На правах рукописи

Российский университет дружбы народов

Хамадех Альхалиль Нисрин

Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса

Специальность 1.1.2.
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Математическом институте им. С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственого автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Гольдман Михаил Львович

Официальные оппоненты: **Авсянкин Олег Геннадиевич,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Южного Федерального университета

Ломов Игорь Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Шишкина Элина Леонидовна,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа и прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Защита состоится 25 октября 2022 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте «Диссертационные советы РУДН» в сети интернет (http://rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан 21 сентября 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.005,
д-р физ.-мат. наук Савин Антон Юрьевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Данная диссертация посвящена изучению дифференциальных свойств сверток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда $G_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$. Теория классических потенциалов Бесселя является важным разделом общей теории пространств дифференцируемых функций дробной гладкости и ее приложений в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли[1], С. М. Никольского[2], В. Г. Мазьи[3]. Условия локализации средних Рисса спектрального разложения подробно изучены в работах V. A. Il'in, Sh. A. Alimov[4]. Условия локализации для более общих γ-средних спектральных разложений и разлагаемых функций из пространства обобщенной гладкости рассмотрены в работах M. L. Goldman, T. G. Ayele[5]. Вопросы локализация γ-средних спектрального разложения играют важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Свойства Бесселевых потенциалов подробно изложены в работе В. Г. Мазьи[3]. Развитию теории этих пространств и их приложениям посвящены исследования многих выдающихся специалистов в области математического анализа и теории уравнений в частных производных в нашей стране и за рубежом. Отметим здесь работы таких исследователей как С. Л. Соболев, С. М. Никольский, О. В. Бесов, В. И. Буренков, Л. Д. Кудрявцев, П. И. Лизоркин, Ю. Г. Решетняк, Л. Хермандер, И. Стейн, В. Г. Мазья, Х. Брезис и многие другие. В работах этих исследователей для пространств классических потенциалов построена полная

[1] *Bennett C.*, *Sharpley R.* Interpolation of operators. New York : Acad. Press, 1988.

[2] *Nikolsky S. M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Moscow : Science, 1977.

[3] *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л. : Издательство ЛГУ, 1985.

[4] *Il'in V. A.*, *Alimov S. A.* Conditions for the convergence of spectral decompositions that correspond to self-adjoint extensions of elliptic operators. I, II // Differentsial'nye Uravneniya. 1971. Vol. 7. P. 670—710, 851—882.

[5] *Goldman M. L.*, *Ayele T.* Spaces of generalized smoothness in summability problems for Φ-means of spectral decomposition // Eurasian Math. Journal. 2014. Vol. 5, no. 1. P. 61—81.

теория вложения. Теория обобщенных бесселевых потенциалов и ее приложения развивались в работах М. Л. Гольдмана, Р. Кермана, Д. Хароске и др.[6,7,8,9,10,11].

Цель диссертационной работы состоит в исследовании дифференциальных свойств обобщенных потенциалов типа Бесселя.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. исследовать дифференциальные свойства обобщенных потенциалов Бесселя;
2. описать точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций.
3. исследовать критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Привести конкретизацию этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. описать точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
5. оценить аппроксимативные числа оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
6. получить необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство$L_2(\mathbb{R}^n)$;
7. получить условии локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

1. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций;
2. установлены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;

---

[6] *Caetano A.*, *Moura S.* Local growth envelopes of spaces of generalized smoothness: the critical case // Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 573—606.

[7] *Goldman M. L.* Rearrangement invariant envelopes of generalized Sobolev and Calderon spaces //. Vol. 424. 2007. P. 53—81.

[8] *Goldman M. L.*, *Heinig H.*, *Stepanov V.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. Vol. 48. P. 959—979.

[9] *Goldman M.*, *Kerman R.* On the optimal embedding of Calderon spaces and of generalized Besov spaces // Proceedings of the Mathematical Institute V. A. Steklov. 2003. Vol. 243, no. 4. P. 154—184.

[10] *Goldman M.*, *Kerman R.* On the rearrangement-invariant hull of the Calderon space // Dokl. Akad. Nauk. 2003. Vol. 392. P. 155—159.

[11] *Goldman M.*, *Malysheva A.*, *Haroske D.* Estimates of the uniform modulus of continuity for Bessel potentials // Dokl. Akad. Nauk. 2013. Vol. 450. in Russian.

3. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. получены оценки аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
5. даны необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
6. получены условия локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя по собственным функциям оператора Лапласа в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер.

– установлены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
– получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
– получены оценки аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
– даны необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
– получены условия локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя по собственным функциям оператора Лапласа в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Методология и методы исследования. Исследования дифференциальных свойств потенциалов опираются на оценки модулей непрерывности сверток функций из весовых пространств Лоренца с ядрами потенциалов. Изучение вопросов локализации спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа для обобщенных потенциалов Бесселя опирается на оценки модулей непрерывности потенциалов во взаимосвязи их со свойствами функций, определяющих методы суммирования спектральных разложений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций.
2. Построены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.
3. Доказаны теоремы о точных по порядку оценках равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца.

4. Доказаны теоремы о оценке аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространстве ограниченных и равномерно непрерывных функций.
5. Доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.
6. Получены условии локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Степень достоверности результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на научном семинаре Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН и Южного математического института ВНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраева, к.ф.-м.н. М. А. Плиева; в Российском университете дружбы народов на научном семинаре под руководством профессоров А. В. Арутюнова, В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана, в МГУ им. М. В. Ломоносова на научном семинаре на механико-математическом факультете под руководством профессоров Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, на научном семинаре на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова. По результатам диссертации были сделаны доклады наа Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019–2020–2021); на Международной научной конференции (Ninth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”. Rostov-on-Don, 2018–2019); на 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Международной научной конференции «Interdisciplinary Research in Science, Engineering and Technology» (Bangalore, India, 2021); на Международн. ой научной конференции «Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVI» (Vladikavkaz, 2021).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1—5] , 7 — в тезисах докладов международных и всероссийских конференций [6—12]. Результаты диссертации, содержащиеся в совместных работах, принадлежат лично автору.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **105** страниц текста. Список литературы содержит **70** наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

Глава 1. Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Параграф 1.1. ***Общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами***. (см. Определение 1.1.4 ниже).

(i) Банахово функциональное пространство, сокращенно БФП, $E = E(\mathbb{R}^n)$ — это банахово пространство измеримых по Лебегу функций $f\ :\ \mathbb{R}^n\ \to\ C$ с монотонной нормой, т. е.

$$|f| \leqslant g, \quad g \in E \ \text{ влечет } \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E,$$

и со свойством Фату:

$$0 \leqslant f_n \uparrow f, \quad f_n \in E \ \text{ влечет } \ f \in E, \quad \|f_n\|_E \leqslant \|f\|_E.$$

(ii) БФП E называется перестановочно-инвариантным пространством, сокращенно ПИП, если его норма монотонна относительно перестановок,

$$f^* \leqslant g^*, \quad g \in E \ \text{ влечет } \ f \in E, \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Здесь $f^*\ :\ \mathbb{R}_+\ \to\ [0,\infty]$ — убывающая перестановка функции $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, т. е. f^* — неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, которая является равноизмеримой с f:

$$\mu_n\big\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ |f(x)| > y\big\} = \mu_1\big\{t \in \mathbb{R}_+\ :\ |f^*(t)| > y\big\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Пространство потенциалов $H^G_E \equiv H^G_E(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) = \big\{u = G * f\ :\ f \in E(\mathbb{R}^n)\big\}, \tag{1}$$

где E — перестановочно инвариантное пространство, а ядро G — специального вида

$$\|u\|_{H^G_E} = \inf\big\{\|f\|_E\ :\ f \in E(\mathbb{R}),\ G * f = u\big\}. \tag{2}$$

Здесь свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

(мы ввели здесь множитель $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для удобства при использовании преобразования Фурье).

Здесь мы существенно используем результаты работы[12], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Для ПИП $E \equiv E(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $E' \equiv E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП, в котором норма задается соотношением

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \, \mathrm{d}\mu_n \ : \ f \in E; \ \|f\|_E \leqslant 1 \right\}, \tag{5}$$

где μ_n — n-мерная мера Лебега, $\widetilde{E} \equiv \widetilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{E}' \equiv \widetilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга, т. е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\widetilde{E}'}, \tag{6}$$

где f, g измеримые функции.

