусом покрытия r_M обслуживает пользователей в местах большого скопления пешеходов с довольно высокой нагрузкой на систему. Радиус соты r_M напрямую зависит от MCS и вычисляется с использованием модели распространения, представленной ниже. Пропускная способность равна B МГц, что соответствует R ресурсным блокам. Для системы 5G NR, R можно оценить с помощью B и определённой нумерологии с указанием размера одного ресурсного блока. Положим, что высота БС равна h_A , а высота оборудования пользователей (ОП) равна h_U . Также положим, что высота пешеходов равна h_P , при этом $h_P > h_U$.

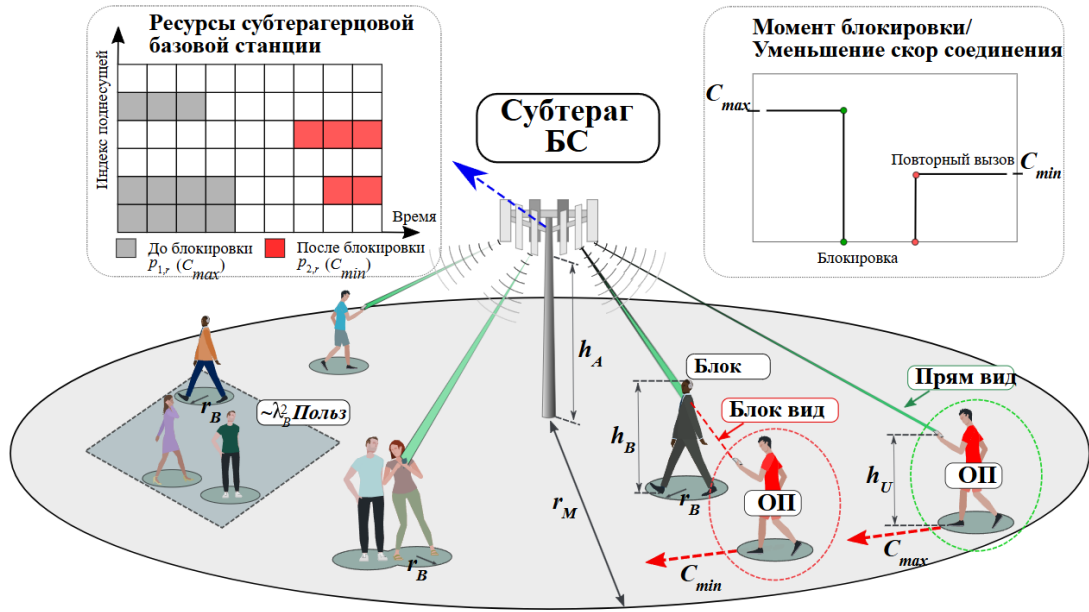


Рис. 3.1. Рассматриваемый сценарий развёртывания БС

Отметим, что зона покрытия плотно заполнена пешеходами. Пусть изначальное распределение пешеходов соответствует однородному точечному процессу Пуассона (ТПП) в R^2 с плотностью λ_B на 1 квадратный километр. Движение пешеходов может быть описано при помощи модели случайного блуждания (МСБ) [62]. Другими словами, каждый пешеход независимо от остальных выбирает направление движения в диапазоне от 0 до 2π , а затем движется в этом направлении в течение случайного промежутка времени, сгенерированного при помощи экспоненциального распределения. Скорость и средняя продолжительность пути являются параметрами модели, которые обозначены как v_B метров в секунду и τ_B минут соответственно. Благодаря свойству независимости МСБ процесс генерации местоположения пешеходов всегда отвечает требованиям ТПП [63]. Положим, что рассматриваемая БС обслуживает ОП, связанные с пешеходами. При этом предельное распределение модели МСБ является равномерным на всей площади покрытия. Основываясь на предположении о том, что поток пользователей через границу соты сбалансирован, расположения ОП с активными сессиями равномерно распределены в зоне покрытия.

Помимо этого пешеходы периодически блокируют путь распространения сигнала между БС и ОП. Эти блокаторы можно представить в виде цилиндров с базовым радиусом r_B и высотой, соответствующей высоте пешеходов h_P . Основываясь на результатах, полученных в [64], для МСБ вероятность блокировки, усреднённая по времени, может быть получена в виде:

$$p_B(y) = 1 - e^{-2\lambda_B r_B \left[\sqrt{y^2 - (h_A - h_U)^2} \frac{h_B - h_U}{h_P - h_U} + r_B \right]}. \quad (3.1)$$

Рассматривается стандартизированная 3GPP микро городская модель пути распространения сигнала. Согласно этой модели потеря плотности сигнала в незаблокированном состоянии на расстоянии y равна:

$$L_{dB}(y) = 32.4 + 10\zeta \log(y) + 20 \log f_c, \quad (3.2)$$

где f_c – несущая частота в гигагерцах, а $\zeta = 2.1$ – экспонента распространения [76].

Данная модель может быть записана в линейной форме как:

$$L(y) = 10^{2 \log_{10} f_c + 3.24} y^{-2.1}. \quad (3.3)$$

Таким образом, описанная выше система учитывает особенности современных 5G/6G систем, а именно сбои, вызванные блокировкой прямой видимости, а также случайные требования к ресурсу.

ОСШ с интерференцией у ОП в незаблокированном состоянии может быть получено в виде:

$$S(y) = \frac{C y^{-\zeta} \Omega \Upsilon}{(N_0 B + I)}, \quad (3.4)$$

где $C = P_T G_A G_U 10^{-2 \log_{10} f_c - 3.24}$, P_T – излучаемая мощность БС, G_A и G_U – выгоды БС и ОП соответственно, I – интерференция, Υ и Ω – быстрое и теневое затухания, y – объёмная дистанция между ОП и БС, B – пропускная способность и $\zeta = 2.1$.

Для определения требований к ресурсу напомним, что местоположения пользователей с активными сессиями предположительно равномерно распределены в зоне покрытия. Значит функция плотности вероятности расстояния у случайно выбранного ОП можно представить в виде:

$$f_D(x) = \frac{2x}{r_M^2}, 0 < x < r_M. \quad (3.5)$$

Следовательно, функция плотности вероятности объёмного расстояния выглядит как:

$$f_Y(y) = \frac{2y}{r_M^2}, y \in (|h_A - h_U|, Q), \quad (3.6)$$

где $Q = \sqrt{r_M^2 + (h_A - h_U)^2}$, h_A – высота БС, h_U – высота ОП. Тогда функция распределения принимает вид:

$$F_Y(y) = \frac{y^2 - (h_A - h_U)^2}{r_M^2}, y \in [|h_A - h_U|, Q]. \quad (3.7)$$

Получается, функция распределения ОСШ с интерференцией можно представить в виде:

$$F_S(s) = P_r\{Ay^{-\zeta} < s\} = 1 - F_Y\left(\sqrt{\frac{A}{s}}\right), \quad (3.8)$$

где $A = C/(N_0B + I_M + \Omega_M + Y_M)$.

Имеем:

$$F_S(s) = \frac{Q^2 - \left(\frac{A}{s}\right)^{\frac{2}{\zeta}}}{r_M^2}, \quad \frac{A}{Q^\zeta} \leq s \leq \frac{A}{(h_A - h_U)^\zeta}. \quad (3.9)$$

При возникновении блокировки прямой видимости распространения сигнала, вызванной появлением блокатора, качество радиоканала резко

ухудшается. Модели блокировок прямой видимости были описаны в [72], модель распространения – в [76], а модель антенны – в [75] и [77].

Функционирование базовой станции 5G NR в представленном сценарии может быть описано ресурсной системой массового обслуживания с сигналами и орбитой. В этой системе сигналы позволяют моделировать резкие скачки качества радиоканала из-за появления блокаторов, а орбита моделирует повторные вызовы из-за настойчивого поведения пользователей.

Мы предполагаем, что если ресурса не хватило, то пользователь через некоторое время совершает повторный вызов, но с меньшим требованием к скорости передачи данных.

Как и в главе 1.3 поведение системы можно описать трёхмерным стохастическим процессом $X(t) = (\xi(t), \varphi(t), \delta(t))$, где $\xi(t)$ – количество заявок, проходящих обслуживание, $\varphi(t)$ – количество заявок, прибывающих на орбите в состоянии ожидания, а $\delta(t)$ – суммарный объём ресурса, затрачиваемый на все обслуживаемые заявки. Каждый компонент процесса $X(t)$ является ограниченным сверху. Количество заявок на обслуживании $\xi(t)$ не может превышать количество приборов N , даже если их требования к ресурсу минимальны. Количество ожидающих заявок $\varphi(t)$, по идее, должно быть безграничным, но это приводит к бесконечному количеству уравнений в системе уравнений равновесия. Для нахождения более простого решения данной системы мы полагаем, что всё же существует верхний предел в M заявок, прибывающих на орбите, который является недостижимым при заданных параметрах системы. Также объём ресурса $\delta(t)$ не может превышать предельного значения в R единиц. Для определения количества освободившихся единиц ресурса при поступлении сигнала или завершении обслуживания будем использовать формулу Байеса [65].