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Для $R \in \mathbb{R}_+$ введем класс монотонных функций $\mathfrak{I}_n(R)$ следующим образом. Функция $\Phi : (0,R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{I}_n(R)$, если

1. Φ убывающая и непрерывная на $(0,R)$;
2. существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} \, \mathrm{d}\rho \leqslant c\Phi(\rho)r^n, \quad r \in (0,R). \tag{7}$$

$$\phi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{I}_1(T), T = V_n R^n.$$

Здесь V_n — объем n-мерного единичного шара.

Свойства ядер обсуждаются в определениях 1.1.1 – 1.1.3 ниже.

Замечание 1.1.1. *Пусть $A(x)$, $B(x)$ — положительные функции на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Мы пишем $A(x) \cong B(x)$, $x \in D$, если существует постоянная $c \geqslant 1$ такая, что $c^{-1} \leqslant \frac{A(x)}{B(x)} \leqslant c$, $\forall x \in D$.*

Определение 1.1.1. *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$. Считаем, что $G \in S_R(\Phi)$, если*

$$G(x) \cong \Phi(|x|), \quad x \in B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

[12] *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 91—111.

Определение 1.1.2. *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$, $X(\mathbb{R}^n)$ — ПИП. Считаем, что $G \in S_R(\Phi; X)$, если*

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x);$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x), \tag{9}$$

где B_R^c дополнение к B_R,

$$G_R^0(x) \cong \Phi(x), \quad x \in B_R, \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n).$$

Определение 1.1.3. *Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ называются обобщенными потенциалами Бесселя, если*

$$\Phi \in \mathfrak{I}_n(R), \quad G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int_{\mathbb{R}^n} G\,\mathrm{d}\mu_n \neq 0. \tag{10}$$

А если $\Phi \in \mathfrak{I}_n(\infty)$, потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ называются обобщенными потенциалами Рисса, если $G(x) \cong \Phi(|x|)$, $|x| \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1.1.4. *Пространством Лоренца $\Lambda^p(v)$, где $v > 0$ — измеримая функция, называется пространство всех измеримых функций на $\mathbb{R}^n$ с конечными (квази) нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^*(t)^p v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}; & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f^*(t)v(t)\right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Параграф 1.2. *Точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций*.

Определение 1.2.1. *Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций с нормой $\|u\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|$.*

Модуль непрерывности для $u \in C(\mathbb{R}^n)$ в равномерной норме:

$$\omega_C^k(u;\tau) = \sup\left\{ \left\|\Delta_h^k u\right\|_C \;:\; |h| \leqslant \tau \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь $\Delta_h^k u(x)$ — k-я разность с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что для $u \in C(\mathbb{R}^n)$: $\omega_C^k(u;\tau) \to 0$, $(\tau \to +0)$.

В наших результатах мы использовали Теорему 1.2.1 и Лемму 1.2.1.

Теорема 1.2.1.[13] *Пусть $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $G \neq 0$, $\phi(\tau) = G^*(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, такова, что при некотором $T \in \mathbb{R}_+$*

$$\int\limits_0^T \phi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty. \tag{12}$$

[13] *Гольдман М. Л., Малышева А. В.* Об оценке равномерного модуля непрывности обобщенного потенциала Бесселя // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 1—12.

Тогда

1. *Для свёртки*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) \, \mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c_0 \int\limits_0^T \phi(\tau) f^*(\tau) \, \mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$c_0 = 1 + \left(\int\limits_T^\infty \phi(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \left(\int\limits_0^T \phi(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right)^{-1}. \tag{15}$$

2. *Пусть, кроме того,* $G \in C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $k \in \mathbb{N}$, *для*

$$G_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \left| D^\alpha G(x) \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

при $c_1 \in \mathbb{R}_+$ *имеет место оценка*

$$|G_k(x)| \leqslant c_1 \Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{17}$$

где

$$0 \leqslant \beta_k(\tau) := \Psi_k \left(\left(\frac{\tau}{V_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_+, \tag{18}$$

и выполнены соотношения

$$\beta_k(\tau) \leqslant \tau^{-k \backslash n} \phi(\tau), \quad \tau \in (0,T], \tag{19}$$

$$\int\limits_T^\infty \beta_K(\tau) \, \mathrm{d}\tau < \infty. \tag{20}$$

Тогда свёртка и, определенная в (13), *непрерывна на* $\mathbb{R}^n$ *и для* $t \in (0,T]$

$$\omega_C^k \left(u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leqslant c_2 \int\limits_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right] \phi(\tau) f^*(\tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

Здесь $c_2 = c_1 \tilde{c} d$, *где*

$$d = 1 + \frac{2}{T \beta_K(T)} \left(\int\limits_T^\infty \beta_K(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right), \tag{22}$$

c_1 — *постоянная из условия* (17), $\tilde{c} = \tilde{c}(k,n) \in \mathbb{R}_+$. Далее рассмотрены некоторые более простые оценки модулей непрерывности при дополнительных ограничениях на ядра потенциалов.

Лемма 1.2.1.[13] *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int_t^T \tau^{-\frac{k}{n}} \phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant B_0 t^{1-\frac{k}{n}} \phi(t), \quad t \in (0,T], \tag{23}$$

где $B_0 \in \mathbb{R}_+$ не зависит от t.

Кроме того, пусть выполнены условия Теоремы 1.2.1. Тогда

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \int_0^t \phi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T], \tag{24}$$

где $c_3 = (1 + B_0)c_2$, c_2 — постоянная из (21).

Теорема 1.2.2. *Пусть $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$ и пусть υ,ω веса, и $\Phi_0(t) = \int_0^t \phi(\tau)d\tau$, $V(s) = \int_0^s \upsilon(t)dt$, $\tilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$, и пусть выполнены условия леммы 1.2.1 и, кроме того*

$$A_3 := \sup_{x>0} \left\{ \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{\upsilon(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} < \infty,$$

тогда

$$\left\| \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leqslant c_3 c \|f\|_{\Lambda^q(\upsilon)}, \tag{25}$$

c_3 — *постоянная из* (24). *Наилучшая постоянная c в оценке* (25) *удовлетворяет условию $c \approx A_3$.*

Здесь символ $\approx$ означает, что отношение левой и правой части находятся между положительными константами, зависящими только от p (а не от υ или g).

Параграф 1.4. ***Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца***.

Определение 1.4.1. *Пусть $X = X(0,T)$ идеальное пространство (см.*[1]*) и $k \in \mathbb{N}$. Мы вводим пространство Кальдерона $\Lambda^k(C; X)$, так*

$$\Lambda^k(C; X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^n) : \ \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \in X(0,T) \right\}; \tag{26}$$

$$\|u\|_{\Lambda^k(C;X)} = \|u\|_C + \left\|\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)\right\|_{X(0,T)}. \tag{27}$$

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия леммы 1.2.1, тогда при* $\tilde{E} = \Lambda^q(v)$, $X = L_q(\widetilde{\omega})$ *имеет место критерий*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C;X) \Leftrightarrow A_3 < \infty,$$

где

$$A_3 := \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^q w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^{q'} \frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q'}}\right\}.$$

Здесь $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\widetilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$.

Основные результаты первой главы опубликованы в работе [1] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 2** установлены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца. Затем применяется этот результат для оценки аппроксимативных чисел обобщенных потенциалов Бесселя, когда обобщенные потенциалы Бесселя построены по основному весовому пространству Лоренца. Доказана Теорема 2.2.1.

Параграф 2.1. ***Определения и предварительные сведения***.

Будем рассматривать случай, когда ассоциированное пространство $E(\mathbb{R}^n)$ является пространством Лоренца: $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$.

Пусть $v > 0$ — измеримая функция на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda^p(v)$ (Определение 1.1.8). Считаем, что

$$0 < V(t) := \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left[\frac{V(2t)}{V(t)}\right] < \infty, \tag{28}$$

так называемое Δ_2-условие. В этих предположениях $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ является (квази) банаховым пространством, которое дает важный пример перестановочно-инвариантного пространства (сокращенно ПИП) из-за свойства:

$$g^* \leqslant f^*, \quad f \in E(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g \in E(\mathbb{R}^n), \quad \|g\|_E \leqslant \|f\|_E.$$

(К. Беннетт и Р. Шарпли[1]). $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ является ассоциированным. E' — это ПИП (5).)