Определения первичных и повторных заявок уже были сформулированы в главе 1.3. Однако теперь учтём теоретическую возможность отличия требований к ресурсу у различных типов заявок. Обозначим за $\{p_{1,j}\}$ и $\{p_{2,j}\}$, $0 \leq j \leq R$

вероятностные распределения, отвечающие за требования первичных и повторных заявок соответственно. Подразумевается, что когда в систему поступает сигнал, новые требования к ресурсу генерируются в соответствии с тем же распределением, что и при получении доступа на обслуживание. Из-за чрезмерного увеличения пространство состояний системы, отслеживать отдельно количество первичных и повторных заявок нецелесообразно. Для определения новых требований к ресурсу при поступлении сигнала воспользуемся вероятностным распределением $\{p_{3,j}\}$, $0 \leq j \leq R$, которое представим в виде:

$$p_{3,j} = \bar{N}_1 p_{1,j} + \bar{N}_2 p_{2,j}, \quad 0 \leq j \leq R, \quad \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1; \quad (3.10)$$

где $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ – доли соответствующих типов заявок на обслуживании. Их вычисление будет подробно описано в секции про вероятностные характеристики.

Пространство состояний стохастического процесса $X(t)$ выглядит как:

$$S = \bigcup_{n=0}^N S_n; \quad (3.11)$$

$$S_n = \left\{ (n, m, r) : 0 \leq m \leq M, 0 \leq r \leq R, \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^r p_{1,j}^{(k)} p_{2,r-j}^{(n-k)} > 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Вероятности $\{p_{s,r}^{(n)}\}$, $s = \{1,2,3\}$, $0 \leq n \leq N$, $0 \leq r \leq R$ можно найти по аналогии с формулами (1.5) и (1.6):

$$p_{s,r}^{(n)} = \sum_{j=0}^r p_{s,j} p_{s,r-j}^{(n-1)}, \quad s = \{1,2,3\}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 1 \leq n \leq N; \quad (3.13)$$

$$p_{s,0}^{(0)} = 1, \quad p_{s,r}^{(0)} = 0, \quad s = \{1,2,3\}, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (3.14)$$

Стационарная вероятность состояния (n, m, r) представлена в виде из формулы (1.30).

Набор событий, приводящих систему в иное состояние, будет более обширным, чем в главе 1.3. Связано это с наличием потока сигналов у каждой заявки на обслуживании. При этом важно отметить, что на орбиту заявка может попасть как при блокировке доступа, так и при прерывании обслуживания. Опишем события, находясь в некотором состоянии (n, m, r) :

- 1) Первичная заявка запрашивает j единиц ресурса с вероятностью $p_{1,j}$. При наличии свободного прибора и если $j \leq R - r$, заявка поступает на обслуживание, а система переходит в состояние $(n + 1, m, r + j)$. Иначе заявка пробует уйти на орбиту. При наличии свободного места ей это удаётся с вероятностью θ , и состояние меняется на $(n, m + 1, r)$. Иначе заявка покидает систему, а её состояние никак не меняется.
- 2) Одна из n заявок покидает систему в связи с окончанием обслуживания. Из-за того, что мы не можем определить тип уходящей заявки и поступал ли ей за период обслуживания хотя бы один сигнал, количество освобождённых единиц ресурса j будет искать при помощи вероятностного подхода с использованием распределения $\{p_{3,j}\}, 0 \leq j \leq R$. Таким образом, состояние системы меняется на $(n - 1, m, r - j)$ с вероятностью $\frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}}$.
- 3) Одной из заявок поступает сигнал. Она освобождает j единиц ресурса с вероятностью $\frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}}$ и требует новый объём в i единиц с вероятностью $p_{3,i}$. При j и i таких, что $r - j + i \leq R$, состояние системы меняется на $(n, m, r - j + i)$. Иначе с вероятностью θ и при наличии хотя одного свободного места заявка уходит на орбиту, и система переходит в состояние $(n - 1, m + 1, r - j)$. В любом другом случае заявка покидает систему, и система переходит в состояние $(n - 1, m, r - j)$.
- 4) Повторная заявка запрашивает j единиц ресурса с вероятностью $p_{2,j}$. При наличии свободного прибора и если $j \leq R - r$, заявка принимается на обслуживание, а система переходит в состояние $(n + 1, m - 1, r + j)$.

Иначе заявка возвращается на орбиту с вероятностью θ , а с состоянием системы ничего не происходит. С вероятностью $1 - \theta$ заявка покидает систему, а состояние меняется на $(n, m - 1, r)$.

В итоге возможны восемь различных переходов состояний:

- 1) Первичная заявка принимается на обслуживание;
- 2) Первичная заявка уходит на орбиту;
- 3) Заявка покидает систему в связи окончанием обслуживания;
- 4) Требование заявки меняется в связи с поступлением сигнала;
- 5) Заявка уходит на орбиту в связи с поступлением сигнала;
- 6) Заявка покидает систему в связи с поступлением сигнала;
- 7) Повторная заявка принимается на обслуживание;
- 8) Повторная заявка покидает систему.

Функционирование данной системы описывается системой уравнений равновесия:

$$q(0, 0, 0)\lambda = \mu \sum_{j=0}^R q(1, 0, j); \quad (3.15)$$

$$q(0, m, 0)(\lambda + m\alpha) = \mu \sum_{j=0}^R q(1, m, j), \quad 0 < m \leq M; \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} q(n, 0, r) & \left[\lambda \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_{1,j} + \theta \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} \right) + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,j} \right) \right] \\ & = \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, 0, r-j) p_{1,j} + (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, 0, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(n, 0, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,r-s+j} \\
& + (n+1)\gamma(1-\theta) \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, 0, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_{3,s} \\
& + \alpha \sum_{j=0}^r q(n-1, 1, r-j) p_{2,j} + \alpha(1-\theta) q(n, 1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{2,j}, \\
& 0 < n < N, \quad (n, r) \in X_n; \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n, m, r) \left[\lambda \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_{1,j} + \theta \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} \right) + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,j} \right) \right. \\
& \quad \left. + m\alpha \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_{2,j} + (1-\theta) \sum_{j=R-r+1}^R p_{2,j} \right) \right] \\
& = \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, m, r-j) p_{1,j} + \lambda\theta q(n, m-1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} \\
& \quad + (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, m, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \\
& \quad + n\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(n, m, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,r-s+j} \\
& \quad + (n+1)\gamma\theta \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, m-1, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_{3,s} \\
& \quad + (n+1)\gamma(1-\theta) \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, m, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_{3,s} \\
& \quad + (m+1)\alpha \sum_{j=0}^r q(n-1, m+1, r-j) p_{2,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(m+1)\alpha(1-\theta)q(n, m+1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{2,j}, \quad 0 < n < N, \quad 0 < m < M, \\
 & (n, r) \in X_n; \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q(n, M, r) & \left[\lambda \sum_{j=0}^{R-r} p_{1,j} + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,j} \right) \right. \\
 & \left. + M\alpha \left(\sum_{j=0}^{R-r} p_{2,j} + (1-\theta) \sum_{j=R-r+1}^R p_{2,j} \right) \right] \\
 & = \lambda \sum_{j=0}^r q(n-1, M, r-j) p_{1,j} + \lambda\theta q(n, M-1, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} \\
 & + (n+1)\mu \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, M, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \\
 & + n\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(n, M, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} p_{3,r-s+j} \\
 & + (n+1)\gamma\theta \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, M-1, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_{3,s} \\
 & + (n+1)\gamma \sum_{j=0}^{R-r} q(n+1, M, r+j) \frac{p_{3,j} p_{3,r}^{(n)}}{p_{3,r+j}^{(n+1)}} \sum_{s=R-r+1}^R p_{3,s}, \quad 0 < n < N, \\
 & (n, r) \in X_n; \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

$$q(N, 0, r) \left[\lambda\theta + N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,j} \right) \right] = \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, 0, r-j) p_{1,j}$$