При $1 < p < \infty$ описание ассоциированного пространства для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ было получено Э. Сойером[14]. А именно,

$$\|g\|_{E'} = \sup_{0\leqslant h\downarrow} \frac{\int\limits_0^\infty g^*(\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\left(\int\limits_0^\infty h(\tau)^p v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\right)\frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{29}$$

Замечание 2.1.1. *Обратим внимание, что для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$*

$$E'(\mathbb{R}^n) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \exists T > 0: \int\limits_0^T \frac{t^{p'}v(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)^{p'}} < \infty. \tag{30}$$

Действительно, для $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mu_n(D) = T$, имеем $g(x) = \chi_D(x) \in E'(\mathbb{R}^n)$, поскольку $g^*(\tau) = \chi_{(0,T)}(\tau)$ и

$$\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \xi, & 0 < \xi \leqslant T, \\ T, & \xi > T; \end{cases}$$

$$\left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \leqslant c_1 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} =$$

$$= c_1 \int\limits_0^T \frac{\xi^{p'}v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} + c_1 T^{p'} \int\limits_T^\infty \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} < \infty,$$

где

$$\int\limits_T^\infty \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} = \frac{V(\xi)^{1-p'}}{1-p'}\bigg|_{\xi=T}^{\infty} \leqslant \frac{V(T)^{1-p'}}{p'-1} < \infty.$$

С другой стороны, если $\exists g \in E'(\mathbb{R}^n)$, $g \neq 0$, тогда существует $c > 0$ и $T \in \mathbb{R}_+$ такой, что $g^*(\tau) \geqslant c$, $\tau \in (0,T)$. Тогда

$$\infty > \left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \geqslant c_2 \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} \geqslant c_2 c^{p'} \int\limits_0^T \frac{\xi^{p'}v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}.$$

[14] *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1990. Vol. 96. P. 145—158.

Всюду в этой главе мы предполагаем, что выполнено условие (30).

Параграф 2.2. ***Доказательство результатов об оценке равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца.***

Теорема 2.2.1. *Пусть* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ *— пространство Лоренца, см.* (11), (5), (28)–(30) *и* $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *пространство обобщенных бесселевых потенциалов, см.* (1)*;*

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \tau \in (0,T); \quad T = V_n R^n; \quad \varphi(\tau) = G^*(\tau); \quad \tau > T, \tag{31}$$

Кроме того, мы полагаем, что верна оценка (23)*, ядро* G *удовлетворяет предположениям Теоремы 1.2.1 и*

$$\sup_{t\in(0,T]}\left\{\frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}}\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} < \infty, \quad 0 < p \leqslant 1; \tag{32}$$

$$\left(\int_0^T\left(\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\frac{v(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{33}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. $u \in C(\mathbb{R}^n)$*;*

2. Если $0 < p \leqslant 1$*, то существует* $c_3 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что при* $0 < t < T$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 A_p(t)\|u\|_{H^G_{\Lambda^p(v)}}, \tag{34}$$

где

$$A_p(t) = \sup_{\xi\in(0,t)}\left\{\frac{1}{V(\xi)^{\frac{1}{p}}}\int_0^\xi \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{35}$$

3. Если $1 < p < \infty$*, то существует* $c_4 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что при* $0 < t \leqslant T$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_4 D_p(t)\|u\|_{H^G_{\Lambda^p(v)}}, \tag{36}$$

где

$$D_p(t) = \left[\int_0^t\left(\int_0^\xi \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} + \left(\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} V(t)^{-\frac{p'}{p}}\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{37}$$

Параграф 2.3. ***Доказаны теоремы об оценке аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных функций.***

Определение 2.3.1.[15] *Для (квази)нормированного функционального пространства X на $\mathbb{R}^n$, с $X \hookrightarrow C$, его оболочкой модулей непрерывности $\xi_C^X : (0,\infty) \to (0,\infty]$ назовем функцию*

$$\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega(f,t)}{t}, \quad t > 0, \tag{38}$$

где $\omega(f,t) = \sup\limits_{|h| \leqslant t} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |(f+h) - f(x)|$, $t > 0$.

Определение 2.3.2.[15] *Мы также можем определить мажорантную функцию*

$$e^X(t) = t\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \omega(f,t), \quad t \geqslant 0, \tag{39}$$

неотрицательная, монотонно возрастающая функция. Кроме того, можно также рассмотреть оболочку модулей гладкости, адаптированную к модулям гладкости более высокого порядка,

$$\xi_{C,k}^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega_C^k(f,t)}{t^k} = t^{-k} e_k^X(t), \quad t \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

В частности, мы обозначаем $\xi_{C,1}^X = \xi_C^X$. Мы хотим сосредоточиться на связи между оболочками непрерывности и аппроксимативными числами компактных вложений. Напомним вкратце это понятие.