$$\begin{aligned}
 & + N\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(N, 0, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,r-s+j} + \alpha \sum_{j=0}^r q(N-1, 1, r-j) p_{2,j} \\
 & + \alpha(1-\theta)q(N, 1, r), \quad (N, r) \in X_N;
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 & q(N, m, r) \left[\lambda\theta + N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,j} \right) + m\alpha(1-\theta) \right] \\
 & = \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, m, r-j) p_{1,j} + \lambda\theta q(N, m-1, r) \\
 & + N\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(N, m, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,r-s+j} \\
 & + (m+1)\alpha \sum_{j=0}^r q(N-1, m+1, r-j) p_{2,j} \\
 & + (m+1)\alpha(1-\theta)q(N, m+1, r), \quad 0 < m < M, \\
 & (N, r) \in X_N;
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 & q(N, M, r) \left[N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{j=0}^r \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,j} \right) + M\alpha(1-\theta) \right] \\
 & = \lambda \sum_{j=0}^r q(N-1, M, r-j) p_{1,j} + \lambda\theta q(N, M-1, r) \\
 & + N\gamma \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^R q(N, M, s) \sum_{j=\max(0, s-r)}^s \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(N-1)}}{p_{3,r}^{(N)}} p_{3,r-s+j}, \\
 & (N, r) \in X_N.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Инфинитезимальная матрица процесса $X(t)$ имеет блочный трёхдиагональный вид и состоит из блоков $\Psi_{i,j}$; $\Lambda_{1,i}$; $\Lambda_{2,i}$; $A_{1,i}$; $A_{2,i}$; M_i и Γ_i . Блоки $\Psi_{0,0}$; $\Psi_{0,1}$; ..., $\Psi_{0,M}$; $\Psi_{1,0}$; $\Psi_{1,1}$; ...; $\Psi_{N,M}$ находятся на главной диагонали и выглядят как:

$$\Psi_{0,0} = -\lambda. \quad (3.23)$$

$$\Psi_{0,m} = -(\lambda + m\alpha), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (3.24)$$

$$\Psi_{n,0}((n, 0, i), (n, 0, j)) = \begin{cases} -\left[\lambda \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_{1,s} + \theta \sum_{s=R-i+1}^R p_{1,s} \right) + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,s} \right) \right], & i = j, \\ & 1 \leq n \leq N-1; \\ n\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, & i < j, \quad 1 \leq n \leq N-1; \\ n\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, & i > j, \quad 1 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Psi_{n,M}((n, M, i), (n, M, j)) = \begin{cases} -\left[\lambda \sum_{s=0}^{R-i} p_{1,s} + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,s} \right) \right] + M\alpha \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_{2,s} + (1-\theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_{2,s} \right), & i = j, \quad 1 \leq n \leq N-1; \\ n\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, & i < j, \quad 1 \leq n \leq N-1; \\ n\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, & i > j, \quad 1 \leq n \leq N-1. \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 & \Psi_{n,m}((n, m, i), (n, m, j)) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & - \left[\lambda \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_{1,s} + \theta \sum_{s=R-i+1}^R p_{1,s} \right) + n\mu + n\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,s} \right) \right. \\ & \quad \left. + m\alpha \left(\sum_{s=0}^{R-i} p_{2,s} + (1-\theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_{2,s} \right) \right], \\ & \quad i = j, \\ & \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ & \quad 1 \leq m \leq M-1; \\ & \quad n\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, \quad i < j, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ & \quad 1 \leq m \leq M-1; \\ & \quad n\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(n-1)}}{p_{3,i}^{(n)}} p_{3,j-i+s}, \quad i > j, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ & \quad 1 \leq m \leq M-1. \end{aligned} \right. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Psi_{N,0}((N, 0, i), (N, 0, j)) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & - \left[\lambda\theta + N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,s} \right) \right], \quad i = j; \\ & \quad N\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, \quad i < j; \\ & \quad N\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, \quad i > j. \end{aligned} \right. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

$$\Psi_{N,m}((N, m, i), (N, m, j)) = \begin{cases} - \left[\lambda\theta + N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,s} \right) + m\alpha(1 - \theta) \right], & i = j, \\ 1 \leq m \leq M - 1; \\ N\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, & i < j, \quad 1 \leq m \leq M - 1; \\ N\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, & i > j, \quad 1 \leq m \leq M - 1. \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\Psi_{N,M}((N, M, i), (N, M, j)) = \begin{cases} - \left[N\mu + N\gamma \left(1 - \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,s} \right) + M\alpha(1 - \theta) \right], & i = j; \\ N\gamma \sum_{s=0}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, & i < j; \\ N\gamma \sum_{s=i-j}^i \frac{p_{3,s} p_{3,i-s}^{(N-1)}}{p_{3,i}^{(N)}} p_{3,j-i+s}, & i > j. \end{cases} \quad (3.30)$$

Блоки $\Lambda_{1,1}; \Lambda_{1,2}; \dots; \Lambda_{1,N(M+1)}$ располагаются на M блоков выше главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{1,0}$, и имеют следующую форму:

$$\Lambda_{1,m+1} = (\lambda p_{1,0}, \lambda p_{1,1}, \lambda p_{1,2}, \dots, \lambda p_{1,R}), \quad 0 \leq m \leq M. \quad (3.31)$$

$$\Lambda_{1,(M+1)(n-1)+m+1}((n-1, m, i), (n, m, j)) = \begin{cases} \lambda p_{1,j-i}, & 0 \leq i \leq j \leq R, \\ 0, & i > j. \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \leq n \leq N, \\ 0 \leq m \leq M; \end{matrix} \quad (3.32)$$

Блоки $\Lambda_{2,1}; \Lambda_{2,2}; \dots; \Lambda_{2,NM}$ находятся непосредственно над главной диагональю, начиная с блока $\Psi_{1,1}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков, и выглядят как:

$$\Lambda_{2,M(n-1)+m}((n, m-1, i), (n, m, j)) = \begin{cases} \lambda\theta \sum_{s=R-i+1}^R p_{1,s}, & i = j, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\Lambda_{2,M(N-1)+m}((N, m-1, i), (N, m, j)) = \begin{cases} \lambda\theta, & i = j, \quad 1 \leq m \leq M; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.34)$$

Блоки $A_{1,1}; A_{1,2}; \dots; A_{1,NM}$ располагаются на $M-1$ блок выше главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{1,0}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков, и имеют следующую форму:

$$A_{1,m} = (\text{та}p_{2,0}, \text{та}p_{2,1}, \text{та}p_{2,2}, \dots, \text{та}p_{2,R}), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (3.35)$$

$$A_{1,Mn+m+1}((n-1, m+1, i), (n, m, j)) = \begin{cases} (m+1)\alpha p_{2,j-i}, & 0 \leq i \leq j \leq R, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq m \leq M-1; \\ 0, & i > j. \end{cases} \quad (3.36)$$

Блоки $A_{2,1}; A_{2,2}; \dots; A_{2,NM}$ находятся непосредственно под главной диагональю, начиная с блока $\Psi_{1,0}$, пропуская 1 блок через каждые M блоков, и выглядят как:

$$A_{2,M(n-1)+m+1}((n, m+1, i), (n, m, j)) = \begin{cases} (m+1)\alpha(1-\theta) \sum_{s=R-i+1}^R p_{2,s}, & i = j, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad 0 \leq m \leq M-1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.37)$$

$$A_{2,M(N-1)+m+1}((N, m+1, i), (N, m, j)) = \begin{cases} (m+1)\alpha(1-\theta), & i=j, & 0 \leq m \leq M-1; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.38)$$

Блоки $M_1; M_2; \dots; M_{N(M+1)}$ располагаются на M блоков ниже главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{0,0}$, и имеют следующий вид:

$$M_{m+1} = (\mu, \mu, \mu, \dots, \mu)^T, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (3.39)$$

$$M_{(M+1)n+m+1}((n+1, m, i), (n, m, j)) = \begin{cases} (n+1)\mu \frac{p_{3,i-j}p_{3,j}^{(n)}}{p_{3,i}^{(n+1)}}, & 0 \leq j \leq i \leq R, & 1 \leq n \leq N-1, & 0 \leq m \leq M; \\ 0, & j > i. \end{cases} \quad (3.40)$$

Блоки $\Gamma_1; \Gamma_2; \dots; \Gamma_{(N-1)M}$ располагаются на $M-1$ блок ниже главной диагонали, начиная с блока $\Psi_{1,1}$ и пропуская 1 блок через каждые M блоков, и выглядят как:

$$\Gamma_{M(n-1)+m}((n+1, m-1, i), (n, m, j)) = \begin{cases} (n+1)\gamma\theta \frac{p_{3,i-j}p_{3,j}^{(n)}}{p_{3,i}^{(n+1)}} \sum_{s=R-j+1}^R p_{3,s}, & 0 \leq j \leq i \leq R, & 1 \leq n \leq N-1, \\ & 1 \leq m \leq M; \\ 0, & j > i. \end{cases} \quad (3.41)$$

Особенностью системы является то, что заявка за свой жизненный цикл может несколько раз побывать и на обслуживании, и на орбите. При этом мы полагаем, что среднее время пребывания на орбите довольно велико, и вследствие этого вероятность быть принятой на обслуживание с орбиты одинакова для всех повторных заявок: попавших на неё сразу после поступления в систему и попавших на неё с обслуживания.