Определение 2.3.3.[15] *Пусть A_1, A_2 — два банаховых пространства и пусть $T \in L(A_1,A_2)$ — линейный и непрерывный оператор из A_1 в A_2. Аппроксимативные числа оператора T определяются выражением:*

$$a_m = \inf\Big\{ \|T - S\| : \ S \in L(A_1,A_2), \ \operatorname{rank} S < m \Big\}. \tag{41}$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ некоторая ограниченная область, X — некоторое функциональное пространство на $\mathbb{R}^n$, а $X(\Omega)$ — сужение $X(\mathbb{R}^n)$ на Ω. Предположим, что $X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$. Тогда существует $c > 0$ такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$, см.[15,16]

$$a_{m+1}\Big(id : X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c m^{-\frac{1}{n}} \xi_{C,k}^X\Big(m^{-\frac{1}{n}}\Big). \tag{42}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть $E = \Lambda^p(v)$ — пространство Лоренца и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая ограниченная область. Здесь мы сохраняем введенные выше обозначения и предполагаем, что выполнены условия Теоремы 2.2.1. Тогда, есть следующие оценки.*

[15] *Akhieser N. I.* Vorlesungen über Approximations Theorie. Berlin, German : Akademie-Verlag, 1953.

[16] *Haroske D.* Envelopes and Sharp Embeddings of Function Spaces // CRC Research Notes in Mathematics. Vol. 437. Boca Raton, FL : Chapman & Hall/CRC, 2007.

1. *Если* $0 < p \leqslant 1$, *то существует* $c_0 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_0 A_p\Big(m^{-1}\Big); \tag{43}$$

2. *Если* $1 < p < \infty$, *то существует* $c_1 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_1 D_p\Big(m^{-1}\Big). \tag{44}$$

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [2; 3] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **Главе 3** установлены условия локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

В **третьей главе** исследуются свойства спектральных разложений обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса в ряды по собственным функциям оператора Лапласа в произвольных областях многомерного евклидова пространства. Установлен критерий квадратичной суммируемости потенциалов, который необходим для построения разложений. Исследованы условия локализации спектральных разложений. Их выполнение основано на оценках, связывающих установленные ранее свойства равномерных модулей непрерывности потенциалов с функциональными характеристиками метода суммирования спектральных разложений. Рассмотренный метод суммирования существенно обобщает классический метод средних Рисса.

Параграф 3.1. ***Обоснование свойств локализации***.

Пусть $\mathbb{R}^n$ мерное евклидово пространство и при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}; & 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \big\{|f(x)|\big\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{45}$$

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, $(-\hat{\Delta})$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа в n-мерной области F, $y(x,t)$ — упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(F)$ относительно $(-\hat{\Delta})$, $\mathrm{d}\rho(t)$ — соответствующая спектральная мера, а $\big\{y_i(x,t)\big\}_{i=1}^m$ — система собственных функций. Таким образом, при любом фиксированном $t \geqslant 0$,

$$y_i(x,t) \in C^\infty(F) \cap L_2(F), \quad \Delta y_i(x,t) + t^2 y_i(x,t) = 0, \quad x \in F. \tag{46}$$

Здесь $m \leqslant \infty$ — кратность представления. Для каждого $u \in L_2(F)$ определены преобразования Фурье

$$\hat{u} := \big\{\hat{u}_i(t)\big\}_{i=1}^m, \hat{u}_i(t) = \int_F u(x) y_i(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

и спектральное разложение по системе $y(x,t) := \left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^{m}$

$$S_\mu(u,x) = \int_0^\mu \hat{u}(t) y(x,t)\,\mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{47}$$

$$\hat{u} y = \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i y_i.$$

Пусть $s > 0$ и ψ — функция на $(0,1]$ со свойствами: $0 < \psi \downarrow$ при $(0,1]$ и $\psi(t) \cong \psi(\tau)$, если $t \cong \tau$. Кроме того, для $s > 0$ положим $s_0 = s$ если $s \leqslant 1$; $s_0 = 1$, если $s > 1$ и потребуем, чтобы

1. $$\psi_{s_0}(t) = \int_0^t \tau^{s_0 - 1} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in (0,1], \tag{48}$$
2. $$\psi \in C^2(0,1); \quad \left|\psi'(\tau)\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-1}, \quad \left|\psi(\tau)''\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-2}, \quad \tau \in (0,1], \tag{49}$$
3. $$\int_0^1 (1-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Gamma(s). \tag{50}$$

Определим γ как s-й интеграл Римана–Лиувилля.

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^t (t-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,1]. \tag{51}$$

Введем γ-средние спектрального разложения как

$$\sigma_\mu^\gamma(u,x) = \int_0^\mu \hat{u}(t) y(x,t) \gamma\left(1 - \frac{t^2}{\mu^2}\right) \mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{52}$$

для $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$. Мы видим, что $\gamma(1) = 1$ и если $\psi(\tau) \equiv \Gamma(s+1)$, $\tau \in (0,1]$, $\gamma(t) = t^s$, то γ-средние сводятся к классическим средним Рисса порядка s, см.[4,5].

Мы определяем

$$\omega_0(t) = \frac{t^{\frac{n-1}{2} + s_0 - s}}{\psi_{s_0}(t)}, \quad t \in (0,1].$$

Пусть α, $\beta \geqslant 0$ такие, что

$$\frac{n-2}{2} - s < \alpha \leqslant \beta < \min\left\{\alpha + \frac{3}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\}.$$

Пусть функция ω удовлетворяет условиям

$$\omega \in C[0,1], \quad \omega(t)t^{-\alpha} \uparrow, \quad \omega(t)t^{-\beta} \downarrow \text{ на } (0,1],$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\omega(t)}{\omega_0(t)} = 0.$$

Параграф 3.2. ***Необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.***

Определение 3.2.1. *Пусть k, $n \in \mathbb{N}$; $R \in \mathbb{R}_+$. Говорят, что функция Φ принадлежит классу $\mathfrak{I}_{k,n}(R)$, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $0 < \Phi \downarrow$ on $(0,R)$; $\exists\, c \in \mathbb{R}_+$ такой, что

$$\int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\,\Phi(r)r^n, \quad r \in (0,R); \quad \int_R^\infty \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho < \infty.$$

2. $G(x) := \Phi(|x|) \in C^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, и для

$$G_k(x) := \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha G(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},$$

справедлива оценка: для некоторых $c_1 \in \mathbb{R}_+$

$$|G_k(x)| \leqslant c_1\Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\};$$

где $\Psi_k \in C(\mathbb{R}_+)$, $T = V_nR^n$

$$\varphi_k(\tau) := \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \tau^{-k/n}\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,T];$$

$$\int_T^\infty \varphi_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнены обозначения и предположения (1), (2), (11), и $G(x) = \Phi(|x|) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(|x|) \in \mathfrak{I}_{k,n}(R)$, $V(\infty) = \infty$ и более того*

$$B_p := sup\left[t^{\frac{1}{2}}V(t)^{\frac{-1}{p}} \;:\; t \in \mathbb{R}_+\right] < \infty, \quad 0 < p \leqslant 2;$$

$$B_p := \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{2}}V(t)^{\frac{-1}{p}}\right]^s \frac{v(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)}\right)^{\frac{1}{s}} < \infty, \quad 2 < p < \infty, \quad s = \frac{2p}{p-2}.$$

Тогда для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ имеется вложение пространства обобщенных бесселевых потенциалов

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n).$$

Параграф 3.3. ***Сформулируем результат об условиях локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.***

Пусть $H^G_E(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщенных Бесселевых потенциалов с $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$. Мы предполагаем, что справедливы обозначения и предположения Теоремы 2.2.1 и параграфа 3.1.

Теорема 3.3.1. *Пусть выполнены условия Теоремы 3.2.1 и пусть D, F — области в $\mathbb{R}^n$, и $D \subset\subset F$.*

$$\lim_{t\to+0} \frac{A_p(t^n)}{\omega_0(t)} = 0; \quad \textit{при} \quad 0 < p \leqslant 1, \quad \lim_{t\to+0} \frac{D_p(t^n)}{\omega_0(t)} = 0; \quad \textit{при} \quad 1 < p < \infty,$$

где $\omega_0(t) = \dfrac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_0(t)}$, $t \in (0,1]$. *Кроме того, пусть*

$$u \in H^G_E(\mathbb{R}^n); \quad u(x) \equiv 0, \quad x \in D, \tag{53}$$

тогда для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma^\gamma_\mu(u,x) = 0. \tag{54}$$