3.2. Анализ вероятностных характеристик модели

Перед расчётом вероятностных характеристик необходимо сначала вычислить доли первичных и повторных заявок на обслуживании $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$. Для их расчёта используется итерационный алгоритм. Суть его заключается в том, что изначально берутся $\bar{N}_1 = 1$ и $\bar{N}_2 = 0$, вычисляется $\{p_{3,j}\}$, $0 \leq j \leq R$ по формуле (3.10), а затем рассчитывается стационарное распределение путём решения системы уравнений равновесия. После этого вычисляются вероятности π_1 и π_2 в виде:

$$\begin{aligned} \pi_1 = & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{r=1}^R \left(\sum_{m=0}^{M-1} (1-\theta)q(n, m, r) + q(n, M, r) \right) \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} \\ & + \sum_{r=0}^R \left(\sum_{m=0}^{M-1} (1-\theta)q(N, m, r) + q(N, M, r) \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\pi_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^R \theta q(n, m, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{1,j} + \sum_{r=0}^R \sum_{m=0}^{M-1} \theta q(N, m, r). \quad (3.43)$$

Также вычисляется вероятность того, что первичной заявке был предоставлен доступ на обслуживание:

$$\pi_5 = 1 - \pi_1 - \pi_2. \quad (3.44)$$

Далее рассчитываются вероятности π_3 и π_4 по формулам (1.63) и (1.64) с поправкой на вероятностное распределение $\{p_{2,j}\}$, $0 \leq j \leq R$ в формуле (1.61):

$$\begin{aligned} v_2 = & (1-\theta)\alpha \left(\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^R m q(n, m, r) \sum_{j=R-r+1}^R p_{2,j} \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^M \sum_{r=0}^R m q(N, m, r) \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Отметим, что вероятность того, что повторной заявке был предоставлен доступ на обслуживание, может быть посчитана в виде:

$$\pi_6 = 1 - \pi_3 - \pi_4. \quad (3.46)$$

После этого $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ вычисляются в следующем виде:

$$\bar{N}_1 = \frac{\lambda \pi_5}{\lambda \pi_5 + \alpha \bar{M} \pi_6}; \quad (3.47)$$

$$\bar{N}_2 = \frac{\alpha \bar{M} \pi_6}{\lambda \pi_5 + \alpha \bar{M} \pi_6}; \quad (3.48)$$

где $\bar{M}$ рассчитывается по формуле (1.60).

Затем делается перерасчёт $\{p_{3,j}\}$, $0 \leq j \leq R$ и вновь вычисляется стационарное распределение, а затем и все характеристики, представленные в формулах (3.42) – (3.48). Повторяется это до тех пор, пока не выполнится одно из условий: $|\bar{N}_{11} - \bar{N}_{12}| < \varepsilon$ или $|\bar{N}_{21} - \bar{N}_{22}| < \varepsilon$, где ε – заданная точность. В тот момент, когда $\bar{N}_1$ и $\bar{N}_2$ успешно получены с заданной точностью, в последний раз вычисляется стационарное распределение. После этого можно переходить к расчёту вероятностных характеристик.

Среднюю долю занятого объёма ресурса $\bar{R}$ можно получить по формуле (1.66). Вероятность потери π_N можно получить по формуле (1.65), однако необходимо сделать поправку на различные вероятностные распределения $\{p_{s,j}\}$, $s = \{1,2,3\}$, $0 \leq j \leq R$. Для этого необходимо использовать формулы (3.42), (3.43) и (3.45) вместо формул (1.57), (1.58) и (1.61) соответственно.

Для вычисления вероятности прерывания π_T сначала введём определение прерванной заявки. Заявку будем считать прерванной, если она за свой жизненный цикл хотя бы раз была на обслуживании, но обслужиться до конца ей так и не удалось. Соответственно, не имеет значения, в какой момент она покинула систему. Следовательно, прерванными могут быть как первичные, так и

повторные заявки. При этом обслуживание повторных заявок может прерваться либо непосредственно на сервере, либо при окончании очередного периода ожидания. Таким образом, нам понадобятся несколько вспомогательных вероятностей: вероятность того, что заявка покинет систему при поступлении сигнала π_7 , и вероятность того, что заявка уйдёт на орбиту при поступлении сигнала π_8 . Для этого необходимо предварительно рассчитать несколько интенсивностей. Во-первых, нам понадобится интенсивность поступления сигналов заявкам на обслуживании:

$$v_4 = \gamma \bar{N}; \quad (3.49)$$

где $\bar{N}$ можно рассчитать по формуле:

$$\bar{N} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M \sum_{r=0}^R nq(n, m, r). \quad (3.50)$$

Во-вторых, нам понадобится средняя интенсивность ухода из системы заявок на обслуживании при поступлении сигнала:

$$v_5 = \gamma \sum_{n=2}^N \sum_{r=1}^R \left((1 - \theta) \sum_{m=0}^{M-1} nq(n, m, r) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} \sum_{i=R-r+j+1}^R p_i \right. \\ \left. + nq(n, M, r) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} \sum_{i=R-r+j+1}^R p_i \right). \quad (3.51)$$

Также нам понадобится средняя интенсивность запуска периода ожидания у заявок на обслуживании:

$$v_6 = \gamma \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=1}^R \theta nq(n, m, r) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{p_{3,j} p_{3,r-j}^{(n-1)}}{p_{3,r}^{(n)}} \sum_{i=R-r+j+1}^R p_i. \quad (3.52)$$

Таким образом, вероятности π_7 и π_8 можно найти как:

$$\pi_7 = \frac{v_5}{v_4}; \quad (3.53)$$

$$\pi_8 = \frac{v_6}{v_4}. \quad (3.54)$$

Утверждение 3.1. Вероятность прерывания π_T можно найти в виде:

$$\pi_T = (1 - \pi_N) \left(\frac{\pi_9}{1 - \frac{\pi_{10}\pi_6}{1 - \pi_4}} + \frac{\pi_{10}\pi_3}{1 - \frac{\pi_6\pi_{10}}{1 - \pi_4}} \right); \quad (3.55)$$

где π_9 – это вероятность того, что обслуживание принятой заявки не сможет завершиться, а сама заявка покинет систему. π_9 имеет вид:

$$\pi_9 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}\gamma\pi_7T}{(\lambda\pi_5 + \alpha\bar{M}\pi_6)T} = \frac{\bar{N}\gamma\pi_7}{\lambda\pi_5 + \alpha\bar{M}\pi_6}; \quad (3.56)$$

π_{10} – это вероятность того, что обслуживание принятой заявки не сможет завершиться, а сама заявка уйдёт на орбиту. π_{10} имеет вид:

$$\pi_{10} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\bar{N}\gamma\pi_8T}{(\lambda\pi_5 + \alpha\bar{M}\pi_6)T} = \frac{\bar{N}\gamma\pi_8}{\lambda\pi_5 + \alpha\bar{M}\pi_6}; \quad (3.57)$$

где вероятности $\pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ можно найти по формулам (1.63), (1.64), (3.44), (3.46) соответственно, а значение $\bar{M}$ – по формуле (1.60).

Доказательство: Правдивость формул (3.56) и (3.57) очевидна. Докажем формулу (3.55).

Вероятность прерывания π_T складывается из двух возможных сценариев: либо заявка покидает систему, находясь на обслуживании, в связи с поступлением сигнала, либо заявка покидает систему, находясь на орбите, при попытке возобновить своё начатое обслуживание. При этом в обоих вариантах заявка может неоднократно поступать на обслуживание, уходить на орбиту и возвращаться обратно на обслуживание. Так как в этой главе используется единственное определение вероятности прерывания, получившееся выражение

необходимо умножить на $(1 - \pi_N)$ для того, чтобы показать, что заявка хотя бы один раз была на обслуживании. Таким образом, утверждение доказано. ■

Обозначим за π_S вероятность того, что пришедшая в систему заявка будет принята на обслуживание без каких-либо раундов ожидания, и её обслуживание успешно завершится без единого ухода на орбиту. Имеем:

$$\pi_S = \pi_5(1 - \pi_9 - \pi_{10}). \quad (3.58)$$

Обозначим за π_W вероятность того, что пришедшая в систему заявка, в итоге, будет успешно обслужена, но для этого ей, как минимум, один раз придётся сходить на орбиту. Эту вероятность можно представить как:

$$\pi_W = 1 - \pi_N - \pi_T - \pi_S. \quad (3.59)$$

Обозначим за π_{orb} вероятность того, что заявка хотя бы один раз побывала на орбите за время пребывания в системе. Получить её можно по формуле

$$\pi_{orb} = 1 - \pi_1 - \pi_S. \quad (3.60)$$

Последняя вероятностная характеристика, которая нас интересует, это средняя доля единиц ресурса, затраченных впустую. Её можно найти в виде:

$$\bar{R}_T = \bar{R} \frac{\pi_T}{1 - \pi_N}. \quad (3.61)$$

где $\bar{R}$, π_N и π_T вычисляются по формулам (1.66), (1.65) и (3.55) соответственно.

3.3. Численный анализ

В этом разделе представлены результаты численного анализа влияния настойчивого поведения пользователей на вероятностные характеристики системы. Значения параметров сценария для численных экспериментов представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Набор параметров описываемого сценария

Параметр	Значение
Несущая частота, f_c	28 ГГц
Ширина частотного диапазона, B	100 МГц
Высота БС, h_A	10 м
Высота блокаторов, h_B	1.7 м
Высота ОП, h_U	1.5 м
Радиус блокаторов, r_B	0.4 м
Скорость блокаторов, v	1 м/с
Средняя продолжительность движения блокаторов, $1/\tau$	5 мин
Мощность передачи, P_T	2 Вт
Показатель потери в пути, ζ	2.1
Порог быстрых и теневых затуханий, Υ_M , Ω_M	3 дБ, 3дБ
Плотность блокаторов, λ_B	0.05 штук/м ²
Максимальная скорость сессии, C_{max}	10 Мбит/с
Минимальная скорость сессии, C_{min}	5 Мбит/с
Среднее время обслуживания сессии, $1/\mu$	30 с
Интенсивность поступления заявок, λ	0.5 заявок в секунду
Используемая 5G NR нумерология	3

Метод расчёта параметров математической модели был разработан ранее в [72]. С помощью этого метода на основе исходных данных сценария из таблицы 3.1 были получены параметры ресурсной системы массового обслуживания, которое описывает функционирование базовой станции в данном сценарии. Результаты приведены в таблице 3.2. Вероятностные распределения приведены в таблицах 3.3 и 3.4.

Таблица 3.2. Набор исходных данных для численного анализа

Параметр	Значение
N	35
M	35
R	70
λ	0.5
μ	1/30
γ	0.3325117
θ	0.5
α	0.5

Таблица 3.3. Вероятностное распределение требований к ресурсу для первичных
заявок

Параметр	Значение
p_3	0.10059
p_4	0.0822959
p_5	0.0579115
p_6	0.143329
p_8	0.0919175
p_{10}	0.0858848
p_{12}	0.0934725
p_{16}	0.0861611
p_{24}	0.0828521
p_{37}	0.0715487
p_{60}	0.0599868
p_{92}	0.0440499

Таблица 3.4. Вероятностное распределение требований к ресурсу для повторных заявок

Параметр	Значение
p_2	0.182886
p_3	0.20124
p_4	0.0919175
p_5	0.0858848
p_6	0.0934725
p_8	0.0861611
p_{12}	0.0828521
p_{19}	0.0715487
p_{30}	0.0599868
p_{46}	0.0440505

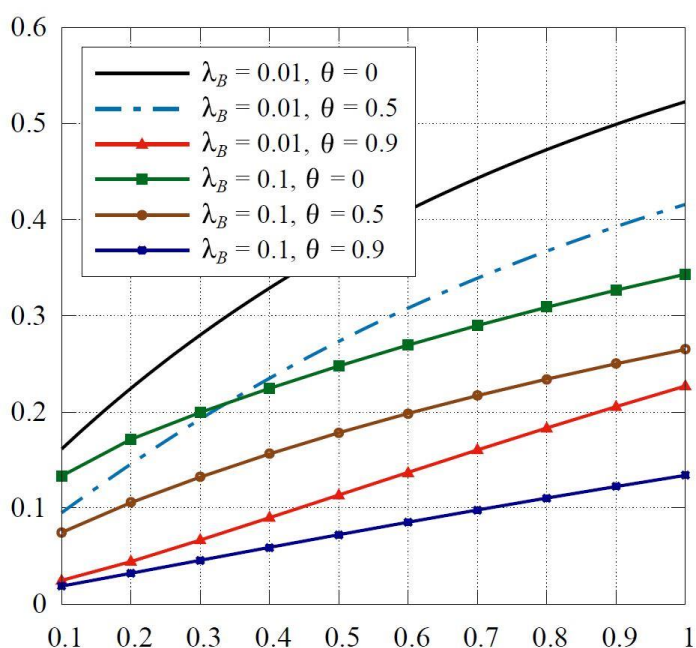


Рис. 3.2. Результаты расчётов вероятности блокировки π_N при λ в пределах от 0.1 до 1

Стоит отметить, что на рисунках 3.2 и 3.3 при плотности блокаторов $\lambda_B = 0.01$ интенсивность потока сигналов равна $\gamma = 0.0932763$, а при $\lambda_B = 0.1$ она равна $\gamma = 0.4356817$. Помимо величин λ , γ и θ остальные параметры имеют

показатели, указанные в таблице 3.2. По оси абсцисс указано значение интенсивности входящего потока заявок λ , а по оси ординат – значение указанной вероятностной характеристики.

На рисунке 3.2 видно, что даже при сравнительно небольшом показателе настойчивости пользователей ($\theta = 0.5$), вероятность блокировки π_N уменьшается примерно на 20%. Если же пользователи решительно не хотят отказываться от обслуживания ($\theta = 0.9$), то этот показатель не превышает отметки в 0.15 при умеренных нагрузках на систему, а в максимальной нагрузке остаётся ниже 0.3.

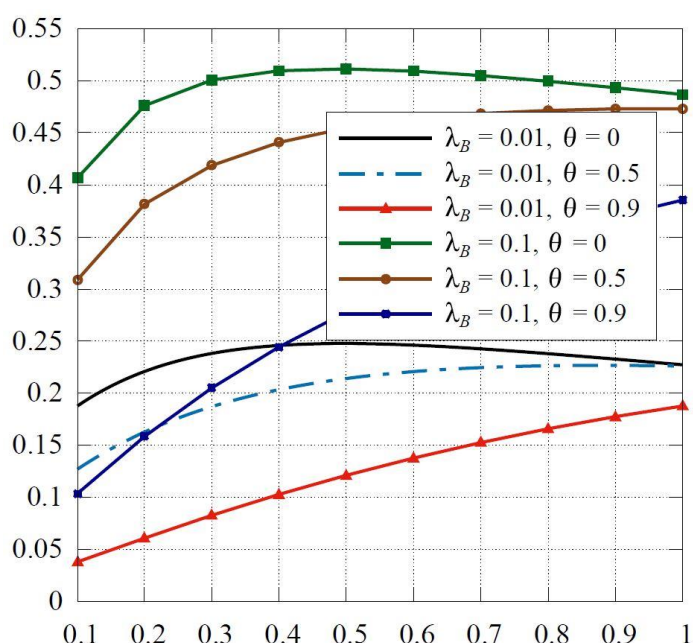


Рис. 3.3. Результаты расчётов вероятности прерывания π_T при λ в пределах от 0.1 до 1

На рисунке 3.3 видно, что при увеличении нагрузки на систему влияние показателя настойчивости пользователей на вероятность прерывания π_T ослабевает. Однако при предельном показателе настойчивости ($\theta = 0.9$) эффект держится на уровне 50%, что является довольно ощутимым уменьшением.

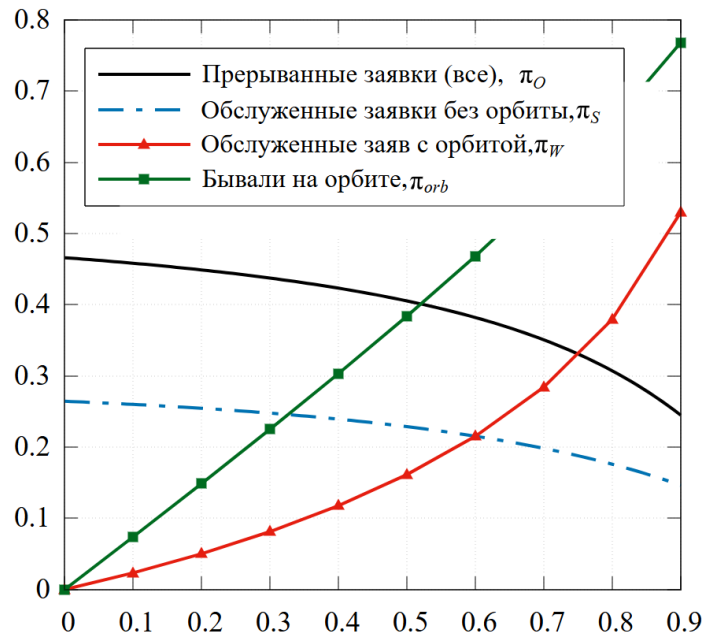


Рис. 3.4. Результаты расчётов различных вероятностей при θ в пределах от 0 до 0.9

На рисунке 3.4 помимо величины θ остальные параметры имеют показатели, указанные в таблице 3.2. На рисунке видно, что при возрастании коэффициента настойчивости пользователей вероятность прерывания заявок падает, но также падает и вероятность обслуживания без орбиты, что негативно сказывается на качестве предоставляемой пользователем услуги. Также видно, что при предельном показателе настойчивости ($\theta = 0.9$) каждая вторая заявка успешно обслуживается, побывав на орбите, а почти 4 заявок из 5 так или иначе посещают орбиту за время нахождения в системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении диссертационной работы сформулируем основные результаты и выводы диссертации.

1. Разработана марковская модель ресурсной системы массового обслуживания с дискретными требованиями к ресурсу и повторными вызовами. Предложен алгоритм расчета стационарного распределения, а также получены формулы для вычисления вероятностных характеристик.
2. Разработан метод приближённого анализа вероятностных характеристик ресурсной системы массового обслуживания с сигналами. Численный анализ показал, что разработанный метод дает относительную погрешность 5-10% при расчёте вероятностей потери и прерывания обслуживания заявки.
3. Разработана модель обслуживания сессий в высокочастотной мобильной сети с учётом повторных вызовов из-за нехватки ресурсов. Модель построена в виде ресурсной системы с сигналами и орбитой, получены формулы для расчёта вероятностно-временных характеристик.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

БС	-	Базовая станция
MCS	-	Modulation and Coding Scheme, схема модуляции и кодирования
ОСШ	-	Отношение сигнала к шуму
CQI	-	Channel Quality Indicator, индикатор качества канала
РесМО	-	Ресурсная система массового обслуживания
5G NR	-	5G New Radio
ОП	-	Оборудования пользователей
ТПП	-	Точечный процесс Пуассона
МСБ	-	Модель случайного блуждания

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Глава 1 Раздел 1.1

η	– случайная величина ОСШ
$F_{\eta}(x)$	– функция распределения ОСШ
K	– количество MSC
s_i	– нижняя граница для назначения i -ой MCS
m_i	– вероятность назначения i -ой MCS
e_i	– спектральная эффективность i -ой MCS
C	– требуемая скорость передачи данных в битах в секунду
B	– ширина полосы ресурсного блока в герцах
r_i	– число требуемых ресурсных блоков для поддержания скорости C на i -ой MCS

Глава 1 Раздел 1.2

N	– количество серверов в системе
R	– количество единиц ресурса в системе
λ	– интенсивность входящего потока заявок
$\{p_j\}$	– вероятностное распределение требований к ресурсу
p_j	– вероятность того, что 1 заявка запросит j единиц ресурса
μ	– интенсивность времени обслуживания заявок
γ	– интенсивность входящего потока сигналов
$X(t)$	– Марковский процесс, описывающий систему

$\xi(t)$	– количество заявок на обслуживании
$r_i(t)$	– объём i -ой заявки
$\delta(t)$	– суммарный объём всех заявок на обслуживании
$Y(t)$	– стохастический процесс, описывающий систему
$p_j^{(n)}$	– вероятность того, что n заявок суммарно запросят j единиц ресурса
S	– пространство состояний системы
S_n	– подмножество пространства состояний системы
q_0	– стационарная вероятность того, что в системе нет заявок
$q_n(r)$	– распределение стационарных вероятностей системы
π_N	– вероятность блокировки доступа на обслуживания
π_T	– вероятность прерывания
$\bar{N}$	– среднее количество заявок на обслуживании
$\bar{R}$	– средняя доля занятых единиц ресурса
$\bar{R}_T$	– средняя доля единиц ресурса, затраченных впустую

Глава 1 Раздел 1.3

N	– количество серверов в системе
R	– количество единиц ресурса в системе
M	– количество мест на орбите
λ	– интенсивность входящего потока заявок
μ	– интенсивность времени обслуживания заявок
$\{p_j\}$	– вероятностное распределение требований к ресурсу

θ	– вероятность уйти на орбиту при отказе в обслуживании
α	– интенсивность времени пребывания заявок на орбите
$X(t)$	– Марковский процесс, описывающий систему
$\xi(t)$	– количество заявок на обслуживании
$\varphi(t)$	– количество заявок на орбите
$r_i(t)$	– объём i -ой заявки
$\delta(t)$	– суммарный объём всех заявок на обслуживании
$Y(t)$	– стохастический процесс, описывающий систему
p_j	– вероятность того, что 1 заявка запросит j единиц ресурса
$p_j^{(n)}$	– вероятность того, что n заявок суммарно запросят j единиц ресурса
S	– пространство состояний системы
S_n	– подмножество пространства состояний системы
$q(n, m, r)$	– распределение стационарных вероятностей системы
π_N	– вероятность блокировки доступа на обслуживания
$\bar{M}$	– среднее количество заявок на орбите
$\bar{R}$	– средняя доля занятых единиц ресурса

Глава 2

N	– количество серверов в системе
R	– количество единиц ресурса в системе
λ	– интенсивность входящего потока заявок
μ	– интенсивность времени обслуживания заявок

γ	– интенсивность входящего потока сигналов
p_j	– вероятность того, что 1 заявка запросит j единиц ресурса
$p_j^{(n)}$	– вероятность того, что n заявок суммарно запросят j единиц ресурса
q_0	– нормирующая константа системы по времени
$q_n(r)$	– распределение стационарных вероятностей системы по времени
π_N	– вероятность блокировки доступа на обслуживания
$\bar{R}$	– средняя доля занятых единиц ресурса
$Y(t)$	– цепь Маркова, вложенная по моментам уходам заявок из системы
τ_i	– момент ухода из системы i -ой заявки
$\xi(t)$	– количество заявок на обслуживании
$\delta(t)$	– суммарный объём всех заявок на обслуживании
$\hat{S}$	– пространство состояний вложенной цепи Маркова
$\hat{S}_n$	– подмножество пространства состояний вложенной цепи Маркова
$\beta_{n,r}(k, i)$	– вероятность того, что если в системе находятся n заявок на обслуживании с суммарным объёмом r единиц ресурса, за время до первого обслуживания любой из заявок, в систему будут приняты ровно k новых заявок с суммарным объёмом i единиц ресурса
$\hat{q}_n(r)$	– распределение стационарных вероятностей вложенной цепи Маркова
$\hat{q}_0$	– нормирующая константа вложенной цепи Маркова
$\hat{\pi}_N$	– вероятность блокировки во вложенной цепи Маркова
$\bar{N}$	– среднее количество заявок на обслуживании

π_T — вероятность прерывания

Глава 3

r_M — радиус покрытия

B — пропускная способность

R — количество первичных ресурсных блоков

h_A — высота базовой станции

h_U — высота оборудования пользователей

h_p — высота пешеходов

λ_B — плотность точечного процесса Пуассона

v_B — скорость пешеходов

τ_B — средняя продолжительность пути пешеходов

r_B — радиус блокаторов

f_C — несущая частота

ζ — экспонента распространения

P_T — излучаемая мощность базовой станции

G_A — выгода базовой станции

G_U — выгода оборудования пользователей

I — интерференция

Υ — быстрое затухание

Ω — теневое затухание

y — дистанция между оборудованием пользователя и базовой станцией

N	— количество серверов в системе
R	— количество единиц ресурса в системе
M	— количество мест на орбите
λ	— интенсивность входящего потока заявок
μ	— интенсивность времени обслуживания заявок
γ	— интенсивность входящего потока сигналов
θ	— вероятность уйти на орбиту при отказе в обслуживании
α	— интенсивность времени пребывания заявок на орбите
$X(t)$	— стохастический процесс, описывающий систему
$\xi(t)$	— количество заявок на обслуживании
$\varphi(t)$	— количество заявок на орбите
$\delta(t)$	— суммарный объём всех заявок на обслуживании
$\{p_{1,j}\}$	— вероятностное распределение требований к ресурсу первичных заявок
$\{p_{2,j}\}$	— вероятностное распределение требований к ресурсу повторных заявок
$\{p_{3,j}\}$	— вероятностное распределение требований к ресурсу при поступлении сигнала
$\bar{N}_1$	— доля первичных заявок на обслуживании
$\bar{N}_2$	— доля повторных заявок на обслуживании
$p_{s,j}$	— вероятность того, что 1 заявка типа s запросит j единиц ресурса

$p_{s,j}^{(n)}$	– вероятность того, что n заявок типа s суммарно запросят j единиц ресурса
S	– пространство состояний системы
S_n	– подмножество пространства состояний системы
$q(n, m, r)$	– распределение стационарных вероятностей системы
$\bar{N}$	– среднее количество заявок на обслуживании
$\bar{M}$	– среднее количество заявок на орбите
π_N	– вероятность блокировки доступа на обслуживания
π_T	– вероятность прерывания
π_S	– вероятность успешно обслужиться, не побывав на орбите
π_W	– вероятность успешно обслужиться, хотя бы 1 раз побывав на орбите
π_{orb}	– вероятность хотя бы 1 раз побывать на орбите
$\bar{R}$	– средняя доля занятых единиц ресурса
$\bar{R}_T$	– средняя доля единиц ресурса, затраченных впустую

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башарин Г.П.* Лекции по математической теории телетрафика // Учеб. Пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Изд-во РУДН. – 2009. – С. 342
2. *Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука» – 1989. – 336 с.
3. *Башарин Г.П., Толмачев А.Л.* Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». – 1983. – Т. 21. – С.3 – 119.
4. *Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шпенс-Шпене М.А.* Массовое обслуживание в телефонии. – М.: Наука. – 1968. – 247 с.
5. *Basharin G. P., Samouylov K. E., Yarkina N. V., Gudkova I. A.* A new stage in mathematical teletraffic theory // Automat. Rem. Contr. – 2009. – Vol. 70. No. 12. – P. 1954 – 1964.
6. *Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В.,* Управление качеством и вероятностные модели функционирования сетей связи следующего поколения: учебное пособие // М. РУДН – 2008. – 157 с.
7. *Bocharov P.P., D'Aplice C., Pechinkin A.V., and Salerno S.* Queueing Theory. – Brill Academic Publishers. – 2004. – 457 p.
8. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера. – 2003. – 512 с.
9. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с корреляционными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера. – 2018.
10. *Вишневский В.М., Портной С.Л., Шахнович И.В.* Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G // М.: Техносфера. – 2009. – С. 472.
11. *Вишневский В.М., Семенова О.В.* Системы поллинга. Теория и применения в широкополосных беспроводных сетях. – М.: Техносфера, - 2007. – 312 с.

12. Гольдштейн Б.С., Кучерявый А.Е., Сети связи пост-NGN // СПб: БХВ-Петербург. – 2013. – С. 160.
13. Кучерявый А.Е., Парамонов А.И., Кучерявый Е.А. Сеть связи общего пользования. Тенденции развития и методы расчета // М.:ФГУП ЦНИИС. – 2008. – С. 296.
14. Моисеева С.П., Панкратова Е.В., Убонова Е.Г. Исследование бесконечнолинейной системы массового обслуживания с разнотипным обслуживанием и входящим потоком марковского восстановления // Вестник Томского государственного университета. Серия «Управление, вычислительная техника и информатика». – 2016. – № 2. – Вып. 35. – С. 46-53.
15. Сонькин М.А., Моисеев А.Н., Сонькин Д.М., Буртовая Д.А. Объектная модель приложения для имитационного моделирования циклических систем массового обслуживания // Вестн. Том. гос. ун-та. УВТиИ. – 2017. – № 40. – С. 71–80.
16. Moiseev A., Nazarov A. Asymptotic Analysis of the Infinite-Srever Queuing System with High-Rate Semi-Arrivals // Proc. of the IEEE International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems (ICUMT 2014). – St. Petersburg: IEEE. – 2014. – Pp. 607–613.
17. Moltchanov D., Survey paper: Distance distributions in random networks // Ad Hoc Netw. – 2021. – Vol. 10. No. 6. – Pp. 1146–1166.
18. Moltchanov D., Samuylov A., Petrov V., Gapeyenko M., Himayat N., Andreev S., and Koucheryavy Y, Improving session continuity with bandwidth reservation in mmwave communications, // IEEE Wireless Communications Letters. – 2019. – Vol. 8, no. 1. – Pp. 105–108.
19. Назаров А.А., Тернугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов // Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ. – 2006. – С. 204.
20. Наумов В.А. Численные методы анализа марковских систем // М.: Изд-во УДН. – 1985. – С. 37.

21. *Naumov V., Samouylov K., Yarkina N., Sopin E., Andreev S., and Samuylov A.* LTE performance analysis using queuing systems with finite resources and random requirements // Proc. of the 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2015 (October 6-8. 2015, Brno, Czech Republic). – USA, New Jersey, Piscataway, IEEE. – 2015. – P. 100–103.
22. *Naumov V.A. Samouylov K.E.,* On the modeling of queuing systems with multiple resources // PFUR Bulletin, Series Informatics. Mathematics. Physics. – 2014. – Vol. 3. – Pp. 58-62.
23. *Naumov, V.A., Samuilov, K.E., Samuilov, A.K.,* On the total amount of resources occupied be serviced customers // Autom Remote Control. – 2016. – Vol. 77, issue 8. – Pp. 1419-1427.
24. *Корнышев Ю.Н., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д.* Теория телетрафика: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь. – 1996. – 272 с.
25. *Kelly F. P.* Loss networks // Ann. Appl. Probab., - 1991. – No. 1. – P. 319–378.
26. *Kelly F.P.* Reversibility and Stochastic Networks. – New York: J. Wiley & Sons. – 1979. – Pp. 630.
27. *Ross K.W.* Multiservice loss models for broadband telecommunication networks // Sprienget-Verlag. – 1995. – Pp. 343.
28. *Степанов С.Н.* Основы телетрафика мультисервисных сетей // М.: Изд-во «Эко-Трендз». – 2010. – С. 392.
29. *Степанов С.Н.* Теория телетрафика: концепции, модели, приложения // М.: Горячая линия – Телеком. – 2015. 0 868 с
30. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Планирование ресурса передачи при совместном обслуживании мультисервисного трафика реального времени и эластичного трафика данных // Автоматика и Телемеханика. – 2017. - №11. – С. 79–93.
31. *Iversen V.B.* Teletraffic engineering and network planning // ITU-D. – May 2011. – Pp. 567.

32. *А. В. Горбунова, В. А. Наумов, Ю. В. Гайдамака, К.Е. Самуйлов*, Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информ. и её примен. – 2018. – 12:3. – С. 48–55
33. *А. В. Горбунова, В. А. Наумов, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов*, Ресурсные системы массового обслуживания с произвольным обслуживанием // Информ. и её примен. – 2019. – 13:1. – С. 99–107
34. *E. Sopin, K. Samouylov, S. Shorgin*, The analysis of the computation offloading scheme with two-parameter offloading criterion in fog computing // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – Pp. 11–20. doi:10.1007/978-3-030-34914-1_2.
35. *E. Sopin, N. Zolotous, K. Ageev, S. Shorgin*, Analysis of the response time characteristics of the fog computing enabled real-time mobile applications // 20th international Conference NEW2AN 2020, Lecture Notes in Computer Science 12525. – 2020. – Pp. 764-779. doi:10.1007/978-3-030-65726-0_9
36. *Р. В. Разумчик, А. И. Зейфман, А. В. Коротышева, Я. А. Сатин*, Анализ энергоэффективности вычислительного комплекса, моделируемого с помощью системы обслуживания с пороговым управлением и интенсивностями, зависящими от времени // Системы и средства информ. – 2015. – 25:4. –С. 19–30
37. *А. И. Зейфман, В. Е. Бенинг, И. А. Соколов*, Марковские цепи и модели с непрерывным временем // М.: Элекс-КМ. – 2008.
38. *Zeifman A.I., Korolev V.Yu, Sipin A.S.(Eds)*, Stability Problems for Stochastic Models. Theory and Applications // MDPI, Basel, Switzerland, ISBN 978-3-0365-0452-0. – 2021. <https://doi.org/10.3390/books978-3-0365-0453-7>
39. *Kochetkova I, Satin Y, Kovalev I, Makeeva E, Chursin A, Zeifman A* Convergence Bounds for Limited Processor Sharing Queue with Impatience for Analyzing Non-Stationary File Transfer // Wireless Network. Mathematics. – 2022. – 10(1):30. <https://doi.org/10.3390/math10010030>.
40. *Y.A. Satin, R.V. Razumchik, A.I. Zeifman, I.A. Kovalev*, Upper bound on the rate of convergence and truncation bound for non-homogeneous birth and death

- processes on Z // *Applied Mathematics and Computation*. – 2022. – Vol. 423. – 127009. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127009>.
41. *Gorbunova, A., Vishnevsky, V.*, Estimating the Response Time of a Cloud Computing System with the Help of Neural Networks // *Systems Science and Applications*. – 2022. – 20(3). – Pp. 105-112.
42. *A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matyushenko, K. E. Samouylov, S. Ya. Shorgin*, The approximation of response time of a cloud computing system // *Inform. Primen.* – 2015. – 9:3. – Pp. 32–38.
43. *Tsitovich, I., Titov, I.*, Analysis of loss probability for multimedia resource's traffic // *Information Technology and Systems Conference, Moscow*. – 2012. – Pp. 484–489 (in Russian)
44. *Titov, I., Tsitovich, I., Poryazov, S.*, Use of Time-Scale for Analysis of Data Source Traffic // *Modern Probabilistic Methods for Analysis of Telecommunication Networks. BWWQT 2013. Communications in Computer and Information Science*. – *Springer, Berlin, Heidelberg*. – 2013. – Vol. 356. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35980-4_21.
45. *L. Wang and E. Gelenbe*, Adaptive Dispatching of Tasks in the Cloud // *IEEE Transactions on Cloud Computing*. – 2018. – Vol. 6, no. 1. – Pp. 33-45. doi: 10.1109/TCC.2015.2474406.
46. *E. Gelenbe, R. Lent and M. Douratsos*, Choosing a Local or Remote Cloud // *2012 Second Symposium on Network Cloud Computing and Applications*. – 2012. – Pp. 25-30. doi: 10.1109/NCCA.2012.16.
47. *J. G. Andrews et al.*, What Will 5G Be? // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. – 2014. 0 Vol. 32, no. 6. – Pp. 1065-1082. doi: 10.1109/JSAC.2014.2328098.
48. *M. Haenggi, J. G. Andrews, F. Baccelli, O. Dousse and M. Franceschetti*, Stochastic geometry and random graphs for the analysis and design of wireless networks // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. – 2009. – Vol. 27, no. 7. – Pp. 1029-1046. doi: 10.1109/JSAC.2009.090902.

49. *J. G. Andrews, T. Bai, M. N. Kulkarni, A. Alkhateeb, A. K. Gupta and R. W. Heath*, Modeling and Analyzing Millimeter Wave Cellular Systems // IEEE Transactions on Communications. –2017. – Vol. 65, no. 1. – Pp. 403-430. doi: 10.1109/TCOMM.2016.2618794.
50. *S. Weber, J. G. Andrews and N. Jindal*, An Overview of the Transmission Capacity of Wireless Networks // IEEE Transactions on Communications. – 2010. – Vol. 58, no. 12. – Pp. 3593-3604. doi: 10.1109/TCOMM.2010.093010.090478.
51. *Afif Osseiran, Jose F. Monserrat, Patrick Marsh, Misha Dohler, Takehiro Nakamura*, 5G Mobile and Wireless Communications Technology // Cambridge University Press 1st edition. – October 3, 2016.
52. *Naumov V.A., Gaidamaka Y.V., Yarkina N.V., Samouylov K.E.*, Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems // Springer Nature Switzerland AG. – 2021. – 308 c.
53. *X. Lu, M. Lema, T. Mahmoodi, and M. Dohler*, Downlink data rate analysis of 5G-U (5G on Unlicensed Band): Coexistence for 3GPP 5G and IEEE 802. 11ad WiGig // 2017 European Wireless (EW). – 2017. – Pp. 1–6.
54. *X. Lu, E. Sopin, V. Petrov, O. Galinina, D. Moltchanov, K. Ageev, S. Andreev, K. Yevgeni, K. Samouylov, and M. Dohler*, Integrated use of licensed- and unlicensed-band mmWave radio technology in 5G and beyond // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – Pp. 24376–24391.
55. *Sopin, E., Daraseliya, A., Correia, L.M.*, Performance Analysis of the Offloading Scheme in a Fog Computing System // 10th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). IEEE. Moscow. – 2018. – Pp. 1–5.
56. *Дараселия А.В., Сопин Э.С., Рыков В.В.*, On optimization of energy consumption in cloud computing system // Proceedings of the Selected Papers of the 12th International Workshop on Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics (Summer Session) in the framework of the Conference on Information and Telecommunication Technologies and

- Mathematical Modeling of High-Tech Systems (AFTP+MS'2018). – 2018. – Pp. 23-31. <http://ceur-ws.org/Vol-2332/paper-03-005.pdf>.
57. *A. Daraseliya M. Korshykov, E. Sopin, D. Moltchanov, Y. Koucheryavy and K. Samouylov*, Handling Overflow Traffic in Millimeter Wave 5G NR Deployments using NR-U Technology // 2020 IEEE 31st Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. – 2020. – Pp. 1-7. DOI: 10.1109/PIMRC48278.2020.9217313.
58. *Maksym V. Korshykov, Anastasia V. Daraseliya, Eduard S. Sopin*, Development of Analytical Framework for Evaluation of LTE-LAA Probabilistic Metrics // 19th International Conference, NEW2AN 2019, and 12th Conference, ruSMART 2019, Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 11660. – Pp. 318-328. DOI: 10.1007/978-3-030-30859-9_27.
59. *A. Daraseliya, M. Korshykov, E. Sopin, D. Moltchanov, S. Andreev and K. Samouylov*, Coexistence Analysis of 5G NR Unlicensed and WiGig in Millimeter-Wave Spectrum // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2021. – Vol. 70, no. 11. – Pp. 11721–11735. doi: 10.1109/TVT.2021.3113617.
60. *A. V. Daraseliya E. S. Sopin D. A. Moltchanov K. E. Samouylov*, Анализ стратегии разгрузки базовых станций 5G NR с помощью технологии NR-U, Информатика и ее применения. – Т. 15. – Вып. 3. – С. 98-111. DOI: 10.14357/19922264210313.
61. *L. Kleinrock*, Queuing systems, volume 1: Theory. Wiley New York. – 1976. – Vol. 66.
62. *P. Nain, D. Towsley, B. Liu, and Z. Liu*, Properties of random direction models, IEEE 24th Annu. Joint Conf. IEEE Comput. Commun. Soc. – 2005. – Vol. 3. – Pp. 1897–1907.
63. *S. N. Chiu, D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke*, Stochastic Geometry and Its Applications, Hoboken, NJ, USA: Wiley. – 2013.
64. *M. Gapeyenko et al.*, On the temporal effects of mobile blockers in urban millimeter-wave cellular scenarios, IEEE Trans. Veh. Technol. – 2017. – Vol. 66, no. 11. – Pp. 10124–10138.

65. *Moltchanov D., Sopin E., Begishev V., Samuylov A., Koucheryavy Y., Samouylov L.*, A tutorial on mathematical modeling of 5G/6G millimeter wave and terahertz cellular systems // *IEEE Communications Surveys Tutorials*. – 2022. – Vol. 24. Iss. 2. – Pp. 1072–1116.
66. *E. Sopin, K. Ageev, E. Markova, O. Vikhrova, Y. Gaidamaka*, Performance analysis of M2M traffic in LTE network using queuing systems with random resource requirements // *Automatic Control and Computer Sciences*. – 2018. – Vol. 52. – Pp. 345–353.
67. *K. Ageev, E. Sopin, S. Shorgin*, The probabilistic measures approximation of a resource queuing system with signals // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2021. – Vol. 13144. – Pp. 80–91.
68. *Sopin Eduard, Maslov Alexander, Begishev Vyacheslav, Samuyilov Konstantin*, The impact of rate adaptation on user performance in 5G/6G mmWave/Sub-THz systems // *IEEE Communications Letters*. – 2023. – Vol. 27(11): 3 137-3 141. DOI: 10.1109/LCOMM.2023.3314269.
69. *Сопин Э. С., Маслов А. Р., Шоргин В. С., Бегисhev В. О.*, Моделирование настойчивого поведения пользователей в сетях 5G NR с адаптацией скорости и блокировками, *Информатика и ее применения*. – 2023. – Т. 17. – Вып. 3. – С. 25-32. DOI: 10.14357/19922264230304.
70. *Alexander Maslov, Eduard Sopin, Konstantin Samouylov*, Accurate approximation for resource queuing systems with losses and signals // *Mathematics*. – 2025. – Vol. 13(4), 619. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math13040619>.
71. *A. R. Maslov, E. S. Sopin, S. Ya. Shorgin*, Convolution algorithm for evaluation of probabilistic characteristics of resource loss systems with signals // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2025. – Pp. 289-299. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-80853-1_21.
72. *Eduard Sopin, Dmitri Moltchanov, Alexander Maslov, Vyacheslav Begishev, Andrey Samuylov, Konstantin Samouylov, and Yevgeni Koucheryavy*, User Persistence in 5G/6G mmWave/Sub-THz Systems With Blockage: Does It Pay

- Off? // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2024. – Vol. 23(10). – Pp. 14864-14878. DOI: <https://doi.org/10.1109/TWC.2024.3419918>.
73. *Jesús R. Artalejo, Antonio Gómez-Corral*, Retrial Queuing Systems // Springer Berlin, Heidelberg. – 2008. – 318 p. – DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>.
74. *Phung-Duc, T.* Retrial queuing models: A survey on theory and applications. In Stochastic Operations Research in Business and Industry; Dohi, T., Ano, K., Kasahara, S., Eds.; World Scientific Publisher: Singapore – 2017.
75. *V. Petrov, M. Komarov, D. Moltchanov, J. M. Jornet, and Y. Koucheryavy*, Interference and SINR in millimeter wave and terahertz communication systems wit blocking and directional antennas // IEEE Trans. Wireless Commun. – 2017. – Vol. 16(3). – Pp. 1791-1808.
76. Study on Channel Model for Frequencies From 0.5 to 100 GHz (Release 14), document TR 38.901, V14.1.1, 3GPP. – 2017.
77. *S. Singh, R. Mudumbai, and U. Madhow*, Interference analysis for highly directional 60-GHz mesh networks: The case for rethinking medium access control // IEEE/ACM Trans. Netw. – 2011. – Vol. 19(5). – Pp. 1513-1527.