Пример 3.3.1. *Для γ-средних Рисса порядков s, где $0 < s < (n-1)/2$, мы полагаем что $\psi(\tau) = c$, $c \in \mathbb{R}_+$, тогда $\psi_{s_0}(t) = ct^{s_0}$, и получаем, что $\omega_0(t) = \frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}$. Тогда принцип локализация принимает вид*

$$\lim_{t\to+0} \frac{A_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \textit{при} \quad 0 < p \leqslant 1, \quad \lim_{t\to+0} \frac{D_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \textit{при} \quad 1 < p < \infty,$$

$$u \in H^G_E(\mathbb{R}^n); \quad u(x) \equiv 0, \quad x \in D. \tag{55}$$

Для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma^\gamma_\mu(u,x) = 0. \tag{56}$$

Замечание 3.3.1. *Заметим, что функции $\Phi \in \mathfrak{I}_{k,n}(R)$ могут обладать свойством*

$$\Phi(\rho) = 0, \quad \rho \in [2R,\infty). \tag{57}$$

Таким образом, случай ядер с компактным носителем включен в нашу схему.

Замечание 3.3.2. *Заметим, что если ядро G обобщенных бесселевых потенциалов имеет компактный носитель на $B_{2R} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2R\right\}$, см. условие (57), то для $u \in H^G_E(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u(x) = (G * f)(x) \equiv 0, \quad x \in D,$$

если функция $f \in E(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in D^{2R} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \rho(x,D) < 2R\right\},$$

где

$$\rho(x,D) = \inf\left\{|x-y| \,:\, y \in D\right\},$$

расстояние от x до D.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. исследованы дифференциальные свойства обобщенных потенциалов Бесселя;
2. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций;
3. исследованы критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. описаны точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
5. оценены аппроксимативные числа оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
6. получены необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
7. получены условия локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 3—12.
2. *Alkhalil N.* Estimates for continuity envelopes and approximation numbers of Generalized Bessel potentials over Lorentz space // Annals of R.S.C.B. — 2021. — Vol. 25, no. 2. — P. 1201—1206.
3. *Alkhalil N. H.* Modulus of continuity for Bessel type potentials over Lorentz space // Eurasian Math. J. — 2021. — Vol. 12, no. 2. — P. 10—18.
4. *Goldman M.*, *Alkhalil N.* On Spectral Decomposition of Generalized Bessel Potentials // Advances in Systems Science and Applications. — 2020. — Vol. 21, no. 3. — P. 22—30.

5. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340—349.

6. *Alkhalil N.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя // 8th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII». — 2018. — С. 31—32.

7. *Альхалиль Х. Н.* Об оценке равномерного модуля непрерывности потенциала для локализации γ-средних его спектрального разложенияоб оценке равномерного модуля непрерывности потенциала для локализации γ-средних его спектрального разложения // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019.

8. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* Условия локализации спектральных разложений для обобщённых потенциалов Бесселя // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 74—75.

9. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича–Лоренца // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 30—31.

10. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь, 04.2020. — С. 7—8.

11. *Альхалиль Х. Н.* Оценки равномерных модулей непрерывности в пространстве потенциалов // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020.

12. *Альхалиль Х. Н.* Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя на весовых пространствах Лоренца // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021.

Хамадех Альхалиль Нисрин

Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса

Аннотация

В работе рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами. Построены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца. Установлены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций. Описаны точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца. Установлены необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство L_p. Построена условии Локализации γ-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

Homadeh Alkhalil Nisreen

Differential properties of generalized potentials Bessel–Riesz

Abstract

In this work the general properties of potentials constructed on the basis of weighted Lorentz spaces with common weights are studied. Criteria for embedding the space of potentials into the Calderón space are constructed. A concretization of these embeddings is given in the case of basic weighted Lorentz spaces. Exact (in order) estimates for the uniform moduli of continuity of potentials are established in the case of embedding the space of potentials into the space of continuous bounded functions. Order-exact estimates for uniform moduli of continuity of potentials are described in the case of basic weighted Lorentz spaces. Necessary and sufficient conditions are established for the embedding of the space of potentials into the space L_p. The Localization condition for γ-means of the spectral expansion of the generalized Bessel potential is constructed in the case of basic weighted Lorentz spaces.

Хамадех Альхалиль Нисрин

Дифференциальные свойства
обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ____