

Российский государственный аграрный университет –
МСХА имени К. А. Тимирязева

На правах рукописи

ПАВЛОВ Александр Егорович

**ГАМИЛЬТОНОВА ДИНАМИКА
ГРАВИТАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

1.3.3 Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант д.т.н., профессор, С.М. Гайдар

Москва — 2023

Оглавление

Введение	4
1 Геометрия вложенных гиперповерхностей	23
1.1 Слоение пространственно-временного континуума	23
1.1.1 Отображение Вайнгартена	28
1.1.2 Соотношения Гаусса, Кодацци и Риччи	31
1.1.3 Гамильтонова связь и импульсные связи	36
1.2 Конформное разложение	37
1.2.1 Конформная метрика и конформная связность	37
1.2.2 Конформное разложение внешней кривизны	40
1.3 Вариационный функционал АДМ	44
1.3.1 Двумерная R^n -гравитация	48
1.3.2 Вариационный комплекс Де Рама	52
1.4 Выводы	56
2 Время в Геометродинамике	58
2.1 Многострелочное время в Геометродинамике	59
2.2 Внутреннее глобальное время	61
2.3 Внешнее глобальное время	79

2.4	Выводы	85
3	Интерпретации современной диаграммы Хаббла	86
3.1	Уравнение Фридмана в классической космологии	88
3.2	Конформные теории гравитации	99
3.3	Уравнение Фридмана в конформной космологии	102
3.4	Сравнительный анализ моделей	108
3.5	Экстраполяция диаграммы Хаббла	111
3.6	Выводы	116
4	Скрытые симметрии миксмастерной модели	118
4.1	Показатели Ковалевской миксмастерной модели	119
4.2	Псевдоевклидовы обобщённые цепочки Тоды	130
4.3	Алгебры Каца – Муди	133
4.4	Миксмастерная модель Луи Виттена	138
4.5	Выводы	147
5	Квантовые поля в конформной космологии	148
5.1	Потенциал Хиггса	148
5.2	Радиационное нарушение конформной симметрии	151
5.3	Казимировский конденсат скалярного поля	156
5.4	Казимировский конденсат биспинорного поля	163
5.5	Уравнение состояния казимировского вакуума	173
5.6	Выводы	179
	Заключение	181
	Список литературы	182

Введение

В своей замечательной книге лауреат Нобелевской премии по физике Стивен Вайнберг [1] рассматривает проблемы Гenezиса согласно законам классической космологии. Он даёт следующие из этих законов предсказания жизни Вселенной:

“Как бы не разрешились все эти проблемы и какая бы космологическая модель ни оказалась правильной, ни в одной мы не находим утешения. Для человеческих существ почти неизбежна вера в то, что мы имеем какое-то особое отношение к Вселенной и что человеческая жизнь есть не просто более или менее нелепое завершение цепочки случайностей, ведущей начало от первых трёх минут, а что наше существование было каким-то образом predetermined с самого начала. Случилось так, что, когда я писал это, я находился в самолёте по дороге домой из Сан-Франциско в Бостон, и летел на высоте 30 000 футов над Вайомингом. Земля подо мной выглядела очень нежной и уютной—лёгкие облачка здесь и там, снег, ставший ярко-розовым, когда садилось Солнце, дороги, лентами протянувшиеся по всей стране от одного города к другому. Очень трудно осознать, что всё это—лишь крошечная часть ошеломляюще враждебной Вселенной. Ещё труднее представить, что эта сегодняшняя Вселенная развилась из невыразимо незнакомых на-

чальных условий и что ей предстоит будущее угасание в бескрайнем холоде или невыносимой жаре. Чем более постижимой представляется Вселенная, тем более она кажется бессмысленной. Но если и нет утешения в плодах нашего исследования, есть, по крайней мере, какое-то утешение в самом исследовании. Мужчины и женщины не склонны убаюкивать себя сказками о богах и великанах или замыкаться мыслями в повседневных делах; они строят телескопы, спутники и ускорители и нескончаемые часы сидят за своими столами, осмысливая собранные данные. Попытка понять Вселенную—одна из очень немногих вещей, которые чуть приподнимают человеческую жизнь над уровнем фарса и придают ей черты высокой трагедии”.

Одним из последних актов этой трагедии явились драматические события последних лет в космологии и физике элементарных частиц. Это открытие ускоренного расширения пространства Вселенной и интригующе малое значение массы бозона Хиггса. Эти события, если они, действительно, имеют место, подвергают сомнению или оставляют без всякой надежды на успех множество направлений современных теоретических исследований. В последние годы двумя независимыми коллаборациями “High-z Supernova Search Team” и “The Supernova Cosmology Project” были получены новые данные о современной космической эволюции на очень больших расстояниях – сотни и тысячи мегапарсек, что выражается в значениях красного смещения $z = 1 \div 1.7$ [2, 3, 4]. Оказалось, что убывание яркости с увеличением расстояния в среднем происходит заметно быстрее, чем это следовало ожидать согласно стандартной теории расширяющейся Вселенной. Сверхновые находятся на расстоянии боль-

шем, чем предсказывалось, следовательно, космологическое расширение в последний период происходит с ускорением [5, 6, 7]. Динамика по неизвестным причинам перешла от стадии замедления к стадии ускоренного расширения. Полученные космологические данные подвергаются критическому анализу (см., например, [8] – [12]) и тщательной статистической обработке [13] – [16]).

Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что наша Вселенная заполнена в основном не массивной пылью галактик, не способной обеспечить ускоренного расширения, а неким загадочным веществом другой природы – “тёмной энергией”. Космическое ускорение на данном этапе обеспечивается некой гипотетической субстанцией, названной квинтэссенцией. Этот термин заимствован из Древней Греции, когда философы строили картину мира из пяти стихий: земли, воды, воздуха, огня и квинтэссенции—космической субстанции, из которой, как считалось, состоят небесные тела. Теперь под этим понимается особая форма космической энергии. Квинтэссенция создаёт отрицательное давление (антигравитацию) и ведёт к ускоренному расширению. В классической космологии приходится в очередной раз, для спасения ситуации, вводить в уравнения Эйнштейна Λ -член.

Классификация наблюдательных и экспериментальных данных, согласно Копернику, оказывается достаточно простой, если выбрать, вместо геоцентрической, гелиоцентрическую систему отсчёта. Упрощение, достигнутое Коперником, помогло Галилею, Кеплеру и Ньютону сформулировать законы небесной механики. С формальной точки зрения, все системы отсчёта равноправны. Согласно Альберту Эйнштейну и Леопольду Инфельду [17], если бы люди понимали относительность, не было

бы драматических событий в истории человечества, связанных со средневековым представлением о Земле как центре мироздания. Но в каждой конкретной проблеме существует привилегированная система отсчёта, в которой суть проблемы проясняется за счёт упрощения.

Говоря о загадочной природе тёмной энергии и тёмной материи, мы подразумеваем, что данные понятия не вписываются в классификацию полей по неприводимым представлениям группы Лоренца или Пуанкаре в какой-либо системе отсчёта [18]. Известные физические законы природы можно получить из соответствующей группы симметрии [19]. История систем отсчёта, начиная с Птолемея и Коперника, имеет более древнюю историю, чем история создания уравнений эволюции полей. Проследим историческую последовательность использования групп симметрии в физике. Группа Галилея описывает переходы в классе инерциальных систем отсчёта в евклидовом пространстве; шести-параметрическая группа Лоренца описывает вращения и бусты в пространстве Минковского; группа Пуанкаре, включая группу Лоренца как подгруппу, дополняется четырьмя трансляциями в пространстве-времени; аффинная группа линейных трансформаций состоит из группы Пуанкаре и десяти симметрических собственно аффинных преобразований; группа Вейля включает в себя группу Пуанкаре, дополненную масштабными преобразованиями; пятнадцати-параметрическая группа конформных преобразований включает в себя группу Вейля и дополняется четырьмя инверсионными преобразованиями.

В случае космологии, есть всего две возможности выбора единиц измерения длин геометрических интервалов – абсолютные единицы, когда

длины интервалов

$$\gamma = \gamma_{ik}(t, \mathbf{x}) dx^i \otimes dx^k$$

измеряются энергетической шкалой, и относительные, когда подобное измеряется подобным, то есть интервалы

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{ik}(t, \mathbf{x}) dx^i \otimes dx^k$$

интервалами, а энергии – энергиями [20]. В случае выбора абсолютных единиц пространство расширяется, а размеры космических объектов остаются неизменными. В случае выбора относительных единиц пространство остается неизменным, а размеры космических объектов уменьшаются. Обе эти возможности обсуждаются в книге Александра Фридмана [21], посвященной космологии. Он связывает вторую возможность с принципом масштабной инвариантности законов природы. Фридман находит следующие замечательные слова о принципе масштабной инвариантности:

В период после создания Специальной Теории Относительности, в течение десятилетия, Альберт Эйнштейн искал математическую формулировку теории гравитации, расширяя группу симметрии Пуанкаре СТО до группы общих преобразований координат. Поиск ковариантного описания привёл к формулировке теории в тензорной форме. Теория гравитации была им названа Общей Теорией Относительности. В названии был отражён главный руководящий эвристический принцип, приведший к искомой релятивистской теории гравитации. После создания теории, в период переосмысления её основ [22], группа обекординатных преобразований приобрела статус калибровочной группы симметрии как в современных калибровочных теориях. Группа общих преобразований в

ОТО используется для описания взаимодействий, в то время как группа Пуанкаре служит для классификации свободных полей.

Для определения инвариантных относительно диффеоморфизмов наблюдаемых, и тем самым устранения калибровочного произвола в решениях уравнений теории, необходимо отделить общекоординатные преобразования (которые играют роль калибровочных) от лоренцевых. Решение задачи об отделении общекоординатных преобразований от релятивистских преобразований систем отсчёта было предложено Владимиром Фоком [23] в работе по введению спинорных полей в риманово многообразии. Фактически, вместо метрического тензора, Фоком были введены тетрады, определяемые как “квадратный корень” из метрического тензора, с двумя индексами. Один индекс относится к риманову многообразию, которое является базовым, а второй – к касательному пространству Минковского.

Согласно *теореме Огиевецкого* [24], инвариантность относительно бесконечнопараметрической общекоординатной группы преобразований эквивалентна инвариантности относительно аффинной и конформной групп вместе. Теорема говорит о том, что *любая теория, инвариантная одновременно относительно специальной линейной $SL(4, \mathbb{R})$ и конформной групп, будет инвариантна и относительно группы общекоординатных преобразований*. Идея доказательства теоремы строится на замечании, что бесконечномерная алгебра общих преобразований координат является замыканием вышеназванных конечномерных алгебр. Генератор собственно-конформных преобразований в пространстве координат

$$K_\mu = -i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu(x\partial))$$

квадратичен по координатам. Результат его коммутации с генератором группы специальных линейных преобразований

$$R_{\mu\nu} = -ix_\mu\partial_\nu$$

также будет квадратичен по x . Далее, коммутируя результирующие операторы между собой, мы приходим к операторам третьей степени по x и так далее. Таким путём мы последовательно получаем все генераторы группы произвольных гладких преобразований координат $\delta x_\mu = f_\mu(x)$, параметрами которой являются коэффициенты разложения функций $f_\mu(x)$ в ряд по степеням координат. Алгебра этой группы имеет бесконечное число генераторов

$$L_\mu^{n_0 n_1 n_2 n_3} = -ix_0^{n_0} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \partial_\mu.$$

Тем самым открывается новый подход к формулировке теории тяготения, поскольку структура конечнопараметрических групп принципиально проще структуры группы всех возможных преобразований координат. Эйнштейновская теория гравитационного поля может быть представлена как теория со спонтанным нарушением аффинной и конформной симметрий, аналогично киральной динамике как теории спонтанного нарушения киральной симметрии. В этом подходе гравитон играет роль голдстоуновского поля [25, 26].

Значительный вклад в понимание современных проблем теоретической физики внесён группой В. Н. Первушина [27] – [43]. В работах сотрудников развивалась единая теория как синтез Стандартной модели элементарных частиц и Общей Теории Относительности Эйнштейна путём замены всех масс, включая массу Планка, единым скалярным ди-

латонным полем. При этом закон Хаббла объясняется эволюцией дилатонных масс, а не расширением измеряемых длин во Вселенной, что в стандартной космологии соответствует выбору относительного эталона измерения расстояний. Было обнаружено, что космическая эволюция масс ведёт к захвату космических объектов центральным полем и даёт механизм образования галактик и их скоплений.

Значительный прогресс в наблюдательной космологии вызван современными достижениями в измерительных технологиях [44, 45]. Изучение содержания эйнштейновской теории гравитации вовлекает всё новые области математики: тензорный анализ, теория групп, теория дифференциальных форм, функциональные формы, дифференциальная геометрия, топология, теория слоений, мероморфные функции комплексного времени, конформная геометрия, функциональный анализ, бесконечномерные алгебры Каца – Мути, симплектическая геометрия. Исследование динамики гравитационного поля основывается на гамильтоновом формализме [46, 47, 48].

Актуальность темы

В XXI веке интерес научного сообщества к фундаментальной науке подтверждается последними наградами за открытия в области макромира и микромира.

- В 2011 году Нобелевская премия присуждена

“за открытие ускоренного расширения Вселенной посредством наблюдения дальних сверхновых.”

- В 2013 году Нобелевская премия присуждена

“за теоретическое открытие механизма, объясняющего проис-

хождение масс субатомных частиц.”

- В 2017 году Нобелевская премия присуждена

“за решающий вклад в детектор LIGO и наблюдение гравитационных волн.”

- В 2020 году Нобелевская премия присуждена

“за открытие того, что образование чёрных дыр с необходимостью следует из общей теории относительности.”

Кризис стандартной космологии даёт нам повод для переосмысления положений, на которых она основывается. В создавшейся критической ситуации новые наблюдательные данные являются вызовом теоретической космологии. Этот вызов рассматривается как возможность построить космологическую модель, объясняющую всю совокупность доступных нам современных наблюдательных фактов не на уровне новых механизмов и соответствующих им динамических законов, а на уровне уже давно известных фундаментальных принципов относительности и симметрии.

Цель диссертационной работы

Целью данной работы является анализ задач Общей Теории Относительности с учётом современных потребностей интерпретации наблюдательных данных о Вселенной. Для достижения этой цели были поставлены задачи построения гамильтоновых потоков гравитационного поля во внутреннем глобальном времени и во внешнем глобальном времени; исследования гамильтоновой классической динамики и квантовой динамики космологических моделей; описание космологической сингулярности

на примерах миксмастерной модели; изучения характеристик казимировского вакуума квантовых полей.

Научная новизна

1. Впервые исследована двумерная гравитационная модель методом построения вариационного комплекса Де Рама.
2. Впервые получена нелинейная пуассонова структура фазового пространства Геометродинамики и построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.
3. Доказана теорема о производной неявно заданной функции в банаховом пространстве и впервые построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внешнем глобальном времени.
4. Впервые получены точные решения уравнения Фридмана для классической космологии и конформной космологии в мероморфных функциях Вейерштрасса и Якоби.
5. Впервые вычислены показатели Ковалевской миксмастерных моделей и получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке, применимая для псевдоевклидовых цепочек Тоды. Впервые показано, что миксмастерные модели ассоциируются с алгебрами Борхердса.
6. Впервые вычислены казимировские квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Впервые получены уравнения состояния казимировского ва-

куума бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой все-ленной Фридмана.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая ценность работы заключается в исследовании гравитационных задач методами современной математики. Функции Вейерштрасса, бесконечномерные алгебры Каца – Муди, конформная геометрия, пространство Тейхмюллера конформных структур, когомология Де Рама функциональных пространств, аналитические функции комплексного времени являются неотъемлемой частью математического аппарата исследования гравитации Эйнштейна.

Практическая значимость работы заключается в поиске интерпретации новых данных о Вселенной, полученных современными коллаборациями, с помощью расширения группы симметрии теории без введения экзотических состояний материи; в обосновании механизма спонтанного нарушения конформной симметрии без введения феноменологического потенциала Хиггса Стандартной модели элементарных частиц.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов основывается на использовании математического аппарата Общей Теории Относительности и квантовой теории поля, корректном использовании математических методов, а также на согласованности результатов, полученных в диссертации, с известными результатами, принятыми в научном сообществе.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- 1-я и 2-я Российские Университетско – академические научно - практические конференции, Удмуртский государственный университет, Ижевск, 1993, 1995.
- Международная конференция “Геометризация физики – III”, Казанский государственный университет, Казань, 1997.
- I-я, II-я Российские школы – семинары “Современные проблемы теории гравитации и космологии” – GRACOS, Татарский государственный гуманитарно – педагогический университет, Яльчик – Казань, 2007, 2009.
- XXI-я, XXII-я международные балдинские конференции по физике высоких энергий, Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, 2012, 2014.
- Международная научная конференция “Фридмановские чтения”, Пермский государственный университет, Пермь, 2013.
- 15-я Российская гравитационная конференция, Казанский федеральный университет, Казань, 2014.
- Международная конференция “Физические интерпретации теории относительности” PIRT – 2015, 2017, Московский государственный технический университет, Москва, 2015, 2017.
- XII-th International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, 2015.
- XXIV-th International Colloquium “Integrable Systems and Quantum Symmetries”, Czech Technical University, Prague, Czech Republic, 2016.
- 59-я Всероссийская научная конференция, посвящённая юбилею МФТИ, Московский физико - технический институт, Долгопрудный, 2016.
- 2-я Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космо-

логии и астрофизике “Петровские чтения – 2016”, Казанский федеральный университет, Казань, 2016.

- Международная научная конференция, посвящённая 130-летию Н. И. Вавилова, РГАУ - МСХА, 2017.

- XIV-я международная конференция “Финслеровы обобщения теории относительности” (FERT-2018), Российский университет дружбы народов, Москва, 2018.

- 10-th Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology, St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 2019.

- 4-th Symposium on the Casimir Effect, St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 2019.

- 3-rd Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology, Kazan Federal University, Kazan, 2019.

- XVI-я Международная конференция “Финслеровы обобщения теории относительности” (FERT-2020), Российский университет дружбы народов, Москва, 2020.

- LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Российский университет дружбы народов, Москва, 2021.

- XVII-я Международная конференция “Финслеровы обобщения теории относительности” (FERT-2021), Российский университет дружбы народов, Москва, 2021.

Личный вклад

Все изложенные в диссертации результаты получены самим автором, либо при его непосредственном участии. Автор признателен профессору В. Н. Первушину (ОИЯИ, Дубна) за постановку задач и обсуждения.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 66 печатных изданиях, 25 из которых изданы в работах, рекомендованных ВАК. В наукометрическую базу цитирований SCOPUS входит 21 статья. В тезисах докладов международных конференций и препринтах издана 41 работа.

Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 209 страниц с 19 рисунками. Список цитируемой литературы содержит 207 наименований.

Глава 1. Геометрия вложенных гиперповерхностей.

Вводятся основные понятия и обозначения геометрии вложенных гиперповерхностей, которые понадобятся для дальнейшего изложения материала диссертации. Лагранжева формулировка теории гравитации является ковариантной. Для анализа динамики гравитационного поля требуется перейти к гамильтоновой формулировке, для чего следует провести $(3+1)$ - разбиение пространства - времени, основываясь на теоремах Вайнгартена, Гаусса, Кодацци, Риччи. Динамика пространства описывается его геометрическими характеристиками. Для выявления физических переменных следует воспользоваться теоремами конформной геометрии гиперповерхностей, ввести понятия конформной метрики, конформной связности. Конформный поперечно-бесследовый метод, применённый к тензорам, заданным на искривлённых гиперповерхностях, позволяет выделить динамические поперечные компоненты гравитационного поля.

В качестве нетривиального примера изучена динамическая полевая

система со связями, лагранжиан которой представляет собой гауссову кривизну двумерного пространства – времени в n -й степени. Поскольку задача представляет собой динамическую систему с высшими производными, для перехода к гамильтоновой форме, применён обобщённый метод Остроградского. Для исследования задачи оказался эффективен математический аппарат теории вариационных комплексов, являющийся обобщением дифференциальных комплексов Де Рама. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс на пространстве функциональных форм. Показано, что функциональная форма ω^1 , обобщение дифференциальной формы Картана, является не только замкнутой формой, она оказывается точной. Тем самым доказано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. С физической точки зрения получается, что функционал действия не задаёт какой-либо динамической задачи.

Глава 2. Время в Геометродинамике.

Геометродинамика есть теория пространства и времени по своей сущности. Пространственная метрика несёт информацию о внутреннем времени. Внутреннее время в космологических моделях строится из внутренних характеристик самого пространства. Внутреннее время должно быть скаляром относительно диффеоморфизмов изменения координат пространства. Переход к конформным переменным Дирака означает переход к физическим переменным. Эйнштейновская теория гравитации была представлена в гамильтоновой форме более полувека назад. Поль Дирак заявил, что четырёхмерная симметрия не является фундаментальным свойством физического мира. Вместо пространственно-временных преобразований следуют канонические преобразования фазо-

вого пространства переменных. АДМ формализм был разработан Ричардом Арновиттом, Стенли Дезером и Чарлзом Мизнером в 1959 году. В АДМ формализме пространство-время с интервалом расслаивается на семейство пространственно-подобных гиперповерхностей Σ_t , нумеруемых временной координатой t , с координатами на каждом слое (x^1, x^2, x^3) . Проблема Коши в ОТО успешно была решена в конформных переменных, поскольку они являются физическими. Внутреннее локальное время в Геометродинамике вводится с помощью обобщённого отображения Дирака. Добавляя в теорию фоновую метрику, получаем локальное время как скалярное поле.

Глобальное внешнее время определяется как среднее по гиперповерхности двух третьих плотности импульса гравитационного поля. Кано-нически сопряжённой характеристикой – гамильтонианом является объём гиперповерхности. Экспериментально фиксируемое красное смещение галактик тому подтверждение. В космологии внешнее время пропорционально параметру Хаббла. Времени как такового, в отличие от пространства, не существует в Природе. Изменчивость процессов служит мерилем времени. Время Йорка определяется как четыре третьих следа тензора внешней кривизны гиперповерхности. При выборе слоения постоянной средней кривизны (слоения Йорка) отщепляются продольные компоненты гравитационного поля.

Глава 3. Интерпретации современной диаграммы Хаббла.

Уравнения Фридмана в космологии получаются с помощью структурных уравнений Картана. Функции Вейерштрасса и Якоби, традиционно применяемые в классической механике и астрономии, находят своё естественное приложение и в теоретической космологии. Соотношения: кон-

формный возраст – красное смещение, и эффективная звёздная величина – красное смещение, являющиеся базисными формулами в наблюдательной космологии, выражаются явно через мероморфные функции. Вместо интегральных формул и численных расчётов, которые традиционно используются в космологии, мы применяем формулы, выражающиеся с помощью высших трансцендентных функций, которые удобны в использовании, поскольку встроены в компьютерный пакет MATHEMATICA. The Hubble Space Telescope cosmological supernovae Ia коллаборация представила данные по большим красным смещениям. Подходы классической и конформной космологий демонстрируют фитирование диаграммы Хаббла с одинаковой точностью. Кривые Хаббла экстраполированы для больших значений красных смещений. Интерпретация с позиций конформной космологии предпочтительней, поскольку объясняет экспериментальные данные без Λ -члена. Вселенная статична в конформной космологии, что согласуется с концепцией Эйнштейна. В классической космологии для этого приходится искусственно вводить в уравнения Λ -член.

Глава 4. Скрытые симметрии миксмастерной модели.

Миксмастерная космологическая модель Мизнера рассматривается как псевдоевклидова обобщённая цепочка Тоды. Показано, что миксмастерная космологическая модель также принадлежит к динамическим системам Эйлера–Пуанкаре на некоторой разрешимой алгебре Ли. Это сразу даёт возможность использовать для анализа подход Харуо Йошиды. Получена обобщённая формула Адлера – ван Мёрбеке для псевдоевклидовых цепочек. Вычислены показатели Ковалевской рассматриваемой космологической модели. Доказано, что модель ассоциируется с алгеброй Борхердса. После отбрасывания трёх корней строится диаграмма

Дынкина, отвечающая системе простых корней матрицы Картана ранга три. Соответствующая алгебра ассоциирована с гиперболической алгеброй Каца — Муди, что говорит о хаотическом поведении модели вблизи сингулярности.

Рассмотрена многомерная космологическая модель миксмастерного типа Луи Виттена. Диаграмма Дынкина соответствует 9-мерной матрице Картана. Доказано, что соответствующая алгебра ассоциирована с лоренцевой алгеброй Каца — Муди, что свидетельствует о её регулярном поведении.

Глава 5. Квантовые поля в конформной космологии.

В данном разделе был предложен механизм радиационного нарушения конформной симметрии в Стандартной модели элементарных частиц. В такой конструкции конденсат топ — кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса. Механизм позволяет установить соотношение между конденсатами и массами, включая массу бозона Хиггса. Таким образом мы предложили простой бутстрап между полем Хиггса и полем топ — кварка. Заметим, что бозон Хиггса рассматривается как элементарная частица, без введения дополнительных взаимодействий за рамками Стандартной модели. После спонтанного нарушения симметрии, на древесном уровне лагранжиана отличие от потенциала Хиггса Стандартной модели проявляется только в значении константы самодействия. Эти тонкие различия можно выявить только с помощью новых данных, которые можно извлечь на Суперколлайдере после проведения работ по его обновлению.

Вычислены топологические казимировские квантовые конденсаты бозонного и биспинорного массивных полей. Переход к конформным пере-

менным позволил избежать нефизическую сингулярность, возникающую при $a = 0$. Перенормировки формально расходящихся рядов с помощью применения формулы Абеля – Плана приводят к конечным физическим результатам. Для вселенной Эйнштейна фоновым пространством является касательное плоское пространство. Получено уравнение состояния казимировского вакуума $p = w\epsilon$, причём коэффициент пропорциональности является функцией переменной массы частицы $w = w(ma)$. В области энергодоминантности её можно аппроксимировать полиномом второго порядка по бегущей массе.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1

Геометрия вложенных гиперповерхностей

1.1 Слоение пространственно-временного континуума

Рассмотрим пространство–время $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. В окрестности некоторой точки M введём координатную систему (x^α) (см. Рис. 1.1). Касательные к координатным линиям в точке M векторы ∂_α образуют натуральный базис касательного пространства $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$. Линейные формы определим как отображение

$$\begin{aligned}\omega : \mathcal{T}_M(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \omega, \mathbf{v} \rangle.\end{aligned}$$

Кокасательное пространство, образованное всеми линейными формами на M , обозначается $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$. Для натурального базиса ∂_α пространства

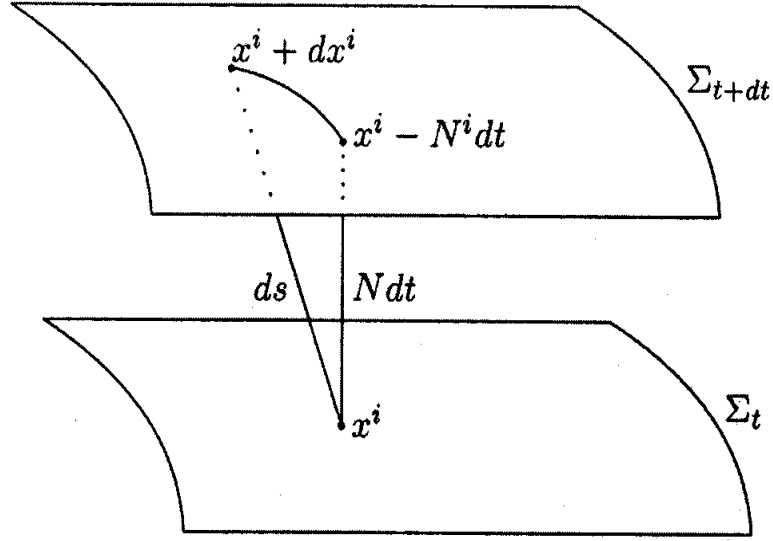


Рис. 1.1: ADM – слоение пространственно-временного континуума

$\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$ имеется базис (dx^α) , принадлежащий $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$, что

$$\langle dx^\alpha, \partial_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha.$$

Скалярное произведение двух векторов

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_M(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_M(\mathcal{M})$$

с метрикой пространства–времени \mathbf{g} определяется как

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu.$$

Действие линейных форм $\boldsymbol{\omega}$ на векторах \mathbf{v}

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_M^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \quad \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle = \omega_\mu v^\mu.$$

Метрика \mathbf{g} индуцирует изоморфизм между $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$ (векторы) и $\mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$ (линейные формы), который, в индексных обозначениях, соответствует

поднятию или опусканию индексов свёрткой с $g_{\alpha\beta}$ или $g^{\alpha\beta}$. Будем использовать символы из музыкальной нотации для безиндексного обозначения образов при метрическом изоморфизме:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \quad \langle \mathbf{u}^\flat, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v});$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{T}_M^*(\mathcal{M}), \quad \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{g}(\boldsymbol{\omega}^\sharp, \mathbf{v}).$$

Ковариантная производная по направлению ${}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\omega}$ есть 1-форма и мы имеем

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}(\mathcal{M}), \quad \langle {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle = {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v} \rangle,$$

где $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ есть пространство гладких векторных полей, $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$ есть пространство 1-форм на \mathcal{M} .

Для связи разных касательных пространств псевдориманова пространства вводится дополнительная структура – связность Леви–Чивита ${}^{(4)}\nabla$ как отображение

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\nabla : \mathcal{T}(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M}), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Аффинная связность Леви–Чивита согласована с метрикой пространства - времени

$${}^{(4)}\nabla \mathbf{g} = 0.$$

Далее мы определяем тензор кривизны Римана пространства-времени со связностью ${}^{(4)}\nabla$ как

$${}^{(4)}\mathbf{Riem} : \mathcal{T}^*(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}(\mathcal{M})^3 \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}),$$

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \boldsymbol{\omega}, {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}{}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}}{}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - {}^{(4)}\nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathbf{w} \rangle.$$

Здесь $C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ обозначает пространство гладких скалярных полей на \mathcal{M} . Тожество Риччи для тензора Римана

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{T}(\mathcal{M}), \quad ({}^{(4)}\nabla_\alpha ({}^{(4)}\nabla_\beta - ({}^{(4)}\nabla_\beta ({}^{(4)}\nabla_\alpha))w^\gamma = ({}^{(4)}R_{\mu\alpha\beta}^\gamma w^\mu. \quad (1.1)$$

Градиентная 1-форма $d\mathbf{t}$ нормальна к Σ_M . Гиперповерхность есть образ 3-мерного многообразия $\hat{\Sigma}$ как вложение $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathcal{M}$. Вложение означает, что $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ есть гомеоморфизм, то есть одно-однозначное отображение, такое, что оба Φ и Φ^{-1} непрерывны. Одно-однозначное отображение гарантирует, что Σ не “пересекает саму себя”. Гиперповерхность определена локально как область, для которой скалярное поле $t(M)$ на \mathcal{M} есть константа

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad M \in \Sigma, \quad t(M) = \text{const}.$$

Предположим, что Σ есть связное многообразие, принадлежащее \mathcal{M} . Гиперповерхность Σ_M определяется как поверхность уровня $t(M)$. Явная форма отображения Φ может быть получена в координатном виде, где $x^i = (x, y, z)$ – координаты на многообразии $\hat{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \Phi : \hat{\Sigma} &\rightarrow \mathcal{M}, \\ (x, y, z) &\mapsto (\text{const}, x, y, z). \end{aligned}$$

Вложение Φ “переносит” кривые в $\hat{\Sigma}$ на кривые в \mathcal{M} . Оно отображает векторы $\hat{\Sigma}$ на векторы в \mathcal{M} . Вложение определяет отображение между $\mathcal{T}_M(\hat{\Sigma})$ и $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$. ”Увлечение вперёд“ можно выразить так

$$\begin{aligned} \Phi_* : \mathcal{T}_M(\hat{\Sigma}) &\rightarrow \mathcal{T}_M(\mathcal{M}), \\ \mathbf{v}(v^x, v^y, v^z) &\mapsto \Phi_* \mathbf{v} = (0, v^x, v^y, v^z), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v}(v^x, v^y, v^z)$ обозначает компоненты вектора \mathbf{v} в естественном базисе $\partial/\partial x^i$, принадлежащем $\mathcal{T}_M(\Sigma)$ в координатах (x^i) . И обратно, вложение Φ индуцирует отображение, называемое ”увлечением назад“, обозначаемое как Φ^* , между линейными формами на $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$ и на $\mathcal{T}_M(\hat{\Sigma})$:

$$\begin{aligned}\Phi^* : \mathcal{T}_M^*(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{T}_M^*(\hat{\Sigma}), \\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_t, \omega_x, \omega_y, \omega_z) &\mapsto \Phi^*\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z),\end{aligned}$$

где ω_α обозначают компоненты 1-формы $\boldsymbol{\omega}$ в базисе $\mathbf{d}x^\alpha$, связанном с координатами (x^α) .

Важным случаем является отображение билинейной формы \mathbf{g} , то есть метрики пространства-времени, которое определяет *индуцированную метрику* на Σ :

$$\boldsymbol{\gamma} := \Phi^*\mathbf{g},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ есть *первая фундаментальная форма* Σ :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_M(\Sigma) \times \mathcal{T}_M(\Sigma), \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

В терминах координатной системы $x^i = (x, y, z)$ на гиперповерхности Σ , компоненты *индуцированной метрики* $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\gamma_{ij} = g_{ij}.$$

Связность Леви–Чивита ∇ на многообразии Σ согласована с метрикой $\boldsymbol{\gamma}$ и удовлетворяет условию

$$\nabla\boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Тензор Римана, построенный с помощью связности, описывает *внутреннюю кривизну* $(\Sigma, \boldsymbol{\gamma})$. **Riem** есть мера некоммутативности двух ковари-

антных производных, выраженная тождеством Риччи,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}(\Sigma), \quad (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) v^k = R_{lij}^k v^l. \quad (1.3)$$

Тензор Римана 3-мерного пространства полностью определяется через тензор Риччи

$$R_{jkl}^i = \delta_k^i R_{jl} - \delta_l^i R_{jk} + \gamma_{jl} R_k^i - \gamma_{jk} R_l^i + \frac{1}{2} R (\delta_l^i \gamma_{jk} - \delta_k^i \gamma_{jl}). \quad (1.4)$$

1.1.1 Отображение Вайнгартена

Рассмотрим теперь изменение направления нормали \mathbf{n} при её движении вдоль Σ . Так определяется *отображение Вайнгартена* как эндоморфизм $\mathcal{T}_M(\Sigma)$, который связывает с каждым вектором, касательным к Σ вариацию посредством пространственно-временной связности ${}^{(4)}\nabla$:

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{T}_M(\Sigma) &\rightarrow \mathcal{T}_M(\Sigma), \\ \mathbf{v} &\mapsto {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Образ содержится в $\mathcal{T}_M(\Sigma)$, поскольку

$$(\mathbf{n} \cdot \chi(\mathbf{v})) = (\mathbf{n} \cdot {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n}) = \frac{1}{2} {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Отображение Вайнгартена является самосопряжённым по отношению к индуцированной метрике γ . Собственные значения отображения Вайнгартена вещественные, поскольку χ является самосопряжённым. Они называются главными кривизнами гиперповерхности Σ , а соответствующие собственные векторы определяют главные направления Σ . Средняя кривизна κ гиперповерхности Σ есть среднее арифметическое значение главных кривизн

$$\kappa := \frac{1}{3} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3), \quad (1.5)$$

где κ_i три собственных значения χ . Самосопряжённость χ подразумевает, что билинейная форма \mathbf{K} , определённая в касательном пространстве:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_M(\Sigma) \times \mathcal{T}_M(\Sigma) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto -(\mathbf{u} \cdot \chi(\mathbf{v})),\end{aligned}$$

симметрическая. Она называется *второй фундаментальной формой* гиперповерхности

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \cdot {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}). \quad (1.6)$$

След $\text{Tr}\mathbf{K}$ билинейной формы \mathbf{K} в метрике γ равен

$$\text{Tr}\mathbf{K} = \gamma^{ij}K_{ij} = -3\kappa. \quad (1.7)$$

В каждой точке $M \in \Sigma$ все векторы пространства-времени могут быть представлены в виде ортогонального разложения

$$\mathcal{T}_M(\mathcal{M}) = \mathcal{T}_M(\Sigma) \oplus \text{span}(\mathbf{n}), \quad (1.8)$$

где $\text{span}(\mathbf{n})$ – одномерное подпространство $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$, генерируемое вектором \mathbf{n} . *Ортогональный проектор* на Σ есть оператор γ^\sharp , связанный с разложением:

$$\begin{aligned}\gamma^\sharp : \mathcal{T}_M(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{T}_M(\Sigma), \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}.\end{aligned}$$

Координатное представление оператора γ^\sharp в произвольном базисе \mathbf{e}_α , принадлежащем $\mathcal{T}_M(\mathcal{M})$, имеет вид:

$$\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (1.9)$$

В частности, $\gamma^\sharp(\mathbf{n}) = 0$, и для любого вектора, касательного к Σ : $\gamma^\sharp(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Мы имеем отображение $(\gamma^*)^\sharp_{\mathcal{M}}$

$$(\gamma^*)^\sharp_{\mathcal{M}} : \mathcal{T}_M^*(\Sigma) \rightarrow \mathcal{T}_M^*(\mathcal{M})$$

для любой линейной формы $\omega \in \mathcal{T}_M^*(\Sigma)$:

$$\begin{aligned} (\gamma^*)^\sharp_{\mathcal{M}} \omega : \mathcal{T}_M(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &\mapsto \langle \omega, \gamma^\sharp(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned}$$

Расширенная метрика γ в терминах метрического тензора \mathbf{g} и линейной формы \mathbf{n} :

$$\gamma = \mathbf{g} + \mathbf{n}^b \otimes \mathbf{n}^b,$$

или, в компонентном виде:

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta.$$

Тензор внешней кривизны \mathbf{K} как билинейная форма на Σ может рассматриваться как билинейная форма на \mathcal{M} :

$$\mathbf{K} := (\gamma^*)^\sharp_{\mathcal{M}} \mathbf{K}. \quad (1.10)$$

Уравнения Гаусса–Вайнгартена

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(\Sigma), \quad \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{n} \quad (1.11)$$

хорошо известны в геометрии вложенных гиперповерхностей. Тензор внешней кривизны является мерой отклонения производной некоторого вектора, принадлежащего Σ , при движении вдоль другого векторного поля, также принадлежащего Σ , взятого с внутренней связностью ∇ гиперповерхности Σ от производной, взятой со связностью пространства-времени ${}^{(4)}\nabla$.

1.1.2 Соотношения Гаусса, Кодацци и Риччи

Рассмотрим тождество Риччи (1.3), определяющее трёхмерный тензор Римана **Riem** со связностью ∇ , гиперповерхности Σ с метрикой γ . Четырёхмерный вариант тождества Риччи

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta v^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\gamma = R_{\mu\alpha\beta}^\gamma v^\mu, \quad (1.12)$$

где \mathbf{v} —произвольный вектор, касательный к Σ . Используя формулу, связывающую ∇ и ${}^{(4)}\nabla$, мы получим

$$\nabla_\alpha (\nabla_\beta v^\gamma) = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma {}^{(4)}\nabla_\mu (\nabla_\nu v^\rho).$$

Применяя её ещё раз, перепишем уравнения

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta v^\gamma = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma {}^{(4)}\nabla_\mu \left(\gamma_\nu^\sigma \gamma_\lambda^\rho {}^{(4)}\nabla_\sigma v^\lambda \right).$$

Переставим теперь местами индексы α и β , и вычислим

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta v^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\gamma &= \\ &= \left(K_{\alpha\mu} K_\beta^\gamma - K_{\beta\mu} K_\alpha^\gamma \right) v^\mu + \\ &+ \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma \left({}^{(4)}\nabla_\rho {}^{(4)}\nabla_\sigma v^\lambda - {}^{(4)}\nabla_\sigma {}^{(4)}\nabla_\rho v^\lambda \right). \end{aligned}$$

Используя тождество Риччи (1.1) для связности ${}^{(4)}\nabla$

$${}^{(4)}\nabla_\rho {}^{(4)}\nabla_\sigma v^\lambda - {}^{(4)}\nabla_\sigma {}^{(4)}\nabla_\rho v^\lambda = {}^{(4)}R_{\mu\rho\sigma}^\lambda v^\mu,$$

и подставляя полученное соотношение в левую часть равенства (1.12), получим результат

$$\left(K_{\alpha\mu} K_\beta^\gamma - K_{\beta\mu} K_\alpha^\gamma \right) v^\mu + \gamma_\alpha^\rho \gamma_\beta^\sigma \gamma_\lambda^\gamma {}^{(4)}R_{\mu\rho\sigma}^\lambda v^\mu = R_{\mu\alpha\beta}^\gamma v^\mu,$$

или, эквивалентно, поскольку $v^\mu = \gamma_\sigma^\mu v^\sigma$,

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma \gamma_\delta^\sigma ({}^4)R_{\sigma\mu\nu}^\rho = R_{\delta\alpha\beta}^\gamma + K_\alpha^\gamma K_{\delta\beta} - K_\beta^\gamma K_{\alpha\delta}. \quad (1.13)$$

Получили искомые *соотношения Гаусса*.

Если свернём соотношения Гаусса по индексам α и γ и воспользуемся условием

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\rho^\alpha = \gamma_\rho^\mu = \delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho,$$

мы получим *свёрнутые соотношения Гаусса*:

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu ({}^4)R_{\mu\nu} + \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma ({}^4)R_{\nu\rho\sigma}^\mu = R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu. \quad (1.14)$$

Вычислим теперь след тензора внешней кривизны с метрикой γ , принимая в расчёт

$$K_\mu^\mu = K_i^i = K, \quad K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = K_{ij} K^{ij}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\mu} n^\nu \gamma_\beta^\rho n^\sigma ({}^4)R_{\nu\rho\sigma}^\mu &= \gamma_\mu^\rho n^\nu n^\sigma ({}^4)R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \\ &= \underbrace{({}^4)R_{\nu\mu\sigma}^\mu}_{=({}^4)R_{\nu\sigma}} n^\nu n^\sigma + \underbrace{({}^4)R_{\nu\mu\sigma}^\mu n^\rho n_\mu n^\nu n^\sigma}_{=0} = ({}^4)R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu. \end{aligned}$$

Окончательно, получаем

$$({}^4)R + 2({}^4)R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R + K^2 - K_{ij} K^{ij} \quad (1.15)$$

скалярное соотношение Гаусса.

Применим тождество Риччи (1.1) к нормальному вектору \mathbf{n} .

$$({}^4)\nabla_\alpha ({}^4)\nabla_\beta - ({}^4)\nabla_\beta ({}^4)\nabla_\alpha) n^\gamma = ({}^4)R_{\mu\alpha\beta}^\gamma n^\mu. \quad (1.16)$$

Проецируя это соотношение на Σ , получаем

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma ({}^4)R_{\sigma\mu\nu}^\rho n^\sigma = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\rho^\gamma ({}^4)\nabla_\mu ({}^4)\nabla_\nu n^\rho - ({}^4)\nabla_\nu ({}^4)\nabla_\mu n^\rho).$$

Окончательно, находим

$$\gamma_\rho^\gamma n^\sigma \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\beta K_\alpha^\gamma - \nabla_\alpha K_\beta^\gamma. \quad (1.17)$$

Таким образом мы получили искомые *соотношения Кодацци*. Их свёртка по индексам α и γ даёт

$$\gamma_\rho^\mu n^\sigma \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\beta K - \nabla_\mu K_\beta^\mu,$$

с

$$\gamma_\rho^\mu n^\sigma \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho = (\delta_\rho^\mu + n^\mu n_\rho) n^\sigma \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho = n^\sigma \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\nu} + \gamma_\beta^{\nu(4)} R_{\sigma\mu\nu}^\rho n_\rho n^\sigma n^\mu.$$

В силу антисимметрии тензора Римана по первым двум индексам последний член зануляется, поэтому, окончательно

$$\gamma_\alpha^\mu n^{\nu(4)} R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha K - \nabla_\mu K_\alpha^\mu \quad (1.18)$$

получаем *свёрнутые соотношения Кодацци*.

Мы рассмотрели одну гиперповерхность Σ , вложенную в пространство - время $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Теперь же мы рассмотрим непрерывное семейство гиперповерхностей Σ_t , заполняющих всё \mathcal{M} . Σ – гиперповерхность Коши, потому что её областью зависимости является всё пространство-время \mathcal{M} . Произвольное глобальное гиперболическое пространство-время может быть расслоено на семейство пространственноподобных гиперповерхностей Σ_t .

Времениподобный, направленный в будущее единичный вектор \mathbf{n} , направленный по нормали к слою Σ_t , коллинеарен вектору ${}^{(4)}\nabla t$, связанному с градиентом 1-формы $\mathbf{d}t$

$$\mathbf{n} := -N {}^{(4)}\nabla t$$

с функцией

$$N := \left(-{}^{(4)}\nabla t \cdot {}^{(4)}\nabla t \right)^{-1/2}.$$

Скалярное поле N называется *функцией хода*.

Получим формулу для ковариантной производной вектора нормали $\mathbf{m} \equiv N\mathbf{n}$

$${}^{(4)}\nabla_\beta m^\alpha = -NK_\beta^\alpha - \nabla^\alpha N n_\beta + n^\alpha {}^{(4)}\nabla_\beta N. \quad (1.19)$$

Результат имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\gamma = -2N\mathbf{K}. \quad (1.20)$$

Отсюда мы можем получить производную Ли 3-метрики вдоль единичного вектора нормали \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}\gamma_{\alpha\beta} &= \mathcal{L}_{N\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta} = \\ &= Nn^\mu {}^{(4)}\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\mu\beta} {}^{(4)}\nabla_\alpha (Nn^\mu) + \gamma_{\alpha\mu} {}^{(4)}\nabla_\beta (Nn^\mu) = \\ &= Nn^\mu {}^{(4)}\nabla_\mu \gamma_{\alpha\beta} + \underbrace{\gamma_{\mu\beta} n^\mu}_{=0} {}^{(4)}\nabla_\alpha N + N\gamma_{\mu\beta} {}^{(4)}\nabla_\alpha n^\mu + \\ &+ \underbrace{\gamma_{\alpha\mu} n^\mu}_{=0} {}^{(4)}\nabla_\beta N + N\gamma_{\alpha\mu} {}^{(4)}\nabla_\beta n^\mu = N\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем соотношение

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma = \frac{1}{N}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}\gamma,$$

и находим искомую формулу для вычисления тензора внешней кривизны \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma. \quad (1.21)$$

Мы получили, полностью спроецировав пространственно - временной тензор Римана, уравнения Гаусса (1.13), затем, спроецировав три раза на Σ_t и один раз на нормаль \mathbf{n} , уравнения Кодацци (1.17). Теперь

спроецируем пространственно-временной тензор Римана дважды на Σ_t и дважды на \mathbf{n} . Вычитая $\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu n^\sigma ({}^4)\nabla_\sigma K_{\mu\nu}$ отсюда, получаем

$$\gamma_{\alpha\mu} n^\rho \gamma_\beta^\nu n^\sigma ({}^4)R_{\rho\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu. \quad (1.22)$$

Найденные уравнения (1.22) называются *уравнениями Риччи*. Вместе с уравнениями Гаусса (1.13) и уравнениями Кодацци (1.17) они завершают 3+1 разбиение пространственно-временного тензора Римана. Используя свёрнутые уравнения Гаусса (1.14), мы перепишем (1.22) с использованием пространственно-временного тензора Риччи

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu ({}^4)R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N + R_{\alpha\beta} + K K_{\alpha\beta} - 2K_{\alpha\mu} K_\beta^\mu, \quad (1.23)$$

или, в свободных от индексов обозначениях:

$$(\gamma^*)^\sharp ({}^4)\mathbf{Ric} = -\frac{1}{N} \mathcal{L}_m \mathbf{K} - \frac{1}{N} \nabla \nabla N + \mathbf{R} + K \mathbf{K} - 2\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^\sharp. \quad (1.24)$$

Вычислим след (1.24) с метрикой γ

$$\gamma^{\mu\nu} ({}^4)R_{\mu\nu} = -\frac{1}{N} \gamma^{ij} \mathcal{L}_m K_{ij} - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N + R + K^2 - 2K_{ij} K^{ij}. \quad (1.25)$$

Тогда

$$\gamma^{\mu\nu} ({}^4)R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) ({}^4)R_{\mu\nu} = ({}^4)R + ({}^4)R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu,$$

и

$$-\gamma^{ij} \mathcal{L}_m K_{ij} = -\mathcal{L}_m \underbrace{(\gamma^{ij} K_{ij})}_{=K} + K_{ij} \mathcal{L}_m \gamma^{ij}, \quad (1.26)$$

с $\mathcal{L}_m \gamma^{ij}$, которая описывает эволюцию обратной 3-метрики:

$$\mathcal{L}_m \gamma^{ij} = -2N K^{ij}. \quad (1.27)$$

Подстановка (1.27) в (1.26) даёт

$$-\gamma^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} K_{ij} = -\mathcal{L}_{\mathbf{m}} K + 2N K_{ij} K^{ij}.$$

Следовательно, уравнение (1.25) преобразуется к виду

$${}^{(4)}R + {}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = R + K^2 - \frac{1}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} K - \frac{1}{N} \nabla_i \nabla^i N. \quad (1.28)$$

Если мы скомбинируем его со скалярным соотношением Гаусса (1.15) для того, чтобы освободиться от члена с тензором Риччи ${}^{(4)}R_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$, мы получим уравнение, которое включает только пространственно-временной скаляр кривизны ${}^{(4)}R$:

$${}^{(4)}R = R + K^2 + K_{ij} K^{ij} - \frac{2}{N} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} K - \frac{2}{N} \nabla_i \nabla^i N. \quad (1.29)$$

1.1.3 Гамильтонова связь и импульсные связи

Плотность энергии для эйлерова наблюдателя

$$T_{\perp\perp} := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = \mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{n}). \quad (1.30)$$

Плотность импульса материи есть линейная форма

$$\mathbf{T}_{\perp} := -\mathbf{T}(\gamma^{\sharp}(\cdot), \mathbf{n}), \quad (1.31)$$

или, в компонентном виде

$$(T_{\perp})_{\alpha} = -T_{\mu\nu} \gamma_{\alpha}^{\mu} n^{\nu}.$$

Используя уравнение Гаусса (1.15) и определение (1.30), получаем

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = (16\pi G) T_{\perp\perp} \quad (1.32)$$

гамилльтонову связь.

Используя свёрнутое уравнение Кодацци (1.18) и (1.31), получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{K}^\sharp - \nabla K = (8\pi G)\mathbf{T}_\perp, \quad (1.33)$$

или, в компонентной форме

$$\nabla_j K_i^j - \nabla_i K = (8\pi G)(T_\perp)_i. \quad (1.34)$$

Полученные векторные уравнения называются *импульсными связями*.

1.2 Конформное разложение

1.2.1 Конформная метрика и конформная связность

Джеймс Йорк доказал, что две степени свободы гравитационного поля переносятся конформно эквивалентным классом 3-метрик. Конформно эквивалентные метрики связаны конформным соотношением

$$\gamma = \Psi^4 \tilde{\gamma}, \quad (1.35)$$

где Ψ – всюду положительное скалярное поле.

Пусть $\tilde{\nabla}$ является связностью Леви-Чивита, которая согласована с конформной метрикой $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\nabla} \tilde{\gamma} = 0. \quad (1.36)$$

Символы Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ конформной связности $\tilde{\nabla}$ в координатной системе (x^i) :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \left(\frac{\partial \tilde{\gamma}_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{\gamma}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\gamma}_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Ковариантные производные $\tilde{\nabla}\mathbf{T}$ и $\nabla\mathbf{T}$ тензора \mathbf{T} на Σ_t связаны формулой

$$\nabla_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \tilde{\nabla}_k T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{r=1}^p C_{kl}^{i_r} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{r=1}^q C_{kj_r}^l T_{j_1 \dots l \dots j_q}^{i_1 \dots i_p},$$

где

$$C_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

компоненты тензорного поля. Выразим тензор C_{ij}^k в терминах $\tilde{\nabla}$ -производных метрики γ

$$C_{ij}^k = \frac{1}{2} \gamma^{kl} \left(\tilde{\nabla}_i \gamma_{lj} + \tilde{\nabla}_j \gamma_{il} - \tilde{\nabla}_l \gamma_{ij} \right). \quad (1.37)$$

Заменим γ_{ij} и γ^{ij} в (1.37) конформным отображением и получим

$$C_{ij}^k = 2 \left(\delta_i^k \tilde{\nabla}_j \ln \Psi + \delta_j^k \tilde{\nabla}_i \ln \Psi - \tilde{\nabla}^k \ln \Psi \tilde{\gamma}_{ij} \right). \quad (1.38)$$

Получим теперь соотношение между двумя ковариантными производными $\nabla\mathbf{v}$ и $\tilde{\nabla}\mathbf{v}$ векторного поля $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(\Sigma_t)$:

$$\nabla_j v^i = \tilde{\nabla}_j v^i + C_{jk}^i v^k. \quad (1.39)$$

Значит, подставляя в (1.39) выражение (1.38), имеем

$$\nabla_j v^i = \tilde{\nabla}_j v^i + 2 \left(v^k \tilde{\nabla}_k \ln \Psi \delta_j^i + v^i \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - \tilde{\nabla}^i \ln \Psi \tilde{\gamma}_{jk} v^k \right). \quad (1.40)$$

Вычисляя след в (1.40), получим соотношение между дивергенциями вектора:

$$\nabla_i v^i = \tilde{\nabla}_i v^i + 6v^i \tilde{\nabla}_i \ln \Psi, \quad (1.41)$$

или, эквивалентно,

$$\nabla_i v^i = \Psi^{-6} \tilde{\nabla}_i (\Psi^6 v^i). \quad (1.42)$$

Свёртывая тождество Риччи

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) v^k = R_{lij}^k v^l$$

по индексам i и k , получаем

$$R_{ij}v^j = \nabla_j \nabla_i v^j - \nabla_i \nabla_j v^j.$$

Выразим ∇ -производные в терминах $\tilde{\nabla}$ -производных:

$$\begin{aligned} R_{ij}v^j &= \tilde{\nabla}_j(\nabla_i v^j) - C_{ji}^k \nabla_k v^j + C_{jk}^j \nabla_i v^k - \tilde{\nabla}_i(\nabla_j v^j) = \\ &= \tilde{\nabla}_j(\tilde{\nabla}_i v^j + C_{ik}^j v^k) - C_{ji}^k(\tilde{\nabla}_k v^j + C_{kl}^j v^l) + \\ &+ C_{jk}^j(\tilde{\nabla}_i v^k + C_{il}^k v^l) - \tilde{\nabla}_i(\tilde{\nabla}_j v^j + C_{jk}^j v^k) = \\ &= \tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_i v^j - \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j v^j + \tilde{\nabla}_j C_{ik}^j v^k - C_{ji}^k C_{kl}^j v^l + C_{jk}^j C_{il}^k v^l - \tilde{\nabla}_i C_{jk}^j v^k. \end{aligned}$$

Воспользуемся свёрнутым тождеством Риччи, относящимся к связности $\tilde{\nabla}$

$$\tilde{\nabla}_j \tilde{\nabla}_i v^j - \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j v^j = \tilde{R}_{ij}v^j,$$

и получим

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \tilde{\nabla}_k C_{ij}^k - \tilde{\nabla}_i C_{kj}^k + C_{ij}^k C_{lk}^l - C_{il}^k C_{kj}^l. \quad (1.43)$$

Заменим C_{ij}^k в (1.43) через производные Ψ (1.38). Заметим, что

$$C_{ki}^k = 6\tilde{\nabla}_i \ln \Psi,$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i C_{kj}^k &= 6\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \ln \Psi, \\ \tilde{\nabla}_k C_{ij}^k &= 4\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - 2\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k \ln \Psi \tilde{\gamma}_{ij}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (1.43) принимает вид

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - 2\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}^k \ln \Psi \tilde{\gamma}_{ij} + \\ &+ 4\tilde{\nabla}_i \ln \Psi \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - 4\tilde{\nabla}_k \ln \Psi \tilde{\nabla}^k \ln \Psi \tilde{\gamma}_{ij}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Вычисляя след в (1.44), найдём формулу для скалярной кривизны

$$\begin{aligned} R &= \gamma^{ij} R_{ij} = \Psi^{-4} \tilde{\gamma}^{ij} R_{ij} = \\ &= \Psi^{-4} \left(\tilde{R} - 8(\tilde{\nabla} + i\tilde{\nabla}^i \ln \Psi + \tilde{\nabla}_i \ln \Psi \tilde{\nabla}^i \ln \Psi) \right), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{R} := \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{R}_{ij} \quad (1.45)$$

скалярная кривизна, связанная с конформной метрикой. Замечая, что

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}^i \ln \Psi = \Psi^{-1} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}^i \Psi - \tilde{\nabla}_i \ln \Psi \tilde{\nabla}^i \ln \Psi,$$

перепишем формулу для скаляра Риччи

$$R = \Psi^{-4} \tilde{R} - 8\Psi^{-5} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}^i \Psi. \quad (1.46)$$

1.2.2 Конформное разложение внешней кривизны

Разложим внешнюю кривизну \mathbf{K} гиперповерхности Σ_t на следовую

$$K := \text{Tr}_\gamma \mathbf{K} = K_i^i = \gamma^{ij} K_{ij}$$

и бесследовую

$$\mathbf{A} := \mathbf{K} - \frac{1}{3} K \gamma$$

части. Следовательно, ковариантные и контравариантные компоненты тензора внешней кривизны представляются в виде

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3} K \gamma_{ij}, \quad K^{ij} = A^{ij} + \frac{1}{3} K \gamma^{ij}. \quad (1.47)$$

Выполним конформное разложение бесследовой части тензора \mathbf{K}

$$A^{ij} = \Psi^\alpha \tilde{A}^{ij}, \quad (1.48)$$

где $\alpha = -4$ или $\alpha = -10$. Временная эволюция γ (1.20) в терминах \mathbf{K} :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}(\Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}) = -2N A_{ij} - \frac{2}{3}NK \gamma_{ij},$$

следовательно,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2N \Psi^{-4} A_{ij} - \frac{2}{3}(NK + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \Psi) \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (1.49)$$

Поскольку A_{ij} бесследовый тензор, то

$$\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2(NK + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \Psi). \quad (1.50)$$

Используем закон вариации детерминанта произвольной обратимой матрицы A

$$\delta(\ln \det A) = \text{Tr}(A^{-1} \times \delta A),$$

и применяя к $A = (\tilde{\gamma}_{ij})$ для операции $\delta = \mathcal{L}_{\mathbf{m}}$, получим

$$\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \det(\tilde{\gamma}_{ij}). \quad (1.51)$$

Далее, заменяя вектор \mathbf{m} , найдём

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \det(\tilde{\gamma}_{ij}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\beta} \right) \ln f.$$

Поскольку $\partial f / \partial t = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \det(\tilde{\gamma}_{ij}) &= -\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \tilde{\gamma}_{ij} = \\ &= -\tilde{\gamma}^{ij} (N^k \underbrace{\tilde{\nabla}_k \tilde{\gamma}_{ij}}_{=0} + \tilde{\gamma}_{kj} \tilde{\nabla}_i N^k + \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\nabla}_j N^k) = \\ &= -\delta_k^i \tilde{\nabla}_i N^k - \delta_k^j \tilde{\nabla}_j N^k = -2\tilde{\nabla}_i N^i. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (1.51) становится

$$\tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\tilde{\nabla}_i N^i, \quad (1.52)$$

и, подставляя его в (1.50), получим

$$NK + 6\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \ln \Psi = \tilde{\nabla}_i N^i. \quad (1.53)$$

Таким образом, мы получили эволюционное уравнение для конформного фактора:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \right) \ln \Psi = \frac{1}{6} \left(\tilde{\nabla}_i N^i - NK \right). \quad (1.54)$$

Подстановка (1.53) в (1.49) даёт эволюционное уравнение для конформной метрики

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \right) \tilde{\gamma}_{ij} = -2N\Psi^{-4}A_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{\nabla}_k N^k \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (1.55)$$

Видим, что уместно ввести новую величину

$$\tilde{A}_{ij} := \Psi^{-4}A_{ij} \quad (1.56)$$

и переписать (1.55) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \right) \tilde{\gamma}_{ij} = -2N\tilde{A}_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{\nabla}_k N^k \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (1.57)$$

Величина \tilde{A}_{ij} бесследовая

$$\tilde{\gamma}^{ij} \tilde{A}_{ij} = 0.$$

Мы можем определить

$$\tilde{A}^{ij} := \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{A}_{kl},$$

следовательно, контравариантные компоненты тензора связаны формулой:

$$\tilde{A}^{ij} = \Psi^4 A^{ij}.$$

Из (1.57) следует эволюционное уравнение для обратной конформной метрики $\tilde{\gamma}^{ij}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \right) \tilde{\gamma}^{ij} = 2N\tilde{A}^{ij} + \frac{2}{3}\tilde{\nabla}_k N^k \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (1.58)$$

Выпишем дивергенцию тензора внешней кривизны

$$\nabla_j K^{ij} = \nabla_j A^{ij} + \frac{1}{3} \nabla^i K.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla_j A^{ij} &= \tilde{\nabla}_j A^{ij} + C_{jk}^i A^{kj} + C_{jk}^j A^{ik} = \\ &= \tilde{\nabla}_j A^{ij} + 2 \left(\delta_j^i \tilde{\nabla}_k \ln \Psi + \delta_k^i \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - \tilde{\nabla}^i \ln \Psi \tilde{\gamma}_{jk} \right) A^{kj} + \\ &+ 6 \tilde{\nabla}_k \ln \Psi A^{ik} = \\ &= \tilde{\nabla}_j A^{ij} + 10 A^{ij} \tilde{\nabla}_j \ln \Psi - 2 \tilde{\nabla} \ln \Psi \tilde{\gamma}_{jk} A^{jk}. \end{aligned}$$

Так как \mathbf{A} – бесследовый тензор, выписанное выше уравнение сводится к

$$\nabla_j A^{ij} = \tilde{\nabla}_j A^{ij} + 10 A^{ij} \tilde{\nabla}_j \ln \Psi,$$

которое может быть переписано в виде

$$\nabla_j A^{ij} = \Psi^{-10} \tilde{\nabla}_j (\Psi^{10} A^{ij}).$$

Далее удобно ввести следующую величину

$$\hat{A}^{ij} := \Psi^{10} A^{ij}, \quad (1.59)$$

что соответствует скейлинговому фактору $\alpha = -10$ в (1.48). Введём определение \hat{A}_{ij} :

$$\hat{A}_{ij} := \Psi^2 A_{ij}.$$

Тогда уравнение импульсной связи принимает вид

$$\tilde{\nabla}_j \hat{A}^{ij} - \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{\nabla}^i K = 8\pi \Psi^{10} T_{\perp}^i. \quad (1.60)$$

Гамильтонова связь как уравнение Лихнеровича–Йорка в конформной метрике принимает вид:

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}^i \Psi - \frac{1}{8} \tilde{R} \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} + 2\pi \tilde{T}_{\perp\perp} \Psi^{-3} - \frac{1}{12} K^2 \Psi^5 = 0, \quad (1.61)$$

где мы ввели масштабированную энергетическую величину

$$\tilde{T}_{\perp\perp} := \Psi^8 T_{\perp\perp}. \quad (1.62)$$

1.3 Вариационный функционал АДМ

Эйнштейновская теория гравитации была представлена в гамильтоновой форме более полувека назад [49]. Поль Дирак заявил, что четырёхмерная симметрия не является фундаментальным свойством физического мира. Вместо пространственно-временных преобразований следуют канонические преобразования фазового пространства переменных. Системы отсчёта в Общей Теории Относительности подробно рассмотрены в [50]. АДМ формализм, основанный на подходе Палатини, был разработан Ричардом Арновиттом, Стенли Дезером и Чарлзом Мизнером в 1959 году [51]. Функционал Гильберта в ADM переменных:

$$S_{\text{H}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{t_I}^{t_0} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma} N (K_{ij} K^{ij} - K^2 + R), \quad (1.63)$$

где R – скаляр Риччи гиперповерхности, и введены следующие обозначения:

$$K^{ij} := \gamma^{ik} \gamma^{jl} K_{kl}, \quad K := \gamma^{ij} K_{ij}, \quad \gamma := \det \|\gamma_{ij}\|, \quad \gamma_{ij} \gamma^{jk} = \delta_i^k. \quad (1.64)$$

Гамильтонова динамика ОТО строится на бесконечномерном вырожденном фазовом пространстве 3-метрик $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и их канонически сопряжённых плотностей импульсов $\pi^{ij}(\mathbf{x}, t)$. Последние выражаются через тензор внешней кривизны

$$\pi^{ij} := -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - K\gamma^{ij}), \quad (1.65)$$

В настоящей Главе исследуем вакуумные уравнения Эйнштейна, поэтому будем использовать АДМ-единицы: $c = 1$, $16\pi G = 1$, истинные плотности импульсов выражаются как $\pi_{\text{true}}^{ij} = \pi^{ij}/(16\pi G)$.

Вариационный функционал в единицах АДМ

$$S_{\text{ADM}} = \int_{t_I}^{t_0} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left(\pi^{ij} \frac{d\gamma_{ij}}{dt} - N\mathcal{H}_{\perp} - N^i\mathcal{H}_i \right). \quad (1.66)$$

Действие (1.66) получается из функционала Гильберта (1.63) с применением преобразования Лежандра. Супергамильтониан гравитационного поля есть функционал

$$\int_{\Sigma_t} d^3x (N\mathcal{H}_{\perp} + N^i\mathcal{H}_i), \quad (1.67)$$

где N и N^i являются множителями Лагранжа, \mathcal{H}_{\perp} и \mathcal{H}_i имеют смысл связей, так что $\mathcal{H}_{\perp}^{\text{true}} = \mathcal{H}_{\perp}/(16\pi G)$, $\mathcal{H}_{\text{true}}^i = \mathcal{H}^i/(16\pi G)$. Из них

$$\mathcal{H}_{\perp} := \sqrt{\gamma} (K_{ij}K^{ij} - K^2) - \sqrt{\gamma}R = G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{\gamma}R(\gamma_{ij}) \quad (1.68)$$

получена с помощью скалярного соотношения Гаусса из теории вложенных гиперповерхностей, и называется гамильтоновой связью, а

$$G_{ijkl} := \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl})$$

– суперметрика 6D - гиперболического суперпространства Уилера – Де-Витта (WDW). Импульсные связи

$$\mathcal{H}^i := 2\sqrt{\gamma}\nabla_j (K^{ij} - \gamma^{ij}K) = -2\nabla_j \pi^{ij} \quad (1.69)$$

следуют из редуцированных уравнений Кодацци теории вложенных гиперповерхностей. Они накладывают ограничения на возможные данные $\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t)$, $\pi^{ij}(\mathbf{x}, t)$ на пространственно-подобных гиперповерхностях Σ_t . Дивергентный закон, следующий из (1.69), является аналогом закона Гаусса электродинамики Максвелла. Гамильтонова же связь (1.68) не имеет аналога в электродинамике. Она описывает динамику самой пространственной геометрии.

Гамильтонова связь (1.68) может быть выражена через импульсные переменные (1.65):

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi^2 \right) - \sqrt{\gamma}R, \quad (1.70)$$

поскольку

$$K^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{ij} - \frac{1}{2}\pi\gamma^{ij} \right), \quad \pi_{ij} := \gamma_{ik}\gamma_{jl}\pi^{kl},$$

$$\pi := \gamma_{ij}\pi^{ij}, \quad K = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma}}.$$

Скобка Пуассона представляет собой билинейную операцию на двух функционалах $F[\gamma_{ij}, \pi^{ij}]$, $G[\gamma_{ij}, \pi^{ij}]$ [52]

$$\{F, G\} = \int_{\Sigma_t} d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}(t, \mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}(t, \mathbf{x})} - \frac{\delta G}{\delta \gamma_{ij}(t, \mathbf{x})} \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}(t, \mathbf{x})} \right). \quad (1.71)$$

Канонические переменные удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{\gamma_{ij}(t, \mathbf{x}), \pi^{kl}(t, \mathbf{x}')\} = \delta_{ij}^{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.72)$$

где симметрическая функция Кронекера определяется как

$$\delta_{ij}^{kl} := \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k),$$

а $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ есть δ -функция Дирака, определённая на многообразии Σ_t . Связи (1.68), (1.69) являются связями первого класса, поскольку принадлежат замкнутой алгебре

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_\perp(\mathbf{x}), \mathcal{H}_\perp(\mathbf{x}')\} &= (\mathcal{H}^i(\mathbf{x}) + \mathcal{H}^i(\mathbf{x}')) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\mathcal{H}_i(\mathbf{x}), \mathcal{H}_\perp(\mathbf{x}')\} &= \mathcal{H}_\perp(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\mathcal{H}_i(\mathbf{x}), \mathcal{H}_j(\mathbf{x}')\} &= \mathcal{H}_i(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x^j} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathcal{H}_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Вариации действия (1.66) по каноническим переменным $\pi^{ij}(t, \mathbf{x})$ приводят к кинематическим уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \pi^{ij}} S_{\text{ADM}} &= \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2NK_{ij} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i \\ &= \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} \pi \right) + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Вариации действия (1.66) по каноническим переменным $\gamma_{ij}(t, \mathbf{x})$ дают динамические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}} S_{\text{ADM}} &= -\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial t} = N \sqrt{\gamma} \left(R^{ij} - \frac{1}{2} \gamma^{ij} R \right) \\ &\quad - \frac{N}{2\sqrt{\gamma}} \gamma^{ij} \left(\pi^{mn} \pi_{mn} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ &\quad + \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^{im} \pi_m^j - \frac{1}{2} \pi \pi^{ij} \right) - \sqrt{\gamma} (\nabla^i \nabla^j N - \gamma^{ij} \Delta N) \\ &\quad - \nabla_m (\pi^{ij} N^m) + \nabla_m N^i \pi^{mj} + \nabla_m N^j \pi^{mi}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

где $\Delta \equiv \nabla_i \nabla^i$ – лапласиан.

1.3.1 Двумерная \mathbb{R}^n -гравитация

Альберт Эйнштейн в пятом издании своей книги “Сущность Теории Относительности” добавил работу “Релятивистская теория несимметричного поля”, написанную в соавторстве с Брурией Кауфман [53]. Система дифференциальных уравнений движения не определяет поле полностью. Остаются свободные данные. Чем меньше свободных данных, тем “жестче” система. Таким образом Эйнштейн ввёл понятие “жесткость” системы полевых уравнений. Как определить степень свободы функций? Эта проблема изучалась Эдмундом Уиттекером при рассмотрении сферических гармоник [54]. Как задать начальные условия для системы дифференциальных уравнений, если имеются калибровочные степени свободы и тождества? Задача идентификации динамических степеней свободы связана с проблемой Коши [55]. Имеется интересная полевая задача, не имеющая вообще динамических степеней свободы [56].

Рассмотрим в настоящем разделе поучительный пример системы со связями, лагранжиан которой представляет собой гауссову кривизну пространства - времени в n -й степени ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) [57]. Более общие случаи рассматриваются в работах [58, 59, 60]. Поскольку функционалом Гильберта гравитации в $(1+1)$ -мерном пространстве-времени является топологический инвариант Гаусса — Бонне, возьмём в качестве лагранжиана гауссову кривизну в n -й степени. Теория сохраняет свою ковариантность. Хотя расчёты и представляются довольно трудоёмкими, задача решается точно, и представляет полезный пример применения обобщённых форм Картана.

Метрику пространства-времени возьмём в форме Арновитта — Дезе-

ра — Мизнера:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma^2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = \alpha\gamma, \quad (1.75)$$

где метрические функции $\alpha(t, x)$ и $\beta(t, x)$ имеют смысл множителей Лагранжа. Гауссова кривизна может быть представлена в виде [61]

$$R = -\frac{1}{2\alpha^3\gamma^2} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} - \frac{1}{2\alpha\gamma} \left(\left[\frac{(\gamma^2) \cdot - (\gamma\beta)'}{\alpha\gamma} \right] \cdot - \left[\frac{(\gamma\beta) \cdot - (\alpha^2 + \beta^2)'}{\alpha\gamma} \right]' \right), \quad (1.76)$$

где точками обозначены производные по временной переменной t , а штрихами — по пространственной переменной x . Функционал действия примет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{t,x} R^n \alpha\gamma = \frac{1}{2} \int_{t,x} (\alpha\gamma)^{1-n} \left[\left(\frac{\beta' - \dot{\gamma}}{\alpha} \right) \cdot + \left(\frac{\beta\dot{\gamma}}{\alpha\gamma} \right)' - \left(\frac{(\alpha^2 + \beta^2)'}{2\alpha\gamma} \right)' \right]^n, \quad (1.77)$$

где $\int_{t,x}$ обозначает интегрирование по пространству-времени. Варьируя S по метрике получаем уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha''} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta'} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta''} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma'} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\gamma}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}'} &= 0, \end{aligned} \quad (1.78)$$

где \mathcal{L} есть плотность функции Лагранжа.

Полученные дифференциальные уравнения экстремалей (1.78) выглядят достаточно сложно. Они будут выглядеть яснее после перехода к гамильтонову описанию, поскольку мы имеем дело с невырожденной теорией с высшими производными. Применим, несколько модифицировав, метод Остроградского [62]. Удобно ввести, помимо обобщённых координат (α, β, γ) , новую переменную

$$u := \frac{\beta' - \dot{\gamma}}{\alpha}. \quad (1.79)$$

Действие в обобщённых координатах $(\alpha, \beta, \gamma, u)$ принимает следующую форму

$$S = \frac{1}{2} \int_{t,x} (\alpha\gamma)^{1-n} \left[\dot{u} - \left(\frac{\beta u + \alpha'}{\gamma} \right)' \right]^n. \quad (1.80)$$

Плотности импульсов находим, используя функциональные производные

$$\begin{aligned} \pi_u &:= \frac{\delta W}{\delta \dot{u}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \frac{n}{2} \alpha \gamma^{1-n} \left[\dot{u} - \left(\frac{\beta u + \alpha'}{\gamma} \right)' \right]^{n-1}, \\ \pi_\alpha &:= \frac{\delta W}{\delta \dot{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}, \\ \pi_\beta &:= \frac{\delta W}{\delta \dot{\beta}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}'}, \\ \pi_\gamma &:= \frac{\delta W}{\delta \dot{\gamma}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\gamma}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}'}. \end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание (1.79), гамильтониан

$$H = \int_x (\pi_u \dot{u} + \pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\beta \dot{\beta} + \pi_\gamma \dot{\gamma} - \mathcal{L}[\alpha, \dot{\alpha}, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \beta'', \beta'''; \gamma, \dot{\gamma}, \gamma', \ddot{\gamma}, \gamma'''])$$

становится равным

$$H = \int_x (\pi_u \dot{u} + \pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\beta \dot{\beta} + \pi_\gamma (\beta' - \alpha u) - \mathcal{L}[\alpha, \alpha', \alpha''; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; u, \dot{u}, u']).$$

Игнорируя граничные члены, получаем следующее выражение для гамильтониана

$$\begin{aligned} H &= \int_x \left(\pi_\alpha \dot{\alpha} + \pi_\beta \dot{\beta} \right. \\ &+ \alpha \left[(n-1) \left(\frac{2}{n^n} \right)^{1/(n-1)} \gamma \pi_u^{n/(n-1)} - u \pi_\gamma + \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)' \right] \\ &+ \left. \beta \left[-u \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right) - \pi'_\gamma \right] \right). \end{aligned}$$

Помимо уравнений движения, полученных варьированием гамильтониана по переменным $u(t, x)$, $\gamma(t, x)$, имеются две дифференциальные связи:

$$\begin{aligned} (n-1) \left(\frac{2}{n^n} \right)^{1/(n-1)} \gamma \pi_u^{n/(n-1)} - u \pi_\gamma + \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)' &= 0, \\ u \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right) + \pi'_\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Систему уравнений можно один раз проинтегрировать, после чего она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{n/(n-1)} \pi_u^{(2n-1)/(n-1)} + \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)^2 + \pi_\gamma^2 &= c(t), \\ u \pi'_u + \gamma \pi'_\gamma &= 0, \end{aligned} \quad (1.81)$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени.

Гамильтонов формализм определён с помощью пуассоновой структуры \hat{J} , заданной на функциональном фазовом пространстве. Выпишем ненулевые скобки:

$$\{\gamma(t, x), \pi_\gamma(t', x')\} = \delta(t - t') \delta(x - x'),$$

$$\{u(t, x), \pi_u(t', x')\} = \delta(t - t') \delta(x - x').$$

Тем самым определяем Геометродинамику на фазовом пространстве Уилера — ДеВитта.

Далее конструируем на основе связей функционалы

$$\begin{aligned}\Phi[\phi] &= \int_{t,x} \left(\frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{n/(n-1)} \pi_u^{(2n-1)/(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)^2 + \pi_\gamma^2 - c(t) \right) \phi(t, x), \\ \Xi[\xi] &= \int_{t,x} (u\pi'_u + \gamma\pi'_\gamma) \chi(t, x)\end{aligned}$$

и вычисляем их скобки Пуассона

$$\{\Phi, \Xi\} = \int_{t,x;t',x'} \frac{\delta\Phi}{\delta z} \hat{J} \frac{\delta\Phi}{\delta z}. \quad (1.82)$$

В результате получаем

$$\{\Phi[\phi], \Xi[\xi]\} = \Phi[(\phi\chi)'] + \int c(t)\phi(t, x).$$

Таким образом, дифференциальные связи формируют замкнутую алгебру. Можем выразить переменные π_γ и u из связей как

$$\begin{aligned}\pi_\gamma^2 &= c(t) - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{n/(n-1)} \pi_u^{(2n-1)/(n-1)} - \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)^2, \\ u &= -\gamma \left(\frac{\pi'_\gamma}{\pi'_u} \right).\end{aligned}$$

1.3.2 Вариационный комплекс Де Рама

Для исследования ковариантных теорий востребованным оказывается математический аппарат теории вариационных комплексов [63, 64], который является обобщением дифференциальных комплексов Де Рама

[65, 66]. Вариационные комплексы представляются в виде двух компонент. Первая часть получается переформулировкой комплекса Де Рама на пространства дифференциальных функций, заданных на $V \subset X \times D$, где X есть пространство независимых переменных и U – пространство зависимых переменных. Дифференциальная r -форма задаётся как

$$\omega^r = \sum_J P_J[u] \mathbf{d}x^J, \quad (1.83)$$

где P_J дифференциальные функции и

$$\mathbf{d}x^J = \mathbf{d}x^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{j_r}, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq p$$

образуют базис пространства дифференциальных r -форм $\wedge_r T^*X$.

Так как для релятивистских теорий следствием ковариантности описания является обращение в нуль супергамильтониана [67, 68], мы будем интересоваться здесь второй частью вариационного комплекса. Предположим, гамильтонова связь разрешена. Дифференциальные формы активны на “горизонтальных” переменных X из M , а вертикальные формы конструируются аналогично — они активны на “вертикальных” переменных u и их производных. Вертикальная k -форма представляет собой конечную сумму

$$\hat{\omega}^k = \sum P_J^\alpha[u] \mathbf{d}u_{J_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}u_{J_k}^{\alpha_k}, \quad (1.84)$$

где P_J^α – дифференциальные функции. Здесь независимые переменные выступают в качестве параметров. Вертикальные формы $\hat{\omega}$ построены на пространстве конечных струй $M^{(n)}$. Вертикальные дифференциалы обладают свойствами билинейности, антидифференцирования и замкнутости подобно обычным дифференциалам. Здесь мы будем использовать

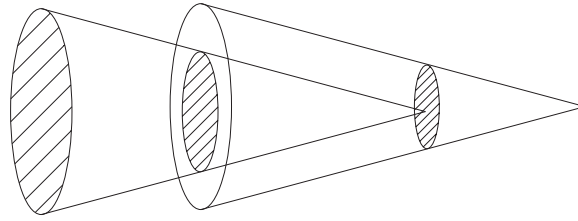


Рис. 1.2: Вариационный дифференциал δ определяет отображение пространств функциональных форм.

функциональные формы, связанные с введёнными вертикальными формам как функционалы, связанные с дифференциальными функциями.

Пусть $\omega^k = \int_x \hat{\omega}^k$ – функциональная k -форма, соответствующая вертикальной k -форме $\hat{\omega}^k$. Вариационный дифференциал формы ω^k есть функционал $(k+1)$ -формы, соответствующей вертикальному дифференциалу формы $\hat{\omega}^k$. Основные свойства следуют из свойств вертикальных дифференциалов, и таким образом мы получаем вариационный комплекс. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс

$$0 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^0 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^1 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^2 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^3 \xrightarrow{\delta} \dots \quad (1.85)$$

на пространстве функциональных форм на M (см. Рис. 1.2).

Особый интерес в задачах теоретической физики представляют следующие функциональные формы: $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ [69]. В рассматриваемой нами задаче, после разрешения связей, мы получаем функциональную 1-форму как обобщение дифференциальной картановской формы для динамических систем

$$\omega^1 = \int_{t,x} \left[\pi_\gamma \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right) \right) \mathbf{d}\gamma - u \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right), \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)' \right) \mathbf{d}\pi_u \right]. \quad (1.86)$$

Уравнения движения получаются как условие замкнутости 1-формы:

$\delta\omega^1 = 0$. Но, как мы покажем ниже, существует такая 0-форма ω^0

$$\omega^0 = \int_{t,x} \hat{\omega}^0(t, \gamma, \pi_u) \quad (1.87)$$

что $\delta\omega^0 = \omega^1$, то есть ω^1 является не только замкнутой формой, она является *точной формой*.

Действуя оператором вариационного дифференциала δ на форму ω^0 (1.87), получаем

$$\delta\omega^0 = \int_{t,x} \left[\frac{\delta\omega^0}{\delta\gamma} d\gamma + \frac{\delta\omega^0}{\delta\pi_u} d\pi_u \right]. \quad (1.88)$$

Отсюда мы находим дифференциальные условия на $\hat{\omega}^0(t, \gamma, \pi_u)$

$$\frac{\partial\hat{\omega}^0}{\partial\gamma} = \pi_\gamma \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right) \right), \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial\hat{\omega}^0}{\partial\pi_u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\hat{\omega}^0}{\partial\pi'_u} \right) = -u \left(t, \pi_u, \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right), \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)' \right). \quad (1.90)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.89), (1.90) можно решить аналитически:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^0 = & \int_{t,x} \gamma \left[c(t) - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{n/(n-1)} \pi_u^{(2n-1)/(n-1)} - \left(\frac{\pi'_u}{\gamma} \right)^2 \right]^{1/2} \\ & + \int_{t,x} \pi'_u \arcsin \left[\frac{\pi'_u}{\gamma} \left(c(t) - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{n} \right)^{n/(n-1)} \pi_u^{(2n-1)/(n-1)} \right)^{-1/2} \right], \end{aligned}$$

где $\pi_u(\alpha, \dot{\alpha}, \alpha', \alpha''; \beta, \beta', \dot{\beta}', \beta''; \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dot{\gamma}')$ в исходных переменных есть

$$\pi_u = \frac{1}{\alpha\gamma} \left[\left(\frac{\beta' - \dot{\gamma}}{\alpha} \right)' + \left(\frac{2\beta\dot{\gamma} - (\alpha^2 + \beta^2)'}{2\alpha\gamma} \right)' \right]. \quad (1.91)$$

Мы получили обобщённый вариационный комплекс Де Рама

$$0 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^0 \xrightarrow{\delta} \Lambda_*^1 \xrightarrow{\delta} 0, \quad (1.92)$$

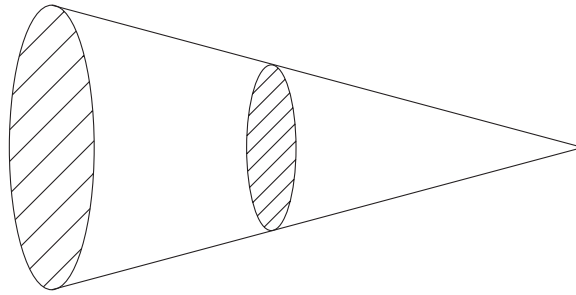


Рис. 1.3: Функциональная форма ω^1 , обобщение дифференциальной формы Картана, является не только замкнутой формой, она оказывается точной. Обобщённая группа когомологий Де Рама является тривиальной.

поскольку оператор вариационного дифференциала δ нильпотентен: $\delta^2 = 0$. Следовательно, обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна (см. Рис. 1.3).

1.4 Выводы

В настоящей Главе подготовлен необходимый для дальнейшего изучения физических проявлений пространства-времени математический аппарат дифференциальной геометрии и конформной геометрии. Введены понятия и обозначения, которые будут использоваться на протяжении всего дальнейшего изложения работы.

Изучена динамическая полевая система со связями, лагранжиан которой представляет собой гауссову кривизну двумерного пространства-времени в n -й степени. Поскольку задача представляет собой динамическую систему с высшими производными, для перехода к гамильтоновой форме, применён обобщённый метод Остроградского. Для исследования задачи оказался эффективен математический аппарат теории ва-

риационных комплексов, являющийся обобщением дифференциальных комплексов Де Рама. Вариационный дифференциал определяет точный комплекс на пространстве функциональных форм. Показано, что функциональная форма ω^1 , обобщение дифференциальной формы Картана, является не только замкнутой формой, она оказывается точной. Тем самым доказано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. С физической точки зрения получается, что функционал действия не задаёт какой-либо динамической задачи.

Глава 2

Время в

Геометродинамике

Геометродинамика есть теория пространства и времени по своей сущности. Информация о времени содержится в геометрических характеристиках пространства [70]:

“Время имеет двойное лицо как Время-бог, Янус, в античных представлениях. Одно качество содержит две интерпретации – хронометрическую и динамическую”.

Проблема глобального времени Вселенной является основной в Общей Теории Относительности [71]–[76]. В однородных моделях глобальное время строится редукцией расширенного фазового пространства [77]–[82]. Времени, как такового, не существует в Природе [83]. В современной физике ньютоновская концепция абсолютного времени, вполне пригодная для решения задач классической механики, ведёт к неудовлетворительной интерпретации современных наблюдательных данных. Нет аб-

страктного времени как меры происходящих событий, но, наоборот, изменчивость происходящих событий является мерилom времени. Информация о времени и соответствующем генераторе временных сдвигов (гамильтониане) содержится во внутренней геометрии, задаваемой метрическим тензором пространства, и внешней геометрии, задаваемой тензором внешней кривизны пространства. К примеру, Брайс ДеВитт [84] и Джон Уилер [85] идентифицировали космологическое время с космологическим масштабным фактором.

Вернер Гайзенберг в Главе “Квантовая механика и беседа с Альбертом Эйнштейном (1925–1926)” своей книги [86] цитирует утверждение Альберта Эйнштейна:

“Но, в принципе, довольно неправильно пытаться строить теорию только на наблюдаемых величинах. В реальности, всё не так происходит. Именно теории решать, что можно измерять”.

Этот разговор между двумя великими учёными о статусе наблюдаемых величин в теории (квантовой механике или Общей Теории Относительности) остаётся актуальным и поныне.

2.1 Многострелочное время в Геометродинамике

Переход к конформным переменным Дирака означает переход к физическим переменным. В духе идей конформной гравитации [41], конформная метрика является метрикой физического пространства. Выделим

внутреннее время из 3-геометрии, выполнив конформное преобразование с помощью некоторой гладкой функции $\phi(x)$:

$$\gamma_{ij} := \phi^4 \bar{\gamma}_{ij}. \quad (2.1)$$

Конформное отображение не является координатным диффеоморфизмом, но сохраняются углы между векторами и отношение величин в точках с одинаковыми координатами. Дирак, в поисках динамических степеней свободы гравитационного поля, ввёл *конформные переменные* $\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}$ [87]

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt[3]{\gamma}}, \quad \tilde{\pi}^{ij} := \sqrt[3]{\gamma} \left(\pi^{ij} - \frac{1}{3} \pi \gamma^{ij} \right), \quad (2.2)$$

определяя конформный фактор через детерминант метрики (2.1)

$$\phi = \gamma^{1/12}. \quad (2.3)$$

Из них имеется пять независимых пар $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij})$ на каждую точку пространства, так как детерминант конформной метрики равен единице, и матрица, составленная из конформных плотностей импульсов является бесследовой:

$$\tilde{\gamma} := \det ||\tilde{\gamma}_{ij}|| = 1, \quad \tilde{\pi} := \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\pi}^{ij} = 0.$$

Оставшаяся шестая пара (D, π)

$$D := -\frac{2}{3} \ln \sqrt{\gamma}, \quad \pi := 2K \sqrt{\gamma} \quad (2.4)$$

является канонически сопряжённой. Суть перехода (2.2) состоит в том, что метрике $\tilde{\gamma}_{ij}$ отвечает целый класс конформно эквивалентных римановых 3-метрик γ_{ij} . Выделенная каноническая пара (D, π) (2.4) имеет ясный физический смысл: переменные представляют собой полевое внутреннее время и гамильтонову плотность гравитационного поля.

Гамильтонова связь в новых переменных:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\perp} := \tilde{\pi}_{ij}\tilde{\pi}^{ij}\phi^{-6} + 8\phi\tilde{\Delta}\phi - \tilde{R}\phi^2 - \frac{2}{3}K^2\phi^6, \quad (2.5)$$

конформные импульсные связи:

$$\tilde{\mathcal{H}}^i := -2\phi^{-4}\tilde{\nabla}_j\tilde{\pi}^{ij} - \frac{4}{3}\phi^2\tilde{\nabla}^i K. \quad (2.6)$$

Здесь $\tilde{\nabla}_i$ – конформная связность, согласованная с конформной метрикой: $\tilde{\nabla}_k\tilde{\gamma}_{ij} = 0$, $\tilde{\Delta} \equiv \tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}^i$ – конформный лапласиан, \tilde{R} – конформный скаляр Риччи

$$R = \phi^{-4}\tilde{R} - 8\phi^{-5}\tilde{\Delta}\phi.$$

Предполагается, априорно, что скаляр внешней кривизны является конформным инвариантом: $\tilde{K} = K$ [88].

2.2 Внутреннее глобальное время

Преобразования Дирака (2.2), (2.4) имеют ограниченную область применимости: их можно использовать для координатной системы с безразмерным детерминантом метрики. Например, часто удобно выполнять расчёты в сферической системе координат. Тогда приходится применять сферические координаты Шварцшильда с единичным детерминантом метрики [89]

$$x^1 = \frac{r^3}{3}, \quad x^2 = -\cos\theta, \quad x^3 = \varphi.$$

Мера объёма в этих координатах

$$r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = dx^1 dx^2 dx^3.$$

Каноническая переменная D (2.4) играет роль внутреннего времени в миксмастерной модели Мизнера [90]. Она пропорциональна объёму вселенной как функции координатного времени t . Однако, в общем случае, как мы видим из (2.4), D не является скаляром, а $\tilde{\gamma}_{ij}$ не есть тензор. Для преодоления этих трудностей, мы воспользуемся плодотворной идеей биметрического формализма [91]. Биметрические теории основываются на введении некоторой вспомогательной фоновой метрики с компонентами $f_{ij}(\mathbf{x})$. Возьмём нединамическую метрику, Ли-постоянную вдоль эволюционного вектора координатного времени $\dot{f}_{ij} = 0$. Фоновая метрика плоского пространства успешно используется для описания асимптотически плоских пространств [48]. Декартовы координаты естественно подходят для описания таких задач. Первоначально развитие таких теорий было инициировано проблемой энергии в теории гравитации Эйнштейна. Условие статичности не ограничивает выбор фоновой метрики только плоского пространства. Биметрический подход является вполне подходящим и для решения космологических проблем, когда для каждой локальной области пространства можно выбрать свою фоновую метрику.

Рассмотрим общий случай пространственного многообразия с произвольной топологией. Имеем локальное касательное пространство $\mathcal{T}(\Sigma_t)_x$ как фоновое пространство для каждой локальной области многообразия (Σ_t) . В каждом касательном пространстве зададим набор трёх линейно независимых векторов e_a^i , занумеровав их латинскими индексами a, b . Компоненты фоновой метрики касательного пространства:

$$e_a^i e_{bi} =: f_{ab}.$$

Вместе с этой триадой, введём три взаимных вектора e_i^a , определив их

условиями ортогональности

$$e_i^a e_b^i = \delta_b^a, \quad e_i^a e_a^j = \delta_i^j.$$

Далее, мы можем построить три линейно независимые относительно диффеоморфизмов формы Картана

$$\omega^a(\mathbf{d}) = e_i^a \mathbf{d}x^i. \quad (2.7)$$

Фоновая метрика задаётся дифференциальными формами (2.7):

$$\mathbf{f} := f_{ab} \omega^a(\mathbf{d}) \otimes \omega^b(\mathbf{d}) = f_{ij} \mathbf{d}x^i \otimes \mathbf{d}x^j, \quad (2.8)$$

где компоненты метрического тензора в координатном базисе

$$f_{ij} = f_{ab} e_i^a e_j^b.$$

Компоненты обратной фоновой метрики f^{ij} удовлетворяют условию ортогональности

$$f^{ik} f_{kj} = \delta_j^i.$$

Теперь мы можем сравнивать фоновую метрику \mathbf{f} с метрикой γ гравитационного поля в каждой точке многообразия Σ_t в силу биективности отображения каждой локальной области

$$\Sigma_t \longleftrightarrow \mathcal{T}(\Sigma_t)_x.$$

Связность Леви-Чивита $\bar{\nabla}_k$ согласована с фоновой метрикой f_{ij} :

$$\bar{\nabla}_k f_{ij} = 0.$$

Определим унимодулярные конформные переменные Дирака $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij})$ следующим образом [92]:

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt[3]{\gamma/f}}, \quad \tilde{\pi}^{ij} := \sqrt[3]{\frac{\gamma}{f}} \left(\pi^{ij} - \frac{1}{3} \pi \gamma^{ij} \right), \quad (2.9)$$

где, дополнительно к детерминанту γ , определённого в (1.64), добавился детерминант фоновой метрики f :

$$f := \det \|f_{ij}\|.$$

Теперь конформная метрика $\tilde{\gamma}_{ij}$ (2.9) становится тензорным полем, преобразующимся по тензорному представлению группы диффеоморфизмов. Масштабированная переменная (γ/f) есть скалярное поле, поскольку является инвариантом относительно диффеоморфизмов. Докажем теперь вышеприведённые утверждения. Относительно координатных преобразований $(x^i) \mapsto (x^{i'})$ детерминанты метрик преобразуются как

$$\gamma' = (\det J)^2 \gamma, \quad f' = (\det J)^2 f.$$

Детерминант матрицы перехода

$$J_{i'}^i := \left\| \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right\|$$

есть якобиан $(\det J)$. Следовательно, видим, что отношение детерминантов

$$\gamma'/f' = \gamma/f$$

есть инвариант относительно рассматриваемых диффеоморфизмов.

Добавим к унимодулярным конформным переменным (2.9) каноническую пару: *локальное внутреннее время* D и плотность гамильтониана π следующим образом:

$$D := -\frac{2}{3} \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}, \quad \pi := 2K \sqrt{\gamma}. \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) задают масштабированное отображение Дирака

$$(\gamma_{ij}, \pi^{ij}) \mapsto (D, \pi; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}). \quad (2.11)$$

Риманово суперпространство метрик (3M) задано на компактном хаусдорфовом пространстве Σ_t . Обозначим множество, точки которого представляют все возможные римановы метрики, как $\text{Riem}({}^3M)$. Так как одна и та же риманова метрика может быть задана в разных координатных системах, отождествим все точки, связанные координатными преобразованиями группы диффеоморфизмов $\text{Diff}({}^3M)$. Множество, получаемое из некоторой рассматриваемой точки координатными преобразованиями группы, называется её орбитой. Суперпространство Уилера — ДеВитта определяется следующим образом:

$$\mathfrak{G}({}^3M) := \text{Riem}({}^3M)/\text{Diff}({}^3M).$$

Факторизуя $\mathfrak{G}({}^3M)$ с помощью группы конформных преобразований $\text{Conf}({}^3M)$ метрик гиперповерхности, мы получим пространство Тейхмюллера конформных структур [93]

$$\tilde{\mathfrak{G}}({}^3M) := \mathfrak{G}({}^3M)/\text{Conf}({}^3M).$$

Скобки Пуассона (1.71) между новыми переменными:

$$\{D(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.12)$$

$$\{\tilde{\gamma}_{ij}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}^{kl}(t, \mathbf{x}')\} = \tilde{\delta}_{ij}^{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.13)$$

$$\{\tilde{\pi}^{ij}(t, \mathbf{x}), \tilde{\pi}^{kl}(t, \mathbf{x}')\} = \frac{1}{3}(\tilde{\gamma}^{kl} \tilde{\pi}^{ij} - \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\pi}^{kl}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{\delta}_{ij}^{kl} := \delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k - \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{kl} \tilde{\gamma}_{ij}$$

— конформная дельта-функция Кронекера, обладающая свойствами

$$\tilde{\delta}_{ij}^{ij} = 5, \quad \tilde{\delta}_{kl}^{ij} \tilde{\delta}_{mn}^{kl} = \tilde{\delta}_{mn}^{ij}, \quad \tilde{\delta}_{ij}^{kl} \tilde{\gamma}_{kl} = \tilde{\delta}_{ij}^{kl} \tilde{\gamma}^{ij} = 0, \quad \tilde{\delta}_{ij}^{kl} \tilde{\pi}^{ij} = \tilde{\pi}^{kl}.$$

Матрица $\tilde{\gamma}^{ij}$ является обратной конформной метрикой, то есть,

$$\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{\gamma}_{jk} = \delta_k^i, \quad \tilde{\gamma}^{ij} = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{f}}\gamma^{ij}.$$

Имеется только пять независимых пар $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij})$ на каждую точку пространства в силу следующих свойств

$$\tilde{\gamma} := \det ||\tilde{\gamma}_{ij}|| = f, \quad \tilde{\pi} := \tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\pi}^{ij} = 0.$$

Генераторы $(D(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t))$ формируют подалгебру квадратичной алгебры Ли (2.12) – (2.14).

Отметим, что проблемы времени и сохраняющихся интегралов движения не существует в асимптотически плоских мирах [94, 95]. Время измеряется часами наблюдателей, располагающихся на достаточно большом расстоянии от гравитирующих объектов. В этом случае супергамильтониан (1.67), построенный на связях, дополняется поверхностными интегралами на бесконечности. Поэтому мы уделяем наше внимание только проблемам космологии.

Для выполнения процедуры депараметризации, используем формулы преобразования (2.9) и получим

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^{ij} \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} &= \left(\pi^{ij} - \frac{1}{3} \pi \gamma^{ij} \right) \frac{d}{dt} \gamma_{ij} + \sqrt[3]{\gamma} \left(\pi^{ij} - \frac{1}{3} \pi \gamma^{ij} \right) \gamma_{ij} \frac{d}{dt} \left(\gamma^{-1/3} \right) \\ &= \pi^{ij} \frac{d}{dt} \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \pi \frac{d}{dt} (\ln \gamma). \end{aligned}$$

Далее, используя переменные (2.10), получим

$$\pi^{ij} \frac{d}{dt} \gamma_{ij} = \tilde{\pi}^{ij} \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} - \pi \frac{d}{dt} D.$$

ADM функционал (1.66) принимает вид

$$S_{\text{ADM}} = \int_{t_I}^{t_0} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left[\tilde{\pi}^{ij} \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} - \pi \frac{d}{dt} D - N \tilde{\mathcal{H}}_{\perp} - N^i \tilde{\mathcal{H}}_i \right]. \quad (2.15)$$

След плотности импульсов π входит в конформную гамильтонову связь (2.5) квадратично, следовательно, выбрав знак плюс, выразим его из связи

$$\pi[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, D] = \sqrt{6\gamma} \left[\phi^{-12} \tilde{\pi}_{ij} \tilde{\pi}^{ij} + 8\phi^{-5} \tilde{\Delta}\phi - \phi^{-4} \tilde{R} \right]^{1/2}. \quad (2.16)$$

Выбрав D в качестве времени и задавая равенство временных интервалов

$$dD = dt,$$

мы можем частично редуцировать действие (2.15). Подставляя π (2.16) в действие ADM (2.15), мы получаем функциональную пресимплектическую 1-форму с локальным временем D [96]

$$\omega^1 = \int_{\Sigma_D} d^3x \left[\tilde{\pi}^{ij} \mathbf{d}\tilde{\gamma}_{ij} - \pi(\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}, D) \mathbf{d}D \right]. \quad (2.17)$$

Определив интеграл от $\pi(x)$ по гиперповерхности Σ_t в качестве гамильтониана $H(x)$, можем найти глобальное время T . Выразим нулевую моду скалярного поля $D(x)$:

$$D(x) = \langle D \rangle(t) + \bar{D}(x), \quad (2.18)$$

где его среднее значение по гиперповерхности Σ_t

$$\langle D \rangle := \frac{\int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{\gamma}(y) D(y)}{\int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{\gamma}(y)}. \quad (2.19)$$

Второй член $\bar{D}(x)$ в (2.18) является остаточным значением поля $D(x)$ с нулевым средним по гиперповерхности Σ_t . Теперь мы можем определить глобальное время

$$T(t) := \langle D \rangle(t) = -\frac{2}{3} \langle \ln \sqrt{\gamma/f} \rangle \quad (2.20)$$

как среднее значение по гиперповерхности Σ_t в каждый момент времени t . Коммутатор глобального времени $T(t)$ с интегральной характеристикой $P(t)$ поля $\pi(x)$

$$P(t) := \int_{\Sigma_t} d^3x \pi^{ij}(x) \gamma_{ij}(x) \quad (2.21)$$

равен минус единице

$$\{T, P\} = -1,$$

значит, они составляют глобальную каноническую пару. Для доказательства вычислим функциональные производные функционалов, заданных в банаховом пространстве, по компонентам метрики. Воспользовавшись формулами для вариаций

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \gamma\gamma^{ij}\delta\gamma_{ij} = -\gamma\gamma_{ij}\delta\gamma^{ij}, & \delta\sqrt{\gamma} &= \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\delta\gamma_{ij}, \\ \delta\gamma^{ij} &= -\gamma^{ik}\gamma^{jl}\delta\gamma_{kl}, & \frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}(x)}V_t &= \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}(x)\gamma^{ij}(x), \end{aligned}$$

найдем функциональные производные отношения двух функционалов (2.19) по компонентам метрики

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}(x)} \langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \rangle \\ &= \frac{1}{2V_t} \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \left(\ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}(x) + 1 - \langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Функциональные производные P (2.21) по компонентам плотности импульсов дают компоненты метрического тензора

$$\frac{\delta P}{\delta\pi^{ij}(x)} = \gamma_{ij}(x). \quad (2.23)$$

Вычислим теперь скобки Пуассона функционалов (2.19) и (2.21) с использованием производных (2.22) и (2.23)

$$\left\{ \langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}[\gamma_{ij}] \rangle, P[\gamma_{ij}, \pi^{ij}] \right\} = \frac{3}{2}.$$

Выражение может быть переписано как

$$-\frac{2}{3} \left\{ \ln \left\langle \sqrt{\frac{\gamma}{f}} [\gamma_{ij}] \right\rangle, P[\gamma_{ij}, \pi^{ij}] \right\} = \{T, P\} = -1. \quad (2.24)$$

Таким образом, мы вычислили искомое коммутационное соотношение и получили глобальное время (2.20), которое является скаляром. Рассмотрим вариацию T (2.20) по отношению к диффеоморфизму

$$\delta \gamma_{ij} = \mathcal{L}_{\mathbf{N}} \gamma_{ij} \equiv \nabla_i N_j + \nabla_j N_i.$$

В результате, найдём

$$\begin{aligned} \delta \left\langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \right\rangle &= \frac{1}{2V_t} \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i) \\ &\times \left(\ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}(x) + 1 - \left\langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Интегрируя выражение (2.25) по гиперповерхности Σ_t , мы получаем интеграл от дивергентного члена, который равен нулю

$$\frac{1}{V_t} \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\gamma^{ij}(x) N_j \left(\ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}(x) + 1 - \left\langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \right\rangle \right) \right] = 0.$$

Таким образом мы доказали, что глобальное время T (2.20) является скаляром, то есть, оно сохраняется по отношению к диффеоморфизмам.

Выразим нулевую моду поля $\pi(x)$, представляя его в виде суммы

$$\pi(x) = \sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle + \bar{\pi}(x), \quad (2.26)$$

где среднее значение $\pi(x)$ по гиперповерхности Σ_t

$$\langle \pi \rangle := \frac{\int_{\Sigma_t} d^3y \pi(y)}{\int_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{\gamma}(y)}. \quad (2.27)$$

Второй член в (2.26) есть остаток поля $\pi(x)$ с нулевым средним по гиперповерхности Σ_t . Таким образом, фазовое пространство Γ_D отображается

на фазовое пространство $\bar{\Gamma}$ после выделения глобальных переменных T и P :

$$(D, \pi; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}) \mapsto (T, P; \bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}).$$

Скобки Пуассона переменных $(T, P, \bar{D}, \bar{\pi})$ нелинейные

$$\{T, P\} = -1, \quad \{\bar{D}(x), P\} = 0, \quad (2.28)$$

$$\{\bar{\pi}(x), P\} = 0, \quad \{\bar{\pi}(x), T\} = \frac{3}{2V_t} \sqrt{\gamma}(x) \bar{D}(x), \quad (2.29)$$

$$\{T, \bar{D}(x)\} = 0, \quad \{\bar{\pi}(x), \bar{D}(y)\} = -\frac{1}{V_t} \sqrt{\gamma}(x). \quad (2.30)$$

Здесь V_t – объём гиперповерхности Σ_t . Вычислим скобки

$$\{\bar{\pi}(x), P\} = \{\pi(x), \int_{\Sigma_t} d^3y \pi(y)\} - \{\sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle, P\}.$$

Первый член обращается в нуль, поэтому рассмотрим второй. Для этого нам потребуется вычислить следующие функциональные производные

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} (\sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle) &= \frac{1}{2} \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \delta(x - x') \langle \pi \rangle \\ &+ \sqrt{\gamma}(x) \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} \langle \pi \rangle, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} \langle \pi \rangle = \frac{1}{V_t} \pi^{ij}(x') - \frac{1}{2V_t} \sqrt{\gamma}(x') \gamma^{ij}(x') \langle \pi \rangle, \quad (2.32)$$

$$\frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x')} P = \gamma_{ij}(x'), \quad \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} P = \pi^{ij}(x'), \quad (2.33)$$

$$\frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x')} (\sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle) = \frac{\sqrt{\gamma}(x)}{V_t} \gamma_{ij}(x'). \quad (2.34)$$

Собирая все члены в (2.31) – (2.34), находим

$$\begin{aligned} \{\bar{\pi}(x), P\} &= \frac{3}{2} \sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle + \sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle \\ &- \frac{3}{2} \sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle - \sqrt{\gamma}(x) \langle \pi \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Вычислим теперь скобки между остаточными переменными

$$\{\bar{\pi}(x), \bar{D}(y)\} = \{\bar{\pi}(x), \bar{D}(y)\} - \{\bar{\pi}(x), \langle D \rangle\}.$$

Для их вычисления требуется найти следующие функциональные производные

$$\frac{\delta}{\delta \pi^{ij}(x')} \bar{\pi}(x) = \gamma_{ij}(x) \delta(x - x') - \frac{1}{V_t} \sqrt{\gamma}(x) \gamma_{ij}(x'), \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} \bar{D}(y) &= \frac{1}{3} (y) \gamma^{ij}(y) \delta(y - x') \\ &\quad - \frac{\sqrt{\gamma}(x') \gamma^{ij}(x')}{3V_t} \left(\ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}}(x') + 1 - \langle \ln \sqrt{\frac{\gamma}{f}} \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

В результате, получаем

$$\{\bar{\pi}(x), \bar{D}(y)\} = -\frac{1}{V_t} \sqrt{\gamma}(x). \quad (2.38)$$

Наконец, мы можем выполнить редукцию фазового пространства $\bar{\Gamma}$ на фазовое пространство $\tilde{\Gamma}_D$ коразмерности 2 и процедуру депараметризации

$$(T, P; \bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}) \mapsto (\bar{D}, \bar{\pi}; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}).$$

Таким образом получается редуцированное фазовое пространство как кокасательное расслоение. Гамильтониан $H[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}]$ с гамильтоновой плотностью

$$\mathcal{H}[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; x) = \sqrt{6\gamma} \left[\phi^{-12} \tilde{\pi}_{ij} \tilde{\pi}^{ij} + 8\phi^{-5} \tilde{\Delta} \phi - \phi^{-4} \tilde{R} \right]^{1/2} \quad (2.39)$$

явно зависит от глобального времени T . Функции поля $\phi(x)$ в (2.39) можно выразить через глобальное время и остаточные поля.

Далее, при изучении динамики гравитационного поля, выберем полугеодезическое слоение, игнорируя действие генераторов диффеоморфизмов. Получим гамильтонову систему на контактном многообразии с

глобальным внутренним временем T без связей. Энергия вселенной не сохраняется и экспоненциально растёт во времени T . Гамильтонов поток генерируется гамильтонианом на квадратичной алгебре Ли – Пуассона (2.13), (2.14) генераторов $(\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij})$ [97]:

$$\frac{d}{dT} \tilde{\gamma}_{ij}(x) = \int_{\Sigma_t} d^3x' \{ \tilde{\gamma}_{ij}(x), \tilde{\pi}^{kl}(x') \} \frac{\delta}{\delta \tilde{\pi}^{kl}(x')} H, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \tilde{\pi}^{ij}(x) &= \int_{\Sigma_t} d^3x' \{ \tilde{\pi}^{ij}(x), \tilde{\pi}^{kl}(x') \} \frac{\delta}{\delta \tilde{\pi}^{kl}(x')} H \\ &+ \int_{\Sigma_t} d^3x' \{ \tilde{\pi}^{ij}(x), \tilde{\gamma}_{kl}(x') \} \frac{\delta}{\delta \tilde{\gamma}_{kl}(x')} H. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Вычислим функциональные производные гамильтониана по компонентам плотности импульса:

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{\pi}^{kl}(x')} H[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}] = \frac{6\gamma(x')}{\phi^{12}(x') \mathcal{H}[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; x']} \tilde{\pi}_{kl}(x'). \quad (2.42)$$

Получаем дифференциальный закон эволюции конформной метрики (2.40):

$$\frac{d}{dT} \tilde{\gamma}_{ij}(x) = \frac{12\gamma(x) \tilde{\pi}_{ij}(x)}{\phi^{12}(x) \mathcal{H}[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; x]}. \quad (2.43)$$

Таким образом, соотношение между производной обобщённых координат поля $\tilde{\gamma}_{ij}$ по глобальному времени T и сопряжёнными плотностями импульсов $\tilde{\pi}^{ij}$ получены.

Найдём теперь скорость изменения конформных плотностей импульсов. Первый член в (2.41) вычисляется сразу

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma_t} d^3x' \{ \tilde{\pi}^{ij}(x), \tilde{\pi}^{kl}(x') \} \frac{\delta}{\delta \tilde{\pi}^{kl}(x')} H \\ &= - \frac{2\gamma(x) \tilde{\gamma}^{ij}(x) \tilde{\pi}^{kl}(x) \tilde{\pi}_{kl}(x)}{\phi^{12}(x) \mathcal{H}[\phi; \tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; x]}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Выпишем далее выражения для функциональных производных гамильтониана по компонентам конформной метрики $\tilde{\gamma}_{kl}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}_{kl}(x)} H[\phi; \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}] &= \int_{\Sigma_t} d^3y \left(-\frac{3\gamma(y)}{\phi^4(y)\mathcal{H}(y)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}_{kl}(x)} \tilde{R}[\tilde{\gamma}_{ij}, y) \right. \\ &+ \left. \frac{24\gamma(y)}{\phi^5(y)\mathcal{H}(y)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}_{kl}(x)} \tilde{\Delta}_y \phi(y) \right). \end{aligned}$$

Функциональные производные скаляра Риччи по компонентам конформной метрики:

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}_{kl}(x)} R[\tilde{\gamma}_{ij}; y) = \left(-\tilde{R}^{kl}[\tilde{\gamma}_{kl}; y) + \tilde{\gamma}^{kl}(y) \tilde{\Delta}_y - \tilde{\nabla}_y^k \tilde{\nabla}_y^l \right) \delta(x - y).$$

Суммируя все эти члены, находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}_{kl}(x)} H[\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}] &\frac{3\gamma(x)}{\phi^4(x)\mathcal{H}(x)} \tilde{R}^{kl} \\ &+ 3 \left(\tilde{\nabla}_x^k \tilde{\nabla}_x^l - \tilde{\gamma}^{kl}(x) \tilde{\Delta}_x \right) \left(\frac{\gamma(x)}{\phi^4(x)\mathcal{H}(x)} \right) \\ &+ 12(2\tilde{\gamma}^{km}\tilde{\gamma}^{ln} - \tilde{\gamma}^{kl}\tilde{\gamma}^{mn}) \tilde{\nabla}_m \left(\frac{\gamma(x)}{\phi^5(x)\mathcal{H}(x)} \right) \tilde{\nabla}_n \phi(x). \quad (2.45) \end{aligned}$$

Окончательно, принимая во внимание коммутационные соотношения между конформными фазовыми переменными, получим производные компонент конформных плотностей импульсов по глобальному времени

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \tilde{\pi}^{ij}(x) &= -\frac{6\gamma(x)}{\phi^4(x)\mathcal{H}(x)} \left(\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{6} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{R} \right) \\ &- \frac{2\gamma(x)}{\phi^{12}(x)\mathcal{H}(x)} \tilde{\gamma}^{ij}(x) \tilde{\pi}^{kl} \tilde{\pi}_{kl} \\ &- 3 \left(\tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}^j + \tilde{\nabla}^j \tilde{\nabla}^i - \frac{4}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}_k \right) \left[\frac{\gamma(x)}{\phi^4(x)\mathcal{H}(x)} \right] \\ &- 24 \left(\tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} + \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\gamma}^{il} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{\gamma}^{kl} \right) \tilde{\nabla}_l \phi \tilde{\nabla}_k \left[\frac{\gamma(x)}{\phi^5(x)\mathcal{H}(x)} \right]. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Для получения вышеприведённых формул для гамильтонова потока рассмотрим вариации символов Кристоффеля

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\gamma^{kl}(\nabla_i(\delta\gamma_{lj}) + \nabla_j(\delta\gamma_{li}) - \nabla_l(\delta\gamma_{ij})), \\ \delta\Gamma_{ik}^k &= \frac{1}{2}\gamma^{kl}\nabla_i(\delta\gamma_{kl});\end{aligned}\tag{2.47}$$

вариации компонент тензора Римана

$$\delta R_{jkl}^i = \nabla_l(\delta\Gamma_{jk}^i) - \nabla_k(\delta\Gamma_{jl}^i);$$

вариации компонент тензора Риччи с использованием тождества Палатини

$$\delta R_{ij} = \nabla_j(\delta\Gamma_{ik}^k) - \nabla_k(\delta\Gamma_{ij}^k);\tag{2.48}$$

вариации скаляра Риччи

$$\delta R = \delta(R_{ij}\gamma^{ij}) = -R^{ij}(\delta\gamma_{ij}) + \gamma^{ij}\delta R_{ij}.\tag{2.49}$$

Используя формулы (2.47) и (2.48), находим

$$\begin{aligned}\delta R_{ij} &= \frac{1}{2}\nabla_j\nabla_i(\gamma^{kl}\delta\gamma_{kl}) + \frac{1}{2}\nabla_l\nabla^l(\delta\gamma_{ij}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_j(\gamma^{kl}\delta\gamma_{li}) - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i(\gamma^{kl}\delta\gamma_{lj}).\end{aligned}$$

Свёртывая вариацию тензора Риччи, получим

$$\gamma^{ij}\delta R_{ij} = \gamma^{ij}\Delta(\delta\gamma_{ij}) - \nabla^i\nabla^j(\delta\gamma_{ij}),$$

где

$$\Delta := \gamma^{ij}\nabla_i\nabla_j \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

– оператор Лапласа в ковариантной форме. Окончательно, находим иско-
мое выражение для вариации скаляра Риччи (2.49)

$$\delta R = -R^{ij}(\delta\gamma_{ij}) + \gamma^{ij}\Delta(\delta\gamma_{ij}) - \nabla^i\nabla^j(\delta\gamma_{ij}). \quad (2.50)$$

Докажем следующую полезную формулу. Далее, везде будем использо-
вать теорему Остроградского – Гаусса для того, чтобы избавляться от
дивергентных членов

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \Delta_x \delta(x - x') \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x F(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \delta(x - x') \right) \\ &= - \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} (F(x)) \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \delta(x - x') \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \delta(x - x') \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} (F(x)) \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \delta(x - x') \sqrt{\gamma}(x) \Delta_x F(x) = \sqrt{\gamma}(x') \Delta_{x'} F(x'). \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали эрмитовость оператора Лапласа. Ниже нам
потребуется следующие соотношения

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \nabla_x^i \nabla_x^j \delta\gamma_{ij} = \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \gamma^{ki} \gamma^{lj} \nabla_k \nabla_l \delta\gamma_{ij} \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \nabla_k (F(x) \gamma^{ki} \gamma^{lj} \nabla_l \delta\gamma_{ij}) \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ki} \gamma^{lj} \nabla_k F(x) \nabla_l \delta\gamma_{ij} \\ &\quad - \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \nabla_l (\gamma^{ki} \gamma^{lj} \nabla_k F(x) \delta\gamma_{ij}) + \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \nabla^j \nabla^i F(x) \delta\gamma_{ij}. \end{aligned}$$

Вычисляя функциональные производные по метрическим коэффициентам, доказываем полезную формулу для эрмитова оператора

$$\int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \nabla_x^i \nabla_x^j \delta(x - x') = \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \delta(x - x') \nabla_x^i \nabla_x^j F(x).$$

Упрощаем вид интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \Delta_x \phi &= \int_{\Sigma_t} d^3x F(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} \left(F(x) \sqrt{\gamma} \gamma^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) - \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Окончательно, находим функциональные производные

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta \gamma_{ij}(x')} \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) F(x) \Delta_x \phi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij} \delta(x - x') \gamma^{kl} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \\ &+ \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \delta(x - x') \gamma^{ki} \gamma^{lj} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij} \delta(x - x') \Delta_1(F, \phi) \\ &+ \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \delta(x - x') \gamma^{ki} \gamma^{lj} \nabla_k F \nabla_l \phi \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma}(x') \gamma^{ij}(x') \Delta_1(F, \phi) + \sqrt{\gamma}(x') \gamma^{ki}(x') \gamma^{lj}(x') \nabla_k F \nabla_l \phi. \end{aligned}$$

Выше, поскольку F и ϕ скалярные поля, мы заменили частные производные ковариантными и ввели ковариантный оператор Бельтрами

$$\Delta_1(F, \phi) =: \gamma^{kl} \nabla_k F \nabla_l \phi.$$

Найдём соотношение между интервалами внутреннего времени и координатного времени, для чего вычислим производную объёма гиперповерхности по координатному времени

$$\frac{dV_t}{dt} = \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\gamma} = \int_{\Sigma_t} d^3x (-NK + \nabla_i N^i) \sqrt{\gamma}. \quad (2.51)$$

Полученное равенство следует из определения тензора внешней кривизны:

$$(\nabla \cdot \mathbf{N}) - NK = \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{d}{dt} \gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d}{dt} \sqrt{\gamma}.$$

Второй интеграл обращается в нуль в силу теоремы Остроградского – Гаусса

$$\int_{\Sigma_t} d^3x \nabla_i N^i \sqrt{\gamma} = \int_{\Sigma_t} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} (N^i \sqrt{\gamma}) = 0.$$

Следовательно, изменение объёма находится по формуле

$$\frac{dV_t}{dt} = - \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma} NK. \quad (2.52)$$

Условие максимального слоения отвечает равенству нулю скаляра внешней кривизны $K = 0$. Аналогично находится соотношение между интервалами внутреннего времени dD (2.10) и координатного времени dt :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2}{3} (NK - \nabla_i N^i). \quad (2.53)$$

Далее, получим соотношение между интервалами внутреннего глобального времени dT (2.20) и координатного времени dt

$$\frac{dT}{dt} = - \left\langle \frac{dD}{dt} \right\rangle - \left\langle D \frac{d\sqrt{\gamma}}{dt} \right\rangle + \langle D \rangle \frac{dV_t}{dt}. \quad (2.54)$$

Производные, стоящие в формуле (2.54), определены в (2.51), (2.52) и (2.53).

Для исследования роли остаточных членов (2.18) можно рассмотреть метрические возмущения в модели Фридмана. Применим гармонический анализ для исследования линейных возмущений, рассматривая неприводимые представления группы изометрий пространств постоянной кривизны. Собственные функции оператора Бельтрами – Лапласа формируют базис неприводимых представлений групп

$$Y_{nlm}(\chi, \theta, \varphi) = 2^l l! \sqrt{\frac{2(n+1)(n-l)!}{\pi(n+l+1)!}} \sin^l \chi \times C_{n-l}^{l+1}(\cos \chi) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (2.55)$$

Здесь, $C_{n-l}^{l+1}(\cos \chi)$ – полиномы Гегенбауэра и $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферические гармоники. Индексы пробегают следующие значения

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad l = 0, 1, \dots, n; \quad m = -l, -l+1, \dots, l.$$

Приведём здесь первые собственные функции

$$Y_{000} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad Y_{100} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos \chi, \\ Y_{110} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \chi \cos \theta, \quad Y_{11,\pm 1} = \pm \frac{1}{\pi} \sin \chi \sin \theta e^{\pm i\varphi}.$$

Теперь можно разложить остаточные члены по счётному базису $Y_{nlm}(\chi, \theta, \varphi)$ гильбертова пространства

$$\bar{D}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l \gamma_{nlm} Y_{nlm}(\chi, \theta, \varphi), \\ \bar{\pi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l \pi_{nlm} Y_{nlm}(\chi, \theta, \varphi)$$

с коэффициентами γ_{nlm} и π_{nlm} .

2.3 Внешнее глобальное время

Время Йорка определяется как четыре третьих следа тензора внешней кривизны гиперповерхности [88]. Гамильтонова же плотность есть мера объёма гиперповерхности. Проблема состоит в том, что в общем случае она не может быть выражена в явном виде из гамильтоновой связи (эллиптического дифференциального уравнения Лихнеровича – Йорка). Добавим к конформным переменным Дирака (2.2) каноническую пару

$$\tau := \frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} = \frac{4}{3} K, \quad \mathcal{H} := \sqrt{\gamma} \quad (2.56)$$

вместо канонически сопряжённых переменных (D, π) (2.4), так что

$$\{\tau(t, \mathbf{x}), \mathcal{H}(t, \mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.57)$$

Введём глобальное внешнее время как среднее по гиперповерхности двух третьих плотности импульса поля.

$$T := \frac{2}{3} \langle \pi \rangle = \frac{2}{3} \frac{\int_{\Sigma_t} d^3x \pi(x)}{\int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x)} \quad (2.58)$$

и канонически сопряжённый гамильтониан

$$H := \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \equiv V_t. \quad (2.59)$$

Гамильтонианом является объём гиперповерхности V_t , и переменные коммутируют на минус единицу

$$\{T, H\} = -1. \quad (2.60)$$

Для доказательства вычислим скобки Пуассона этих характеристик

$$\left\{ \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{\gamma}(y), \frac{2}{3} \frac{\int_{\Sigma} d^3y \pi(y)}{\int_{\Sigma} d^3y \sqrt{\gamma}(y)} \right\}.$$

Вычислим функциональные производные введённых выше функционалов

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\gamma_{ij}(x)} \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{\gamma}(y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x); \\ \frac{\delta}{\delta\pi^{ij}(x)} \langle \pi \rangle &= \frac{1}{V} \frac{\delta}{\delta\pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma} d^3y \pi(y) \\ &= \frac{1}{V} \frac{\delta}{\delta\pi^{ij}(x)} \int_{\Sigma} d^3y \pi^{ij}(y) \gamma_{ij}(y) = \frac{1}{V} \gamma_{ij}(x). \end{aligned}$$

Значит,

$$\left\{ V, \frac{2}{3} \langle \pi \rangle \right\} = \frac{1}{2V} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma}(x) \gamma^{ij}(x) \gamma_{ij}(x) = 1,$$

скобка Пуассона является канонической.

Йорк предложил условие постоянной средней кривизны (СМК) [88]

$$\tau = \frac{4}{3} K(t) = T = t \quad (2.61)$$

для фиксации пространственно-временного слоения. Поэтому, локальное время τ (2.56) становится глобальным T (2.58). Последний член в конформных импульсных связях (2.6) обращается в нуль. Наложённая калибровка позволяет отщепить продольные компоненты $\tilde{\pi}_L^{ij}$ от поперечных бесследовых ($\tilde{\nabla}_j \tilde{\pi}_{TT}^{ij} = 0$) компонент:

$$\tilde{\pi}^{ij} := \tilde{\pi}_L^{ij} + \tilde{\pi}_{TT}^{ij}.$$

Продольные составляющие $\tilde{\pi}_L^{ij}$ оказываются связанными и подчиняются линейным дифференциальным уравнениям (2.6).

Выразим конформный фактор ϕ через гамильтонову плотность $\phi = \mathcal{H}^{1/6}$ и подставим в гамильтонову связь (2.5)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\perp} &= \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}_{jl} + \tilde{\gamma}_{il} \tilde{\gamma}_{jk}) \tilde{\pi}^{ij} \tilde{\pi}^{kl} \mathcal{H}^{-1} \\ &+ 8\mathcal{H}^{1/6} \tilde{\Delta} \mathcal{H}^{1/6} - \tilde{R} \mathcal{H}^{1/3} - \frac{3}{8} T^2 \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Редуцированное действие ADM (1.66) примет вид

$$S_{\text{reduced}} = \int_{T_I}^{T_0} dT \int_{\Sigma_T} d^3x \left(\tilde{\pi}^{ij} \frac{d\tilde{\gamma}_{ij}}{dT} - \mathcal{H}[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; T] - N^i \tilde{\mathcal{H}}_i[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}] \right).$$

Гамильтонова плотность \mathcal{H} представляет собой функционал конформных переменных $\tilde{\pi}^{ij}$, $\tilde{\gamma}_{ij}$ и функцию времени T . Конформные импульсные связи $\tilde{\mathcal{H}}_i$ являются генераторами изменения координат гиперповерхности. Гамильтониан

$$H := \int_{\Sigma_T} d^3x \mathcal{H}[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; T] \quad (2.63)$$

генерирует динамику гравитационного поля. Хотя гамильтониан не может быть представлен в явном виде, тем не менее нам удастся вычислить его производные по конформным переменным. Это достигается обобщением теоремы о производной неявно заданной функции из математического анализа на функциональный анализ.

Вариация функционала конформной гамильтоновой связи (2.62)

$$\tilde{H}_\perp := \int_{\Sigma_t} d^3x \tilde{\mathcal{H}}_\perp[\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\gamma}_{ij}; \mathcal{H}, T] \quad (2.64)$$

на слое T равна нулю: $\delta\tilde{H}_\perp = 0$:

$$\int_{\Sigma_T} d^3x \left(\frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\mathcal{H}} \delta\mathcal{H} + \frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\tilde{\pi}^{ij}} \delta\tilde{\pi}^{ij} + \frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\tilde{\gamma}_{ij}} \delta\tilde{\gamma}_{ij} \right) = 0. \quad (2.65)$$

Вариация гамильтоновой плотности может быть представлена в виде

$$\delta\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{ij}} \delta\tilde{\pi}^{ij} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\gamma}_{ij}} \delta\tilde{\gamma}_{ij}.$$

После подстановки $\delta\mathcal{H}$ в (2.65) получаем

$$\begin{aligned} \delta\tilde{H}_\perp &= \int_{\Sigma_T} d^3x \left(\frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\mathcal{H}} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{ij}} + \frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\tilde{\pi}^{ij}} \right) \delta\tilde{\pi}^{ij} \\ &+ \int_{\Sigma_T} d^3x \left(\frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\mathcal{H}} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\gamma}_{ij}} + \frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\tilde{\gamma}_{ij}} \right) \delta\tilde{\gamma}_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Из условия независимости вариаций получаем выражения для искомым производных

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{ij}} = -\frac{\delta\tilde{H}_\perp/\delta\tilde{\pi}^{ij}}{\delta\tilde{H}_\perp/\delta\mathcal{H}}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\gamma}_{ij}} = -\frac{\delta\tilde{H}_\perp/\delta\tilde{\gamma}_{ij}}{\delta\tilde{H}_\perp/\delta\mathcal{H}}. \quad (2.66)$$

Гамильтониан H (2.63) генерирует фазовый поток в фазовом пространстве $\Gamma[\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}]$ на скобках Пуассона (2.13), (2.14)

$$\frac{d}{dT}\tilde{\gamma}_{ij}(x) = \{\tilde{\gamma}_{ij}(x), H\} = \int_{\Sigma_T} d^3x' \{\tilde{\gamma}_{ij}(x), \tilde{\pi}^{kl}(x')\} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{kl}}(x'), \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT}\tilde{\pi}^{ij}(x) &= \{\tilde{\pi}^{ij}(x), H\} \\ &= \int_{\Sigma_T} d^3x' \{\tilde{\pi}^{ij}(x), \tilde{\pi}^{kl}(x')\} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\pi}^{kl}}(x') \\ &+ \int_{\Sigma_T} d^3x' \{\tilde{\pi}^{ij}(x), \tilde{\gamma}_{kl}(x')\} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{\gamma}_{kl}}(x'). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Найдём функциональную производную конформной гамильтоновой связи (2.64) по плотности гамильтониана

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{H}_\perp}{\delta\mathcal{H}(x)} &= -\frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_{ik}\tilde{\gamma}_{jl} + \tilde{\gamma}_{il}\tilde{\gamma}_{jk})\tilde{\pi}^{ij}\tilde{\pi}^{kl}\mathcal{H}^{-2}(x) \\ &- \frac{\tilde{R}}{3}\mathcal{H}^{-2/3}(x) + \frac{8}{3}\mathcal{H}^{-5/6}(x)\tilde{\Delta}\mathcal{H}^{1/6}(x) - \frac{3}{8}T^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Функциональные производные конформной гамильтоновой связи по конформным плотностям импульсов:

$$\frac{\delta \tilde{H}_\perp}{\delta \tilde{\pi}^{ij}(x)} = (\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}_{jl} + \tilde{\gamma}_{il} \tilde{\gamma}_{jk}) \tilde{\pi}^{kl} \mathcal{H}^{-1}(x), \quad (2.70)$$

и по конформной метрике:

$$\frac{\delta \tilde{H}_\perp}{\delta \tilde{\gamma}_{ij}(x)} = 2\tilde{\gamma}_{kl} \tilde{\pi}^{ik} \tilde{\pi}^{jl} \mathcal{H}^{-1} - 8\tilde{\nabla}^i \mathcal{H}^{1/6} \tilde{\nabla}^j \mathcal{H}^{1/6} - \tilde{R}^{ij} \mathcal{H}^{1/3}. \quad (2.71)$$

Подставляя функциональные производные (2.69), (2.70), (2.71) в правую часть уравнений (2.66), получим искомые частные производные. Принимая во внимание алгебру Ли – Пуассона образующих (2.13), (2.14), подставим эти производные в (2.67), (2.68) и получим гамильтоновы уравнения эволюции гравитационного поля. Дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{dT} \tilde{\gamma}_{ij}(x) = -\frac{4/\mathcal{H}}{\delta \tilde{H}_\perp / \delta \mathcal{H}} \tilde{\pi}_{ij}(x) \quad (2.72)$$

представляют собой кинематические уравнения конформных переменных (сравни с уравнениями ADM (1.73)). Дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \tilde{\pi}^{ij}(x) &= \frac{4/\mathcal{H}}{\delta \tilde{H}_\perp / \delta \mathcal{H}} \tilde{\gamma}_{kl} \tilde{\pi}^{ik} \tilde{\pi}^{jl} \\ &- \frac{16}{\delta \tilde{H}_\perp / \delta \mathcal{H}} \left(\tilde{\nabla}^i \mathcal{H}^{1/6} \right) \left(\tilde{\nabla}^j \mathcal{H}^{1/6} \right) \\ &- \frac{8/3}{\delta \tilde{H}_\perp / \delta \mathcal{H}} \tilde{\gamma}^{ij} \left(\tilde{\nabla}_k \mathcal{H}^{1/6} \right) \left(\tilde{\nabla}^k \mathcal{H}^{1/6} \right) \\ &- \frac{\mathcal{H}^{1/3}}{\delta \tilde{H}_\perp / \delta \mathcal{H}} \left(2\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{3} \tilde{R} \tilde{\gamma}^{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

представляют собой динамические уравнения (сравни с уравнениями ADM (1.74)). Поскольку вышеприведённые выкладки производились в общем виде, уравнения движения (2.72), (2.73) выглядят громоздко [98]. В сравнении с уравнениями ADM (1.73), (1.74) они не содержат неизвестных

заранее множителей Лагранжа. Они могут быть полезны при рассмотрении модельных примеров и в теории возмущений, где их вид упростится.

Для систем с конечным числом степеней свободы гамильтонова связь становится алгебраическим уравнением. Для однородной и изотропной минисуперпространственной модели редукция была выполнена в работе [99], а для анизотропной модели в [100]. Для космологического сценария $\sqrt{\gamma} \sim a^3$, где a есть глобальный масштабный фактор, скаляр внешней кривизны равен

$$K = -\frac{1}{2N}\gamma^{ij}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} = -\frac{3}{N}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -\frac{3}{Na}\left(\frac{a'}{a}\right),$$

где точка обозначает производную по координатному времени, а штрих производную по конформному времени. В калибровке Йорка (2.61)

$$T = \frac{4}{3}K = -\frac{4}{N}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right).$$

Следовательно, внешнее время пропорционально параметру Хаббла.

Следуя [101], можно определить класс метрик γ некоторой гиперповерхности Σ , сохраняющих объём

$$V_\gamma = \int_\Sigma d^3x \sqrt{\gamma}(x),$$

при конформном отображении

$$\gamma_{ij}(x) \rightarrow \exp(4\hat{\phi}(x))\gamma_{ij}(x). \quad (2.74)$$

Конформный фактор определяется выражением

$$e^{4\hat{\phi}} = \frac{e^{4\phi}}{[\langle e^{6\phi} \rangle_\gamma]^{2/3}}. \quad (2.75)$$

Объём гиперповерхности V_γ сохраняется

$$V_\gamma = \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{\gamma(x)} \rightarrow \frac{1}{\langle e^{6\phi} \rangle_\gamma} \int_{\Sigma_t} d^3x e^{6\phi} \sqrt{\gamma(x)} = V_\gamma \frac{\langle e^{6\phi} \rangle_\gamma}{\langle e^{6\phi} \rangle_\gamma} = V_\gamma.$$

С применением такого класса конформных преобразований развивается направление исследований – динамика формы гиперповерхности [102].

2.4 ВЫВОДЫ

Внутреннее локальное время в Геометродинамике вводится с помощью обобщённого отображения Дирака. Отметим, что задача Коши в Общей Теории Относительности была успешно решена с помощью перехода к конформным переменным [103, 104, 105].

Добавляя в теорию фоновую метрику, получаем локальное время как скалярное поле. Глобальное внутреннее время определяется как среднее по гиперповерхности скалярного поля. Построены редуцированные дифференциальные уравнения эволюции гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.

Время Йорка можно ввести при условии существования слоения постоянной средней кривизны. Глобальное внешнее время определяется как две трети среднего по гиперповерхности плотности импульса гравитационного поля. Канонически сопряжённой характеристикой - гамильтонианом является объём гиперповерхности. Построены редуцированные дифференциальные уравнения эволюции гравитационного поля во внешнем глобальном времени.

Глава 3

Интерпретации современной диаграммы Хаббла

Сверхновая возникает, когда белый карлик, входящий в двойную звёздную систему, аккрецируя массу второй звезды достигает предела Чандрасекара. Природа взрыва такой сверхновой не зависит от её предыстории. Красные смещения $z > 0.1$ достаточно велики для игнорирования пекулярных движений более слабых источников. Сверхновые типа Ia относятся к ярким звёздам, их абсолютная светимость известна с достаточной точностью, поэтому они служат в качестве стандартных свечей для тестирования космологических моделей. Две астрономические коллаборации The Supernova Cosmology Project и High-z Supernova Search Team [106, 107] сравнили результаты своих наблюдений с теоретическими предсказаниями для фотометрических расстояний как функций красных сме-

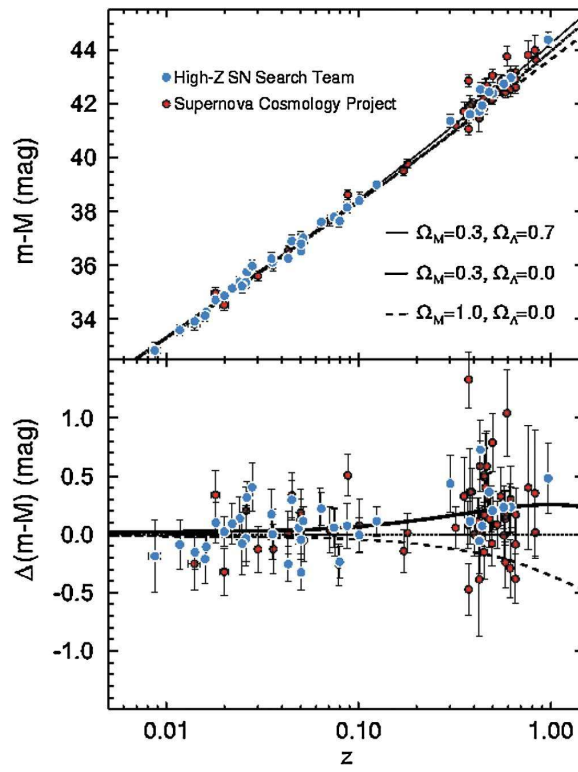


Рис. 3.1: Диаграмма Хаббла, построенная по сверхновым.

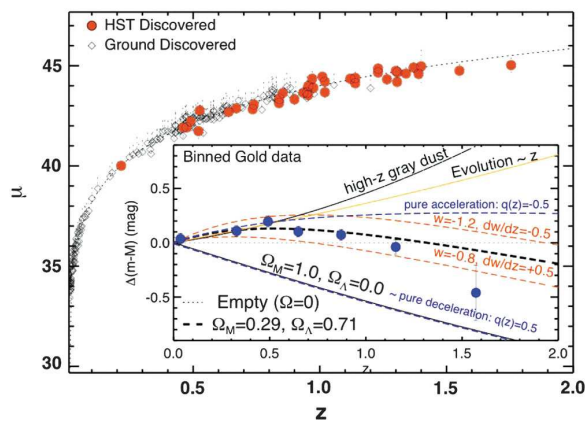


Рис. 3.2: Сверхновые с красными смещениями $z > 1$.

щений (см. Рис. 3.1, 3.2). Интерпретация диаграммы Хаббла на основе стандартной космологической модели со значимыми космологическими параметрами привела космологов к заключению, что Вселенная заполнена, в основном, космической пылью и, так называемой, тёмной энергией, – субстанцией, не встречающейся в Природе. Феноменологический подход не привёл к пониманию, из чего же состоит Вселенная [108, 109].

3.1 Уравнение Фридмана в классической космологии

Представим метрику пространства-времени в виде

$$ds^2 = -\omega^0 \otimes \omega^0 + \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^3 \otimes \omega^3$$

с дифференциальными формами

$$\begin{aligned} \omega^0 &= a(\eta)d\eta, & \omega^1 &= a(\eta)d\chi, & \omega^2 &= a(\eta)\sin\chi d\theta, \\ \omega^3 &= a(\eta)\sin\chi\sin\theta d\phi. \end{aligned}$$

Найдём формы связности $\omega^\mu{}_\nu$ из первого уравнения структуры Картана

$$d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0. \quad (3.1)$$

Ненулевые формы связности:

$$\begin{aligned} \omega^k{}_0 &= \omega^0{}_k = \frac{a'}{a^2}\omega^k, & k &= 1, 2, 3; \\ \omega^2{}_1 &= -\omega^1{}_2 = \frac{\text{ctg}\chi}{a}\omega^2, & \omega^3{}_1 &= -\omega^1{}_3 = \frac{\text{ctg}\chi}{a}\omega^3; \\ \omega^3{}_2 &= -\omega^2{}_3 = \frac{\text{ctg}\theta}{a\sin\chi}\omega^3. \end{aligned}$$

Из второго уравнения структуры Картана

$${}^{(4)}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu \quad (3.2)$$

найдем компоненты тензора Римана ${}^{(4)}R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ пространства-времени

$${}^{(4)}R^0{}_{i0j} = \left(\frac{a'}{a}\right)' \gamma_{ij} \equiv \mathcal{H}' \gamma_{ij}, \quad {}^{(4)}R^i{}_{00j} = \left(\frac{a'}{a}\right)' \delta_j^i \equiv \mathcal{H}' \delta_j^i,$$

где \mathcal{H} – конформный параметр Хаббла,

$${}^{(4)}R^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + \mathcal{H}^2 (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk}),$$

и $R^i{}_{jkl}$ – компоненты тензора Римана пространства. Ненулевые компоненты тензора Риччи пространства-времени

$$R_{00} = -3 \left(\frac{a'}{a}\right)' \equiv -3\mathcal{H}', \quad R_{ij} = (\mathcal{H}' + 2(\mathcal{H}^2 + 1)) \gamma_{ij}. \quad (3.3)$$

Свёртывая тензор Риччи пространства-времени, получим скаляр Риччи

$${}^{(4)}R = R_0^0 + R_i^i = \frac{6}{a^2} (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + 1). \quad (3.4)$$

Уравнение Фридмана получается как “00” -компонента уравнений Эйнштейна.

В стандартной космологической модели уравнение Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.5)$$

используется для фитирования SNe Ia данных. Оно связывает масштаб Вселенной $a(t)$ с плотностью материи ρ . Здесь G – постоянная Ньютона, k – знак кривизны пространства, а точка обозначает производную по координатному времени t . В общем случае, уравнение Фридмана (3.5) представляется в следующем виде

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = H_0^2 [\Omega_\Lambda + \Omega_{\text{curv}} x^{-2} + \Omega_{\text{M}} x^{-3} + \Omega_{\text{rad}} x^{-4} + \Omega_{\text{rigid}} x^{-6}], \quad (3.6)$$

где переменная x задаётся как отношение масштаба $a(t)$ к современному значению $a_0 = 1$:

$$x \equiv \frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}, \quad (3.7)$$

z – красное смещение спектральных линий (наблюдаемая величина),

$$H_0 = h \cdot 10^5 \text{ m/s/Mpc}, \quad h = 0.72 \pm 0.08 \quad (3.8)$$

– постоянная Хаббла. В правой части уравнения Фридмана (3.6) Ω_i – парциальные вклады, соответственно, от Λ -члена, кривизны пространства, пылевидной материи, радиации, сверхжёсткого состояния материи. Для удалённых источников с $z > 1$ интерпретация космологического красного смещения как эффекта Доплера не единственна [110]. Уравнение непрерывности

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p),$$

с уравнением состояния $p = w\rho$, связывающим плотность ρ с давлением p , даёт зависимость плотности от масштабного фактора [111]. Так,

- для межгалактической пыли $p = 0$: $\rho \sim a^{-3}$;
- для радиации $p = \rho/3$: $\rho \sim a^{-4}$;
- для вклада от Λ -члена $p = -\rho$: $\rho \sim \Lambda$;
- для сверхжёсткого состояния материи $p = \rho$: $\rho \sim a^{-6}$.

Данные современных астрономических наблюдений фитируются с использованием космологических параметров [112]

$$\Omega_\Lambda = 0.72, \quad \Omega_M = 0.28.$$

Здесь Ω_M – параметр барионной плотности, Ω_Λ – параметр, отвечающий Λ -члену; они связаны условием: $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. Решение уравнения Фрид-

мана (3.6) с такими параметрами представляется в аналитическом виде

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}} \left[\operatorname{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}. \quad (3.9)$$

Вторая производная масштабного фактора

$$\ddot{a} = \frac{H_0^2 a_0}{2} \left[2\Omega_\Lambda \left(\frac{a}{a_0} \right) - \Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Значит, в современную эпоху Вселенная расширяется с ускорением, поскольку $2\Omega_\Lambda > \Omega_M$; а в прошлом, её ускорение было отрицательным $\ddot{a} < 0$. Это изменение знака ускорения без ясной физической причины озадачивает космологов. Следует отметить, что значение постоянной Хаббла (3.8) довольно сильно разнится в зависимости от методов исследования: анализ угловых флуктуаций микроволнового фона или использование традиционных астрономических методов [7]. Но, согласно формуле (3.10), принципиальное существование точки пергиба графика не зависит от значения H_0 .

Из решения (3.9), принимая во внимание соотношение между масштабным фактором и красным смещением (3.7), следует *соотношение возраст – красное смещение*

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{Arsh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (3.11)$$

Возраст t_0 современной Вселенной в координатном времени можно получить, полагая $z = 0$ в (3.11)

$$t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{H_0} \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}. \quad (3.12)$$

Если нам известно красное смещение z фотонов до некоторой галактики, как нам найти координатное расстояние r до неё? Поскольку для луча

света пространственно-временной интервал равен нулю

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0,$$

мы имеем соотношение между интервалами пространства и времени $cdt = -a(t)dr$ и, используя вышеприведённые обозначения (3.7), находим

$$-a_0 dr = \frac{cdt}{x} = \frac{cdx}{x} \frac{1}{dx/dt}. \quad (3.13)$$

Используя уравнение Фридмана (3.6) со значимыми космологическими параметрами

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_M/x + \Omega_\Lambda x^2} \quad (3.14)$$

и подставляя пределы интегрирования, получаем искомую интегральную зависимость

$$H_0 r = \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a_3 x}}, \quad (3.15)$$

где обозначено отношение парциальных вкладов как $4a_3 \equiv \Omega_M/\Omega_\Lambda$. Для понижения степени полинома, стоящего в подкоренном выражении (3.15), введём подстановку

$$\sqrt{x^4 + 4a_3 x} \equiv x^2 - 2y. \quad (3.16)$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, имеем

$$a_3 x = -x^2 y + y^2. \quad (3.17)$$

Дифференциалы обеих сторон равенства (3.17) могут быть представлены в виде

$$\frac{dx}{x^2 - 2y} = -\frac{dy}{2xy + a_3}. \quad (3.18)$$

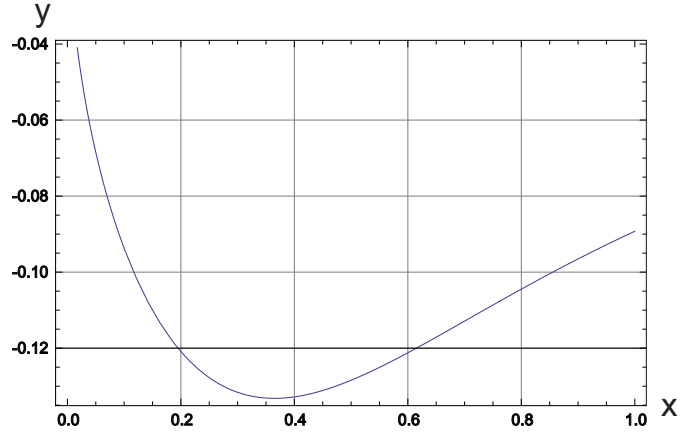


Рис. 3.3: Двухзначная замена переменной $y = y(x)$. Минимум функции достигается при $x^* = \sqrt[3]{a_3/2}$ и равен $y^* = -\sqrt[3]{a_3/4} \equiv e_2$.

Используя равенство (3.16), перепишем (3.18) как

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a_3x}} = -\frac{dy}{2xy + a_3}. \quad (3.19)$$

Тогда мы получаем из уравнения (3.18)

$$2xy + a_3 = \pm \sqrt{4y^3 + a_3^2}, \quad (3.20)$$

где берётся знак плюс, если

$$0 \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{a_3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}},$$

и знак минус, если

$$\sqrt[3]{\frac{a_3}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}} \leq x \leq 1,$$

(см. Рис. 3.3). Подстановка (3.20) в правую часть дифференциального уравнения (3.19) приводит его к искомому виду

$$\frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a_3x}} = \mp \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + a_3^2}} \equiv \mp \frac{dy}{2\sqrt{(y - e_1)(y - e_2)(y - e_3)}}, \quad (3.21)$$

где

$$y \equiv \frac{1}{2} \left(x^2 - \sqrt{x^4 + 4a_3x} \right),$$

с тремя корнями:

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv \frac{1}{8} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} (1 + i\sqrt{3}), & e_2 &\equiv -\frac{1}{4} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3}, \\ e_3 &\equiv \frac{1}{8} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} (1 - i\sqrt{3}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Интеграл (3.15) для интервала $\sqrt[3]{a_3/2} \leq x \leq 1$, соответствующий

$$0 \leq z \leq 2\sqrt[3]{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \approx 1.74, \quad (3.23)$$

даёт соотношение координатное расстояние – красное смещение в интегральной форме

$$\begin{aligned} H_0 r &= \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_{[1 - \sqrt{1 + 4a_3(1+z)^3}]/(2(1+z)^2)}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + a_3^2}} \\ &- \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_{(1 - \sqrt{1 + 4a_3})/2}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + a_3^2}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Интервал, рассмотренный в (3.23), покрывает современные данные космологии [112] вплоть до правого достигнутого значения красного смещения $z \approx 1.7$.

Интегралы в (3.24) находятся в аналитическом виде с использованием обратной \wp -функции Вейерштрасса [54]

$$\begin{aligned} H_0 r &= -\frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \wp^{-1} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda(1+z)^3}}{2(1+z)^2} \right] \\ &+ \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \wp^{-1} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Вейерштрассова \wp -функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{d\wp(u)}{du} \right]^2 = 4 [\wp(u) - e_1] [\wp(u) - e_2] [\wp(u) - e_3], \quad (3.26)$$

где правая часть обращается в нуль, когда

$$\wp(\omega_\alpha) = e_\alpha, \quad \wp'(\omega_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Инварианты функции Вейерштрасса

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -a_3^2 = - \left(\frac{\Omega_M}{4\Omega_\Lambda} \right)^2;$$

дискриминант кубического полинома отрицательный

$$\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2 < 0.$$

Перепишем теперь соотношение (3.25) в неявной форме между переменными с использованием \wp -функции

$$\wp(u) = \frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda(1+z)^3}}{2(1+z)^2},$$

где

$$u \equiv \frac{1}{c} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 r - \wp^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda}}{2} \right),$$

Вейерштрассова \wp -функция может быть выражена через эллиптический косинус Якоби [54]

$$\wp(u) = e_2 + H \frac{1 + \operatorname{cn} \left(2\sqrt{H}u \right)}{1 - \operatorname{cn} \left(2\sqrt{H}u \right)}, \quad (3.27)$$

где корни (3.22) представляются в виде

$$e_1 = m + in, \quad e_2 = -2m, \quad e_3 = m - in,$$

следовательно,

$$m \equiv \frac{1}{8} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3}, \quad n \equiv \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3},$$

и H вычисляется по правилу

$$H \equiv \sqrt{9m^2 + n^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3}.$$

Тогда, из (3.27) мы получаем неявную зависимость между переменными, используя эллиптический косинус

$$\operatorname{cn} \left[\sqrt[4]{3} (\Omega_M/\Omega_\Lambda)^{1/3} u \right] = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}, \quad (3.28)$$

где мы ввели функцию от красного смещения

$$f(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{2/3} \frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda (1+z)^3}}{(1+z)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Модуль эллиптической функции (3.28) получается согласно следующему правилу [54]:

$$k \equiv \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3e_2}{H}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}.$$

В астрономии метод определения расстояний до сверхдальних объектов основывается на измерении их светимости. Мощность излучения L объекта (звезды или галактики) называется его *абсолютной светимостью*. Плотность потока ℓ , то есть излучение, приходящееся на единицу площади, называется *видимой светимостью*. В евклидовой геометрии они связаны формулой

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (3.29)$$

где d – расстояние от нас до светящегося объекта. Во втором веке до нашей эры греческий астроном Гиппарх классифицировал все видимые

невооружённым глазом звёзды по шести классам согласно их яркости. Ярким звёздам была присвоена первая величина, едва видимым – шестая. Норман Погсон в 1856 году определил звёздную величину в логарифмической шкале, так что разность в 5 величин соответствует фактору 100 в светимости

$$\ell = \ell_0 \cdot 100^{-m/5}, \quad L = L_0 \cdot 100^{-M/5}, \quad (3.30)$$

где ℓ_0 и L_0 соответствующие светимости. С созданием фотоумножителей в начале XX-го века, факторы ℓ_0 и L_0 были фиксированы. Выразим из (3.30) видимую звёздную величину m и абсолютную звёздную величину объекта M с помощью десятичных логарифмов

$$m = -\frac{5}{2} \lg \frac{\ell}{\ell_0}, \quad M = -\frac{5}{2} \lg \frac{L}{L_0}. \quad (3.31)$$

Выразим из (3.31) *модуль расстояния* ($m - M$) через расстояние d до исследуемого объекта, с помощью (3.29)

$$m - M = -\frac{5}{2} \lg \left(\frac{\ell}{L} \cdot \frac{L_0}{\ell_0} \right) = \frac{5}{2} \lg \left(4\pi d^2 \cdot \frac{L_0}{\ell_0} \right) = 5 \lg d + \frac{5}{2} \lg \left(4\pi \frac{\ell_0}{L_0} \right).$$

Для выполнения расчётов факторы ℓ_0 и L_0 в (3.30) выбраны с учётом того, что расстояние d измеряется в мегапарсеках

$$m - M = 5 \lg d(\text{Mpc}) + \mathcal{M}, \quad (3.32)$$

где $\mathcal{M} = 25$.

Во фридмановской космологии, по аналогии с формулой расстояния d в евклидовой геометрии (3.29), определим *фотометрическое расстояние* d_L до звёздного объекта

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi\ell}}. \quad (3.33)$$

Абсолютная светимость равна

$$L = \frac{N_\gamma E_{\text{em}}}{t_{\text{em}}}, \quad (3.34)$$

где N_γ – число эмитируемых фотонов, E_{em} их средняя энергия, t_{em} – время эмиссии. Видимая светимость выражается как

$$\ell = \frac{N_\gamma E_{\text{obs}}}{t_{\text{obs}} A}, \quad (3.35)$$

где E_{obs} их средняя энергия, и

$$A = 4\pi a_0^2 r^2$$

– площадь сферы вокруг звезды. Число фотонов сохраняется, но их энергия испытывает красное смещение

$$E_{\text{obs}} = \frac{E_{\text{em}}}{1+z}. \quad (3.36)$$

Времена связаны соотношением

$$t_{\text{obs}} = (1+z)t_{\text{em}}. \quad (3.37)$$

Тогда, используя (3.36), (3.37), видимая светимость (3.35) может быть выражена через абсолютную светимость (3.34) как

$$\ell = \frac{N_\gamma E_{\text{em}}}{t_{\text{em}}} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2}.$$

Отсюда следует формула для фотометрического расстояния (3.33)

$$d_L(z)_{SC} = (1+z)a_0 r. \quad (3.38)$$

Здесь принято во внимание, что площадь сферы вокруг светящегося объекта проходит через Землю и частота фотонов уменьшается во время

движения. Подставляя формулу для координатного расстояния (3.25) в (3.38), получаем аналитическое выражение для фотометрического расстояния [113]

$$d_L(z)_{SC} = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left(\wp^{-1} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda}}{2} \right] - \wp^{-1} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda}(1+z)^3}}{2(1+z)^2} \right] \right). \quad (3.39)$$

Современная наблюдательная космология основывается на диаграмме Хаббла. Соотношение эффективная звёздная величина – красное смещение

$$m(z) - M = 5\lg[d_L(z)_{SC}] + \mathcal{M}, \quad (3.40)$$

используется для тестирования космологических теорий (d_L в мегапарсеках) [112]. Здесь $m(z)$ – *видимая звёздная величина*, M – *абсолютная звёздная величина*, и $\mathcal{M} = 25$ – константа.

3.2 Конформные теории гравитации

Уравнения Эйнштейна не инвариантны относительно конформных преобразований. Закономерно возникает вопрос об адекватности их применения на космологических масштабах пространства и времени [22]. Конформные преобразования сжимают или растягивают пространственно-временные интервалы между двумя точками в одной координатной системе

$$ds^2 = \Omega^2 d\bar{s}^2$$

на конформно инвариантных многообразиях \mathcal{M} and $\bar{\mathcal{M}}$. При конформных преобразованиях компоненты метрики пространства - времени и со-

ответствующий детерминант изменяются по правилам

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} = \Omega^4 \sqrt{-\bar{g}}. \quad (3.41)$$

Скаляр Риччи пространства - времени преобразуется согласно

$$R = \Omega^{-2} \left(\bar{R} - 6 \frac{\bar{\square} \Omega}{\Omega} \right), \quad (3.42)$$

где оператор Даламбера $\bar{\square}$ относится к конформно масштабированной метрике. Рассмотрим действие Гильберта

$$S_{\text{H}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{6} R, \quad (3.43)$$

где мы положили

$$\kappa^2 \equiv 8\pi G = 6.$$

Конформное отображение метрики (3.41) вместе с (3.42) даёт конформно преобразованное действие Гильберта

$$\bar{S}_{\text{H}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \Omega^2 \left(\frac{1}{6} \bar{R} - \frac{\bar{\square} \Omega}{\Omega} \right). \quad (3.44)$$

Действие (3.44) является конформным инвариантом. Дополнительное слагаемое в (3.44) выглядит как кинетический член некоторого скалярного поля. Идея состоит во включении безмассового скалярного поля Φ для того, чтобы поглотить конформный фактор

$$S_{\text{H}\Phi} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{6} \right) R \Phi^2. \quad (3.45)$$

После конформного отображения имеем

$$\bar{S}_{\text{H}\Phi} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{1}{6} \bar{R} \bar{\Phi}^2 - \frac{\bar{\square} \Omega}{\Omega} \bar{\Phi}^2 \right), \quad (3.46)$$

где мы приняли во внимание масштабированное скалярное поле

$$\Phi = \Omega^{-1}\bar{\Phi}, \quad (3.47)$$

поэтому конформный фактор в действии (3.46) был сокращён.

Далее, рассмотрим действие для безмассового скалярного поля

$$S_{\Phi} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Phi \square \Phi. \quad (3.48)$$

После применения конформного преобразования (3.52), с учётом трансформации поля (3.47), получаем преобразованное действие

$$\bar{S}_{\Phi} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{\Phi} \bar{\square} \bar{\Phi} - \frac{\bar{\square} \Omega}{\Omega} \bar{\Phi}^2 \right), \quad (3.49)$$

где было использовано

$$\square \Phi = \frac{1}{\Omega^3} \left(\bar{\square} \bar{\Phi} - \frac{\bar{\square} \Omega}{\Omega} \bar{\Phi}^2 \right).$$

Действие для скалярного поля (3.49) не является конформным инвариантом.

Наконец, если мы складываем действие для безмассового скалярного поля (3.49) с действием, описывающим его взаимодействие гравитационным полем (3.46), мы получаем действие, являющимся конформным инвариантом

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \Phi \left(\frac{1}{6} R \Phi - \square \Phi \right). \quad (3.50)$$

Действие (3.50) может быть представлено в общем виде, включающем массивное скалярное поле, игнорируя поверхностный член

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{6} R \Phi^2 + g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \Phi \nabla_{\nu} \Phi - m^2 \Phi^2 \right). \quad (3.51)$$

Здесь мы использовали выражение для ковариантного даламбериана

$$\square\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right).$$

Действие с массивным членом (3.51) конформно инвариантно при учёте скейлинга масс

$$m = \Omega^{-1} \bar{m}.$$

С фактором $1/6$ при R (3.51), действие эквивалентно действию Общей Теории Относительности [114]. Конформно инвариантные уравнения движения теории совпадают с аналогичными уравнениями Общей Теории Относительности, выраженных в конформных переменных (см, например [32, 114, 115, 116]).

3.3 Уравнение Фридмана в конформной космологии

Рассмотрим в этом Разделе пространственные конформные преобразования. При конформных преобразованиях компоненты пространственной метрики и соответствующего детерминанта метрики преобразуются как

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \quad \sqrt{\gamma} = \Psi^6 \sqrt{\bar{\gamma}}. \quad (3.52)$$

Компоненты тензора внешней кривизны преобразуются как

$$K_{ij} = \Psi^{-2} A_{ij} + \frac{1}{3} \Psi^4 \bar{\gamma}_{ij} K, \quad (3.53)$$

где A_{ij} – компоненты бесследовой части тензора K_{ij} , и K – его след.

Определения (3.52), (3.53) избыточны. Они инвариантны относительно конформных преобразований [117]

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ij} &\longrightarrow \xi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \\ \Psi &\longrightarrow \xi^{-1} \Psi, \\ A_{ij} &\longrightarrow \xi^{-2} A_{ij}, \\ K &\longrightarrow K,\end{aligned}$$

для произвольного поля ξ . На детерминант метрики пока не накладываются какие-либо ограничения. Метрический тензор представляет собой конформно эквивалентный класс метрик [117].

Скаляр Риччи пространства преобразуется согласно

$$R = \Psi^{-4} \left(\bar{R} - 8 \frac{\bar{\Delta} \Psi}{\Psi} \right), \quad (3.54)$$

где лапласиан $\bar{\Delta}$ согласован с конформно масштабированной метрикой.

Конформная гамильтонова связь

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\perp} = \frac{1}{2} \bar{\gamma} A^{ij} A_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\gamma} \Psi^{12} K^2 - \frac{1}{2} \bar{\gamma} \Psi^8 \bar{R} + 4 \bar{\gamma} \Psi^7 \bar{\Delta} \Psi + (8\pi G) \bar{\gamma} \Psi^{12} \rho = 0 \quad (3.55)$$

инвариантна относительно конформных преобразований (3.52).

Для изучения динамики гравитационного поля выполняется переход $\tilde{\gamma}_{ij}$ (3.52). В космологии, фактор Ψ определяется как отношение детерминанта пространственной метрики γ (3.23) к детерминанту фоновой метрики f

$$\Psi := \left(\frac{\gamma}{f} \right)^{1/12} = \sqrt{\frac{a(t)}{a_0}}.$$

В качестве фоновой метрики уместно взять сферу современного радиуса a_0 :

$$f_{ij} dx^i dx^j = a_0^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (3.56)$$

Следовательно, конформная метрика с компонентами $\tilde{\gamma}_{ij}$ является статической метрикой современной Вселенной с радиусом a_0 . При конформном преобразовании (3.52) скаляр Риччи R преобразуется как

$$R = \Psi^{-4} \tilde{R} = \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \tilde{R}. \quad (3.57)$$

Конформная гамильтонова связь имеет вид уравнения Лихнеровича – Йорка

$$-\frac{1}{9}K^2 - \frac{1}{6}\Psi^{-4}\tilde{R} + \left(\frac{8\pi G}{3} \right) \rho = 0. \quad (3.58)$$

Конформная гравитация строится на введении дилатонного поля [114, 116, 117]. Интерпретация диаграммы Хаббла на основе *конформной космологической модели* с параметрами $\Omega_{\text{rigid}} = 0.755$, $\Omega_{\text{M}} = 0.245$, даёт такую же качественную аппроксимацию как и стандартная космологическая модель с параметрами $\Omega_{\Lambda} = 0.72$, $\Omega_{\text{M}} = 0.28$ [30, 37, 38]. Параметр Ω_{rigid} отвечает сверхжёсткому состоянию материи, когда давление равно плотности энергии $p = \rho$ [118], что случается в режиме нуклеосинтеза в звёздах [119]. Выпишем *конформное уравнение Фридмана* [41], оставляя только значимые парциальные космологические параметры

$$\left(\frac{a'}{a} \right)^2 = \left(\frac{\mathcal{H}_0}{c} \right)^2 \left[\Omega_{\text{rigid}} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{\text{M}} \left(\frac{a_0}{a} \right) \right], \quad (3.59)$$

где \mathcal{H}_0 – конформная постоянная Хаббла. В правой части уравнения (3.59) вошли вклады от плотностей состояний материи $\rho(a)$ в соответствии с их конформными весами; слева штрих обозначает производную по конформному времени. После введения безразмерной переменной $x \equiv a/a_0$, конформное уравнение Фридмана (3.59) примет вид

$$\left(\frac{2c}{\sqrt{\Omega_{\text{M}}}\mathcal{H}_0} \right)^2 x^2 \left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 = 4x^3 - g_3 \equiv 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (3.60)$$

где справа один корень кубического полинома (3.60) вещественный, а другие два комплексно сопряжённые

$$e_1 \equiv \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M} \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}, \quad e_2 \equiv -\sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M}}, \quad e_3 \equiv \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

Инварианты кубического полинома:

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{4\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M}.$$

Конформный параметр Хаббла связан с классическим параметром $\mathcal{H} \equiv (a/a_0)H$. Дифференциальное уравнение (3.60) описывает эффективную задачу из классической механики — падение частицы с массой $8c^2/(\Omega_M \mathcal{H}_0^2)$ и нулевой полной энергией в центральном поле с отталкивающим потенциалом

$$U(x) = \frac{g_3}{x^2} - 4x.$$

Стартуя с начального положения $x = 0$ она достигает $x = 1$ за конечное время η_0 . Мы получаем интеграл из дифференциального уравнения (3.60)

$$\int_{1/(1+z)}^1 \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - g_3}} = -\frac{\sqrt{\Omega_M} \mathcal{H}_0}{2c} \eta. \quad (3.61)$$

Введём новую переменную u

$$x = \wp(u) = -\frac{d\zeta(u)}{du}. \quad (3.62)$$

Вейерштрассова ζ -функция удовлетворяет условиям квазипериодичности [54]

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\zeta(\omega), \quad \zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\zeta(\omega'),$$

где ω и ω' — полупериоды функции $\wp(u)$.

Интегрируем конформное уравнение Фридмана (3.60) и получаем *соотношение конформный возраст – красное смещение* в явном виде

$$\eta = \frac{2c}{\sqrt{\Omega_M} \mathcal{H}_0} \left(\zeta \left[\wp^{-1} \left(\frac{1}{1+z} \right) \right] - \zeta \left[\wp^{-1}(1) \right] \right). \quad (3.63)$$

Выписанное в интегральной форме уравнение известно в космологии как *закон Хаббла*. Явную формулу для *возраста Вселенной* можно получить

$$\eta_0 = \frac{2c}{\sqrt{\Omega_M} \mathcal{H}_0} \left(\zeta \left[\wp^{-1}(0) \right] - \zeta \left[\wp^{-1}(1) \right] \right). \quad (3.64)$$

Интервал координатного конформного расстояния равен интервалу конформного времени $dr = -d\eta$, поэтому мы можем представить (3.63) как *соотношение конформное расстояние – красное смещение*.

Относительное изменение длины волны излучённого фотона соответствует относительному изменению масштаба

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a_0 - a}{a},$$

где λ – длина волны испущенного фотона, λ_0 – длина волны поглощённого фотона. Трактовка Вейля [120] предполагает возможность рассмотрения

$$1 + z = \frac{m_0 a_0}{[a(\eta) m_0]}, \quad (3.65)$$

где m_0 – первоначальная масса атома. Массы элементарных частиц, согласно конформной космологии (3.65), становятся бегущими

$$m(\eta) = m_0 a(\eta).$$

Уместно вспомнить корректное замечание Нобелевского лауреата по физике Стивена Вайнберга [1] об интерпретации экспериментальных данных по красному смещению.

“Я не хочу создать ощущения всеобщего согласия интерпретации красного смещения. В действительности, никто из нас не наблюдал разбегания галактик от нас; всё, в чём мы уверены, так только в том, что линии спектров смещены в красную сторону, то есть в направлении длинных волн. Имеются уважаемые астрономы, имеющие сомнения в том, что красные смещения не связаны с эффектом Доплера и с расширением Вселенной”.

Фотоны, излучённые атомами с далёких звёзд миллиарды лет назад, помнят размеры атомов. Атомы определяются их массами. Астрономы в настоящее время сравнивают спектры поглощения со спектрами тех же атомов на Земле, но изменённых с того давнего времени. Результатом является красное смещение z спектральных линий Фраунгофера. В конформных координатах поведение фотонов в точности как в пространстве Минковского. Интервал времени $dt = -adr$, используемый в стандартной космологии, и интервал времени $d\eta = -dr$, используемый в конформной космологии, разные. Конформное фотометрическое расстояние $d_L(z)_{CC}$ связано со стандартным фотометрическим расстоянием $d_L(z)_{SC}$ [37]

$$d_L(z)_{CC} = (1 + z)d_L(z)_{SC} = (1 + z)^2 r(z),$$

где $r(z)$ – координатное расстояние. Для фотонов $dr/d\eta = -1$, поэтому мы получаем явную зависимость: *соотношение фотометрическое расстояние – красное смещение*

$$d_L(z)_{CC} = \frac{2c(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_M \mathcal{H}_0}} \left(\zeta \left[\wp^{-1} \left(\frac{1}{1+z} \right) \right] - \zeta \left[\wp^{-1}(1) \right] \right). \quad (3.66)$$

Соотношение *эффективная звёздная величина – красное смещение* в конформной космологии имеет вид

$$m(z) - M = 5 \lg[d_L(z)_{CC}] + M. \quad (3.67)$$

Поскольку решения уравнения Фридмана принадлежат к классу двоякопериодических мероморфных функций Вейерштрасса. В классической механике решение задачи о математическом маятнике выражается с помощью эллиптического синуса. Оба периода функции комплексного времени, и вещественный и мнимый, имеют физический смысл [121]. Согласно идеям конформной циклической космологии, сценарий Большого взрыва пролонгируется в оба направления: в прошлое и будущее [122, 123, 124], поэтому следует обратить внимание на временные циклы решений. В квантовой космологии, с помощью волновой функции [125], исследуются проблемы акта рождения вселенной. Квантовое туннелирование с изменением сигнатуры пространства – времени описываются с использованием мнимого времени [126].

3.4 Сравнительный анализ моделей

Согласно конформной космологической модели, наблюдаемыми физическими величинами являются конформные переменные. Критерий Пирсона χ^2 был применён в работе [37] для статистической подгонки результатов астрономических наблюдений за сверхновыми Ia. Вклад от компоненты, соответствующей жёсткому состоянию материи ρ_{rigid} в конформной модели заменил вклад от Λ -члена в стандартной модели. В результате проведённого анализа был сделан вывод: лучший фитинг конформной

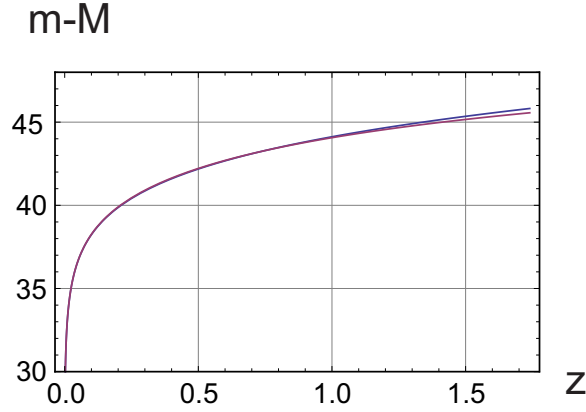


Рис. 3.4: Кривые Хаббла для двух космологических моделей: эффективная звёздная величина – красное смещение.

модели ничем не уступает лучшему фитингу стандартной модели. Кривые, полученные на основе двух подходов (3.67) и (3.40), показаны на Рис. 3.4. Разность между предсказаниями моделей (3.67) и (3.40): эффективная звёздная величина – красное смещение

$$\Delta(m(z) - M) = 5\lg[d_L(z)_{CC}] - 5\lg[d_L(z)_{SC}] \quad (3.68)$$

показана на Рис. 3.5. Различие между кривыми проявляется на ранней и поздней стадиях развития Вселенной.

Функция (3.68) имеет довольно сложный вид, но её можно интерполировать с достаточной степенью точности полиномами Чебышёва первого рода, наименее отклоняющимися от нуля на интервале $[-1; 1]$

$$\Delta(m - M) = \frac{a_0}{2} + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x).$$

Здесь мы использовали переменную $-1 \leq x \leq 1$: $x \equiv (20/17)z - 1$, а коэффициенты разложения имеют вид: $a_0/2 = 0.0703$, $a_1 = 0.0513$, $a_2 = 0.0513$, $a_3 = -0.0123$, $a_4 = 0.0015$. Полиномы Чебышёва

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

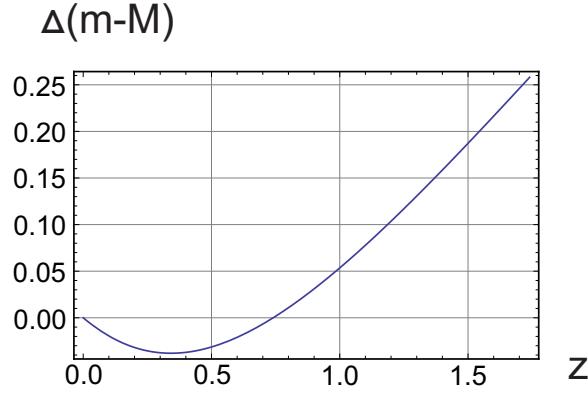


Рис. 3.5: Разность между кривыми Хаббла двух космологических моделей: эффективная звёздная величина – красное смещение.

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

В стандартной космологии определены параметры Хаббла, замедления и толчка [112]

$$H(t) \equiv + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda}, \quad (3.69)$$

$$q(t) \equiv - \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-2} = \frac{\Omega_M/2 - \Omega_\Lambda a^3}{\Omega_M + \Omega_\Lambda a^3}, \quad (3.70)$$

$$j(t) \equiv + \left(\frac{\dot{\ddot{a}}}{a} \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-3} = 1. \quad (3.71)$$

Как мы видим, параметр замедления q меняет свой знак в течение эволюции Вселенной в точке перегиба

$$a^* = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda}},$$

j -параметр остаётся постоянным.

Мы можем определить аналогичные параметры и для конформной

КОСМОЛОГИИ

$$\mathcal{H}(\eta) \equiv + \left(\frac{a'}{a} \right), \quad (3.72)$$

$$q(\eta) \equiv - \left(\frac{a''}{a} \right) \left(\frac{a'}{a} \right)^{-2}, \quad (3.73)$$

$$j(\eta) \equiv + \left(\frac{a'''}{a} \right) \left(\frac{a'}{a} \right)^{-3}. \quad (3.74)$$

Вычислим конформные параметры, используя конформное уравнение Фрийдмана (3.59). Параметр Хаббла

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{\mathcal{H}_0}{a^2} \sqrt{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_{\text{M}} a^3} > 0;$$

параметр замедления

$$q(\eta) = \left(\frac{\Omega_{\text{rigid}} - (\Omega_{\text{M}}/2)a^3}{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_{\text{M}} a^3} \right) > 0,$$

следовательно, масштабный фактор растёт с замедлением; параметр толчка

$$j(\eta) = \frac{3\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_{\text{M}} a^3} > 0$$

изменяется от 3 до $3\Omega_{\text{rigid}}$. Безразмерные параметры $q(\eta)$ и $j(\eta)$ остаются положительными в течение эволюции. Вселенная не испытывает толчка.

3.5 Экстраполяция диаграммы Хаббла

В стандартной космологии, интеграл (3.15), входящий в формулу для расчёта расстояния до светящегося объекта

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a_3x}}, \quad (3.75)$$

можно выразить с помощью эллиптических интегралов [127]. Для этого представим подкоренное выражение в виде произведения полиномов второго порядка

$$x^4 + 4a_3x = (x^2 - 2px + 4p^2)(x^2 + 2px),$$

где $4a_3 \equiv 8p^3$. Далее применим дробно-линейную подстановку $x \mapsto t$:

$$x = \frac{(1 + \sqrt{3})t + (1 - \sqrt{3})}{t + 1}p.$$

Дифференциал заменится следующим образом

$$dx = -\frac{2\sqrt{3}p}{(t + 1)^2}dt,$$

а интеграл (3.75) примет вид

$$I = -\frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{3} - 3)p}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)(b^2t^2 - 1)}}, \quad (3.76)$$

где $b \equiv (2 + \sqrt{3})$. Тригонометрической подстановкой $t \mapsto \varphi$:

$$bt = \sec \varphi \equiv \frac{1}{\cos \varphi}$$

подынтегральное выражение приводим к стандартному виду

$$\frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)(b^2t^2 - 1)}} = \sqrt{1 - k^2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $k^2 \equiv b^2/(1 + b^2)$. В результате, искомый определённый интеграл (3.15) выражается через эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi, k) := \int_0^\varphi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

по Лежандру:

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{3p}} [F(\varphi(z), k) - F(\varphi(0), k)]. \quad (3.77)$$

Здесь k^2 – модуль эллиптического интеграла, а угол $\varphi(z)$ определяется формулой:

$$\varphi(z) := \arccos \left(\frac{(\sqrt{3} + 1)p(1 + z) - 1}{(2 + \sqrt{3})[(\sqrt{3} - 1)p(1 + z) + 1]} \right).$$

В конформной космологии, в формулу для расчёта расстояния до светящегося объекта входит интеграл от рациональной функции (3.61)

$$I = \int \frac{x dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad (3.78)$$

где полином $P(x)$ представим в факторизованной форме:

$$P(x) = x^3 + \beta^3 \equiv (x + \beta)(x^2 - \beta x + \beta^2), \quad \beta \equiv \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_{\text{M}}}}.$$

Покажем, как его можно выразить через эллиптические интегралы. Воспользуемся тригонометрической подстановкой $x \mapsto \varphi$:

$$x = -\beta + \sqrt{3}\beta \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

После замены переменной получаем

$$P(\varphi) = \frac{3\sqrt{3}\beta^3 \operatorname{tg}^2(\varphi/2)}{\cos^4(\varphi/2)} [1 - k^2 \sin^2 \varphi], \quad k^2 \equiv \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Дифференциал преобразуется по формуле:

$$dx = \sqrt{3}\beta \frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2)} d\varphi.$$

В результате замены переменной интеграл (3.78) примет вид:

$$I = -\sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \sqrt{\sqrt{3}\beta} \int \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi/2) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3.79)$$

Преобразуем второй интеграл в (3.79), воспользовавшись равенством

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi/2) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \operatorname{tg}(\varphi/2) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - 2 \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Тогда интеграл (3.79) примет вид

$$I = 2\sqrt{\sqrt{3}\beta} \operatorname{tg}(\varphi/2) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - 2\sqrt{\sqrt{3}\beta} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + (\sqrt{3} - 1) \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Подставляя пределы интегрирования, находим искомый определённый интеграл

$$\begin{aligned} I(z) &= 2\sqrt{(1 + \beta)(1 - k^2 \sin^2 \varphi(0))} \\ &- 2\sqrt{\frac{1 + \beta(1 + z)}{(1 + z)}(1 - k^2 \sin^2 \varphi(z))} \\ &+ (\sqrt{3} - 1) \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}} [F(k, \varphi(0)) - F(k, \varphi(z))] \\ &- 2\sqrt{\sqrt{3}\beta} [E(k, \varphi(0)) - E(k, \varphi(z))]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Здесь

$$E(k, \varphi) := \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi, \quad k^2 \equiv \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

– эллиптический интеграл второго рода по Лежандру с модулем k^2 , угол φ определяется по формуле

$$\varphi(z) := 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \beta(1 + z)}{\sqrt{3}\beta(1 + z)}}.$$

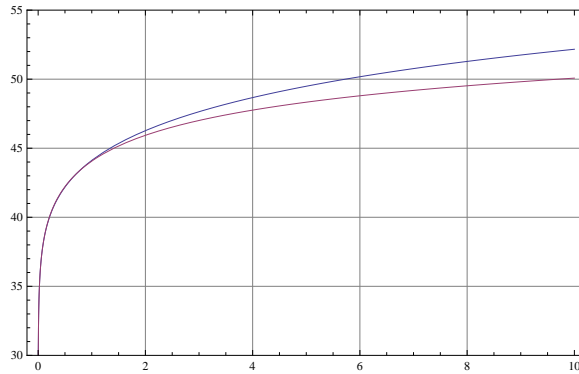


Рис. 3.6: Экстраполяция современных кривых Хаббла двух космологических моделей. При больших значениях z , кривая конформной модели поднимается значительно выше кривой стандартной модели. Отклонение превосходит погрешности астрономических наблюдений. Будущие уточнённые астрономические наблюдения могут подсказать, какой модели следует отдать предпочтение.

Полученные аналитические формулы для вычисления интегралов (3.77), (3.80) применим для экстраполяции диаграммы Хаббла для красных смещений, превышающих современные наблюдательные данные по сверхновым. При больших значений z , кривая конформной модели поднимается значительно выше кривой стандартной модели (см. Рис. 3.6). Отклонение превосходит погрешности астрономических наблюдений. Будущие уточнённые астрономические наблюдения подскажут, какой модели следует отдать предпочтение.

Можно рассмотреть подкоренное выражение в уравнении Фридмана в виде общего полинома четвёртого порядка, включая тем самым вклад доменных стенок во Вселенной. Вычисления показывают, что решения уравнения также включаются в класс функций Вейерштрасса [128].

3.6 Выводы

Функции Вейерштрасса и Якоби, традиционно применяемые в классической механике [129] и астрономии [130], находят своё естественное приложение и в теоретической космологии. Соотношения: конформный возраст – красное смещение, и эффективная звёздная величина – красное смещение, являющиеся базисными формулами в наблюдательной космологии, выражаются явно через мероморфные функции.

Вместо численного анализа, традиционно используемого в космологии, мы применяем аналитические формулы, выражающиеся с помощью высших трансцендентных функций. Они удобны в использовании, поскольку встроены в компьютерный пакет MATHEMATICA. Имеется каталог точных решений уравнений Эйнштейна, в котором систематизированы наиболее значимые физические решения [131]. Наиболее известные из них: чёрные дыры, плоские гравитационные волны, космологические решения – помогли понять содержание теории гравитации, дифференциальные уравнения которой являются нелинейными. Для разработки приближенных методов численного интегрирования полезно опираться на известные точные решения. В настоящей Главе рассматриваются решения в плоскости комплексного переменного времени.

Астрономические коллаборации The Supernova Cosmology Project и High-z Supernova Search Team представили данные по большим красным смещениям. Подходы классической и конформной космологий демонстрируют фитирование диаграммы Хаббла с одинаковой точностью. Согласно концепции конформной гравитации, конформные величины ОТО являются физическими наблюдаемыми. Интерпретация с позиций кон-

формной космологии предпочтительней, поскольку объясняет экспериментальные данные без Λ -члена. Вселенная статична в конформной космологии, что согласуется с концепцией Эйнштейна [132]. В классической космологии приходится искусственно вводить в уравнения Эйнштейна Λ -член [7].

Решения для кривых Хаббла рассмотренных моделей аналитически выражаются с помощью эллиптических интегралов первого и второго родов по Лежандру. Экстраполяция кривых Хаббла для больших красных смещений показывает, что при больших значениях z кривая конформной модели поднимается значительно выше кривой стандартной модели. Отклонение превосходит погрешности астрономических наблюдений. Будущие уточнённые астрономические наблюдения подскажут, какой модели следует отдать предпочтение.

Глава 4

Скрытые симметрии миксмастерной модели

Интерес к проблеме начальной сингулярности в космологии не угасает до сих пор [133, 134, 135]. Хаотическое поведение космологических моделей вблизи сингулярности исследовалось разнообразными методами (см, например, [136] – [138]). Миксмастерная космологическая модель Мизнера [90] принадлежит к классу псевдоевклидовых обобщённых цепочек Тоды [139, 140]. О.И. Богоявленский ввёл обобщённые цепочки Тоды [141]. Каждой простой алгебре Ли отвечает вполне интегрируемая обобщённая евклидова цепочка Тоды. Уравнения движения частиц каждой цепочки удовлетворяют представлениям с помощью $L - A$ пары. Существует инволютивная система интегралов движения $\text{tr} \hat{L}^k$, ($k = 1, \dots, n$). Обычной цепочке Тоды соответствует простая алгебра $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Непериодические цепочки ведут себя асимптотически свободно [142]. Уравнения движения частиц периодических цепочек интегрируются в тета-функциях [143, 144].

Адлер и ван Мёрбеке получили критерий интегрируемости обобщённых цепочек Тоды в квадратурах [145]. Таким образом они дополнили класс решений, полученный Богоявленским, решениями, соответствующим алгебрам Каца – Муди. Ричард Борхердс расширил класс алгебр Каца – Муди, используя билинейные почти положительно определённые формы [146]. Его алгебры обобщают алгебры Каца – Муди, к вещественным корням которых добавляются мнимые корни.

Вышеприведённые случаи показывают, что для понимания поведения Тода-подобных систем необходимо вскрыть отвечающие им алгебры. В работе [147] было показано, что в бильярдной асимптотической аппроксимации миксмастерной модели, такой алгеброй является гиперболическая алгебра Каца – Муди. Бильярдная модель характеризуется хаотическим поведением. В настоящей Главе мы найдём алгебру, ассоциированную с оригинальной миксмастерной моделью Мизнера. В дальнейших исследованиях, это поможет понять поведение модели, получив класс функций, в которых она естественно описывается.

4.1 Показатели Ковалевской миксмастерной модели

Уравнения движения многих интересных задач динамики имеют квази-однородную форму. Напомним некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения и теоремы. Система автономных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = v_i(z_1, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1)$$

называется квазиоднородной [148] с *показателями квазиоднородности*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0,$$

если выполняются следующие тождества

$$v_i(\alpha^{\lambda_1} z_1, \dots, \alpha^{\lambda_n} z_n) = \alpha^{\lambda_i+1} v_i(z_1, \dots, z_n) \quad (4.2)$$

при всех значениях z и $\alpha > 0$. Значит, дифференциальные уравнения (4.1) инвариантны относительно подстановок $z_i \mapsto \alpha^{\lambda_i} z_i, t \rightarrow t/\alpha$. Продифференцируем теперь полученные тождества по α и положим $\alpha = 1$:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial v_i}{\partial z_j} = (\lambda_i + 1) v_i. \quad (4.3)$$

Таким образом получается *формула Эйлера*.

Уравнения (4.2) имеют частные решения:

$$z_i = C_i t^{-\lambda_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.4)$$

с коэффициентами C_i , удовлетворяющими алгебраической системе уравнений

$$v_i(C_1, \dots, C_n) = -\lambda_i C_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.5)$$

Уравнения для вариации δz_i частного решения (4.4) имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \delta z_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial z_j} (C_1 t^{-\lambda_1}, \dots, C_n t^{-\lambda_n}) \delta z_j. \quad (4.6)$$

Дифференцируя тождество (4.2) по z_j , мы получаем

$$\frac{\partial v_i}{\partial z_j} v_i(\alpha^{\lambda_1} z_1, \dots, \alpha^{\lambda_n} z_n) = \alpha^{\lambda_i - \lambda_j + 1} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} (z_1, \dots, z_n). \quad (4.7)$$

Подставляя $\alpha = 1/t$ в тождества (4.7), мы можем переписать систему дифференциальных уравнений (4.6) в следующем виде

$$\frac{d}{dt}\delta z_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(C_1, C_2, \dots, C_n) t^{\lambda_j - \lambda_i - 1} \delta z_j.$$

Полученная линейная система уравнений имеет частные решения

$$\delta z_1 = \varphi_1 t^{\rho - \lambda_1}, \dots, \delta z_n = \varphi_n t^{\rho - \lambda_n},$$

подставляя которые в (4.6), получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n (K_{ij} - \rho \delta_{ij}) \varphi_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, ρ есть собственное значение, а $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – собственный вектор матрицы с компонентами

$$K_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(C_1, \dots, C_n) + \delta_{ij} \lambda_i. \quad (4.8)$$

Матрица \hat{K} называется *матрицей Ковалевской*, а её собственные значения – *показателями Ковалевской*. Эти понятия были введены Харуро Йошидой, который подчеркнул выдающийся вклад нашей соотечественницы в решение важной динамической проблемы. Согласно теореме Йошиды, если общее решение системы (4.1) представляется мероморфными функциями в плоскости комплексного времени, тогда показатели Ковалевской являются целыми числами. Ковалевская показала, что алгебраическими вполне интегрируемыми системами в задаче о сферическом вращении твёрдого тела являются случаи Эйлера, Лагранжа и её собственный [149]. Применим её эффективный метод к исследованию космологической задачи.

Напомним, что $f(z)$ называется *квазиоднородной функцией* степени m с показателями квазиоднородности $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, если

$$f(\alpha^{\lambda_1} z_1, \dots, \alpha^{\lambda_n} z_n) = \alpha^m f(z_1, \dots, z_n). \quad (4.9)$$

В работе [148] доказана теорема о существовании алгебраического интеграла. Пусть f – квазиоднородный интеграл степени m системы уравнений (4.1) и

$$df(C_1, \dots, C_n) \neq 0,$$

тогда $\rho = m$ – показатель Ковалевской. Этот важный результат устанавливает связь между свойством мероморфности общего решения и наличием интегралов. Если система уравнений (4.1) имеет ещё один квазиоднородный интеграл g той же степени m , и дифференциалы df и dg линейно независимы в точке (C_1, \dots, C_n) , то $\rho = m$ – показатель Ковалевской кратности, большей двух.

Важным для физических приложений примером однородных дифференциальных уравнений являются уравнения Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли [150]:

$$\dot{K}_i = \sum_{j,k=1}^n c_{ik}^j K_j \omega^k, \quad K_i = \sum_{j=1}^n I_{ij} \omega^j, \quad (4.10)$$

где $1 \leq i \leq n$, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости системы, \mathbf{K} – вектор кинетического момента, c_{ik}^j – структурные константы некоторой n -мерной алгебры Ли, I_{ij} – тензор инерции. Они являются обобщением известных динамических уравнений Эйлера, описывающих движение твёрдого тела с одной закреплённой точкой. Алгебра Ли волчка $so(3)$. Уравнения

(4.10) всегда имеют интеграл энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n I_{ij} \omega^i \omega^j. \quad (4.11)$$

Для однородных уравнений задача об однозначности общего решения может быть практически доведена до конца [148].

Покажем, что миксмастерная космологическая модель также принадлежит к динамическим системам Эйлера – Пуанкаре на некоторой разрешимой алгебре Ли [151]. Это сразу даёт возможность использовать для анализа подход Йошиды. Метрика пространства – времени космологической модели представляется в координатах Мизнера

$$ds^2 = -N^2(t) dt^2 + e^{2\alpha} (e^{2\beta})_{ij} \sigma^i \sigma^j,$$

где N – функция хода. Бесследовая матрица параметризована следующим образом

$$\beta_{11} = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-,$$

$$\beta_{22} = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-,$$

$$\beta_{33} = -2\beta_+.$$

Дифференциальные формы σ^i

$$\sigma^1 = \cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\varphi,$$

$$\sigma^2 = \sin \psi d\theta - \cos \psi \sin \theta d\varphi,$$

$$\sigma^3 = d\psi + \cos \theta d\varphi$$

дуальны базисным векторам группы $SO(3)$, то есть

$$d\sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon_{jk}^i \sigma^j \wedge \sigma^k,$$

где (ψ, θ, φ) – углы Эйлера. Переменные имеют следующий физический смысл: фактор α определяет объём пространства, поскольку $\sqrt{\gamma} = \exp(3\alpha)$, а β_+, β_- – параметры анизотропии пространства.

Действие Гильберта:

$$S = \int (p_\alpha \mathbf{d}\alpha + p_+ \mathbf{d}\beta_+ + p_- \mathbf{d}\beta_- + N e^{-3\alpha} \mathcal{H} dt). \quad (4.12)$$

Супергамильтониан \mathcal{H}_\perp миксмастерной модели имеет вид:

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2}(-p_\alpha^2 + p_+^2 + p_-^2) + \frac{1}{3} \exp(4\alpha) V(\beta_+, \beta_-), \quad (4.13)$$

а потенциальная функция $V(\beta_+, \beta_-)$ представляет собой сумму шести экспоненциальных функций:

$$\begin{aligned} V(\beta_+, \beta_-) &= \\ &= \exp(-8\beta_+) + \exp(4\beta_+ + 4\sqrt{3}\beta_-) + \exp(4\beta_+ - 4\sqrt{3}\beta_-) \\ &- 2 \exp(4\beta_+) - 2 \exp(-2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-) - 2 \exp(-2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-). \end{aligned}$$

Переменные имеют следующий физический смысл: α – масштабный фактор, β_+, β_- – параметры анизотропии космологической модели. Потенциал $V(\beta)$ с положительно определёнными стенками имеет треугольную симметрию в плоскости $\beta_+\beta_-$ (см. Рис.4.1). Стенки потенциала

$$\begin{aligned} V(\beta) &\sim e^{-8\beta_+}, & \beta_+ &\rightarrow -\infty, \\ V(\beta) &\sim \beta_-^2 e^{4\beta_+}, & \beta_+ &\rightarrow +\infty, & |\beta_-| &\ll 1 \end{aligned}$$

в бильярдном приближении заменяются бесконечно высокими, движущимися во времени [90]. Вблизи сингулярности $\alpha \rightarrow -\infty$ уместно перей-

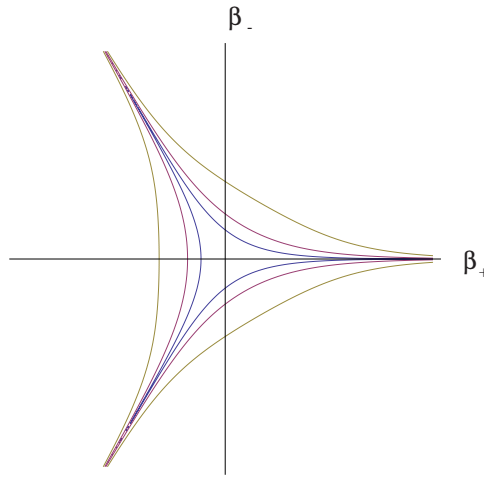


Рис. 4.1: Линии уровня потенциальной функции $V(\beta_+, \beta_-)$. Имеется треугольная симметрия и три лузы.

ти к переменным Читре (t', ζ, ϕ) [152]

$$\begin{aligned} -\alpha &= e^{t'} \operatorname{ch} \zeta, \\ \beta_+ &= e^{t'} \operatorname{sh} \zeta \cos \phi, \\ \beta_- &= e^{t'} \operatorname{sh} \zeta \sin \phi. \end{aligned}$$

Здесь t' – радиальная переменная, а ζ, ϕ – угловые переменные. Канонически сопряжённые импульсы:

$$\begin{aligned} p_{t'} &= e^{t'} (-p_\alpha \operatorname{ch} \zeta + p_+ \operatorname{sh} \zeta \cos \phi + p_- \operatorname{sh} \zeta \sin \phi), \\ p_\zeta &= e^{t'} (-p_\alpha \operatorname{sh} \zeta + p_+ \operatorname{ch} \zeta \cos \phi + p_- \operatorname{ch} \zeta \sin \phi), \\ p_\phi &= e^{t'} (-p_+ \operatorname{sh} \zeta \sin \phi + p_- \operatorname{sh} \zeta \cos \phi). \end{aligned}$$

Супергамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2} e^{-2t'} \left(-p_{t'}^2 + p_\zeta^2 + \frac{p_\phi^2}{\operatorname{sh}^2 \zeta} \right) + e^{4\alpha} \bar{V}. \quad (4.14)$$

При $t' \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow -\infty$), новый потенциал \bar{V} равен нулю внутри потенциальных стенок и стремится к бесконечности при приближении к ним.

Асимптотические потенциальные стенки задаются, к примеру, в секторе $|\phi - \pi| < \pi/3$ следующими условиями

$$\operatorname{th} \zeta + \frac{1}{2} \sec \phi = 0.$$

Три угла потенциала (см. Рис. 4.1) можно назвать бильярдными лузами. После масштабного преобразования супергамильтониана (4.14) $\mathcal{H}_\perp e^{2t'} = \bar{\mathcal{H}}_\perp$, мы получаем пространственную метрику из кинетической части гамильтониана

$$d\mathbf{l}^2 = d\zeta^2 + \operatorname{sh}^2 \zeta d\phi^2.$$

Метрика отвечает плоскости Лобачевского, поэтому уместна замена $\operatorname{sh} \zeta = 2r/(1 - r^2)$, и метрика будет определяться из интервала

$$d\mathbf{l}^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{(1 - r^2)^2}.$$

Далее, согласно гиперболической геометрии, можно перейти к комплексным переменным $z = x + iy$, и получить комплексифицированный интервал

$$d\mathbf{l}^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Гамильтоновы уравнения связывают интервал координатного времени dt и интервал времени Мизнера $d\alpha$ в минисуперпространстве

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{N}{2} e^{-3\alpha} p_\alpha.$$

Для исследования космологической сингулярности ($\alpha \rightarrow -\infty$) следует задать связь между временами

$$\alpha = \frac{1}{3} \ln t, \tag{4.15}$$

что определяет функцию хода

$$N = -\frac{2}{3p_\alpha},$$

где p_α – решение гамильтоновой связи (4.13) $\mathcal{H} = 0$.

Перейдём от канонических координат Мизнера

$$(\alpha, \beta_+, \beta_-; p_\alpha, p_+, p_-)$$

к неканоническим переменным $(X, Y, Z; p_x, p_y, p_z)$ [153]:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{12} \exp(2(\alpha + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)), & Y &= \frac{1}{12} \exp(2(\alpha + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)), \\ Z &= \frac{1}{12} \exp(2(\alpha - 2\beta_+)), \\ p_x &= \frac{1}{12}(2p_\alpha + p_+ + \sqrt{3}p_-), & p_y &= \frac{1}{12}(2p_\alpha + p_+ - \sqrt{3}p_-), \\ p_z &= \frac{1}{6}(2p_\alpha - p_+). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь уравнения движения представляются как уравнения Гамильтона на прямой сумме двумерных разрешимых алгебр Ли

$$\mathfrak{g}(6) = \mathfrak{g}(2) \oplus \mathfrak{g}(2) \oplus \mathfrak{g}(2) :$$

$$\{X, p_x\} = X, \quad \{Y, p_y\} = Y, \quad \{Z, p_z\} = Z \quad (4.17)$$

с супергамильтонианом

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= -\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{4}(p_x + p_y + p_z)^2 \\ &- 2(X^2 + Y^2 + Z^2) + (X + Y + Z)^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Супергамильтониан модели (4.18) имеет вид кинетической энергии волчка (4.11):

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^6 I_{ij} x^i x^j, \quad (4.19)$$

где фазовые переменные перенумерованы следующим образом:

$$x_1 = X, \quad x_2 = Y, \quad x_3 = Z, \quad x_4 = p_x, \quad x_5 = p_y, \quad x_6 = p_z,$$

а тензор инерции I_{ij} имеет блочный вид

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Для однородной системы Эйлера — Пуанкаре выбираем частное решение $x_i = C_i/t$ с показателями однородности $\lambda_i = 1$, ($i = 1, \dots, 6$) (4.4). Компоненты матрицы Ковалевской выражаются через структурные константы алгебры (4.17)

$$K_{ij} = (c_{jk}^i I_{kl} + c_{jk}^l I_{ki}) C^l + \delta_{ij}, \quad (4.21)$$

а C_i есть решения алгебраической системы

$$C_i + c_{ij}^k I_{jl} C_k C_l = 0. \quad (4.22)$$

Вычисления показывают [154], что спектр матрицы (4.21) целочисленный: $\rho \in -1, 1, 1, 2, 2, 2$, что указывает на регулярный характер поведения динамической системы. Отрицательное значение $\rho = -1$ есть следствие автономности изучаемой системы дифференциальных уравнений. Частные случаи решений уравнений Эйлера — Пуанкаре на разрешимых алгебрах, ветвящиеся при любом выборе тензора инерции, рассмотрены в [155]. Наша модель к ним не принадлежит.

Следует заметить, что все применявшиеся методы разработаны для поиска полнопараметрического семейства решений. Динамические системы, представляющие физический интерес, интегрируемы по Биркгофу, на нулевом уровне “энергии”. Разработанные методы пригодны для исследования интегрируемости однородных моделей Бьянки. Множители g_i перед экспонентами в супергамльтониане являются параметрами в структурных константах алгебр Ли. Изменяя их, можно получить разные модели Бьянки. Гравитационные римановы метрики с самодуальной кривизной для евклидовой миксмастерной модели рассмотрены в [156]. Самодуальные поля Янга – Миллса с сингулярностями на S^3 получены в [157]. Все регулярные решения, асимптотически неевклидовы классифицированы в [158]. Эти решения были использованы в [159] для доказательства неинтегрируемости миксмастерной модели с помощью пертурбативного теста Пенлеве. Евклидова миксмастерная модель получится заменой скалярных произведений в (4.39), заданных в пространстве Минковского скалярными произведениями в евклидовом пространстве

$$\hat{A}'' := \frac{2(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)}{(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)} = \begin{pmatrix} 2 & -2/5 & -2/5 \\ -2/5 & 2 & -2/5 \\ -2/5 & -2/5 & 2 \end{pmatrix}.$$

В результате виковского поворота получили качественно иную ситуацию: матрица не картановская, поскольку её недиагональные элементы дробные.

4.2 Псевдоевклидовы обобщённые цепочки Тоды

Модель Чарлза Мизнера принадлежит к классу *псевдоевклидовых обобщённых цепочек Тоды* [141, 160]. Супергамильтониан \mathcal{H}_\perp таких структур имеет вид:

$$\mathcal{H}_\perp = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^N g_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})}, \quad (4.23)$$

где введено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1, n-1}$, g_i – некоторые вещественные коэффициенты, (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , \mathbf{a}_i – вещественные “корневые” векторы. Рассмотрим случай, когда $N \geq n$. Во всех известных интегрируемых случаях импульсы \mathbf{p} и экспоненты v_i являются мероморфными функциями комплексного времени t [142], поэтому мы также будем анализировать *интегрируемость модели по Биркгофу*. Зададим два гомеоморфизма: $\mathbb{R}^{1, n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{1, N-1}$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ введением N избыточных переменных, обобщённым *отображением Флашки* $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ [161]:

$$v_i := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}), \quad u_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Уравнения движения

$$\dot{q}_i = \bar{\eta}_i p_i, \quad \dot{p}_i = - \sum_{j=1}^N g_j a_j^i e^{2(\mathbf{a}_j, \mathbf{q})}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.24)$$

где вектор $\bar{\eta}_i(-1, \dots, 1)$, в новых переменных

$$\dot{v}_i = u_i v_i, \quad \dot{u}_i = - \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle g_j v_j, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.25)$$

Система уравнений (4.25) является квазиоднородной. Скобка Пуассона переменных v_i, u_j :

$$\{u_i, v_j\} = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle v_i \quad (4.26)$$

в общем случае является вырожденной. Если имеются линейные соотношения между “корневыми” векторами

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{a}_j = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

тогда

$$F = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i, \quad \Phi = \prod_{i=1}^N v_i^{\alpha_i}$$

являются функциями Казимира.

Рассматриваемая система уравнений имеет частные мероморфные решения:

$$u_i = \frac{U_i}{t}, \quad v_i = \frac{V_i}{t^2}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.27)$$

коэффициенты которых U_i, V_i подчиняются системе алгебраических уравнений

$$V_i(2 + U_i) = 0, \quad U_i - \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle g_j V_j = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Уравнения в вариациях в окрестности решений (4.27)

$$\frac{d}{dt} \delta u_i = - \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle g_j \delta v_j, \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt} \delta v_i = \frac{U_i}{t} \delta v_i + \frac{V_i}{t^2} \delta u_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.29)$$

Решения системы уравнений (4.28), (4.29) ищем в виде:

$$\delta u_i = \xi_i t^{\rho-1}, \quad \delta v_i = \eta_i t^{\rho-2}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Тогда для отыскания коэффициентов ξ_i, η_i получаем линейную однородную систему уравнений со спектральным параметром ρ

$$\begin{aligned} (\rho - 1)\xi_i &= - \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle g_j \eta_j, \\ (\rho - 2 - U_i)\eta_i &= V_i \xi_i, \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

В итоге, получаем формулу для нахождения показателей Ковалевской ρ [154]:

$$\rho = 2 - 2 \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle}, \quad i \neq j, \quad \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle \neq 0. \quad (4.30)$$

Она является обобщением формулы Адлера – ван Мёрбеке [145], полученной для евклидовых цепочек. Матрица Картана алгебры Каца – Му迪

$$\hat{A} \equiv (A_{ij}) = \frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle}$$

строится на корневых векторах, заданных в евклидовом пространстве [145]. Для алгебраической интегрируемости задачи показатели (4.30) должны быть целыми. Применение этого критерия в евклидовом случае приводит к линейаризации гамильтоновых уравнений на абелевых многообразиях.

Применим разработанный метод к анализу интегрируемости миксмастерной модели, “корневые” векторы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(4, -8, 0), \quad \mathbf{a}_2(4, 4, 4\sqrt{3}), \quad \mathbf{a}_3(4, 4, -4\sqrt{3}), \\ \mathbf{a}_4(4, 4, 0), \quad \mathbf{a}_5(4, -2, 2\sqrt{3}), \quad \mathbf{a}_6(4, -2, -2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Матрица Грама \hat{G} , составленная из скалярных произведений векторов в

пространстве Минковского, будет иметь вид:

$$\hat{G} \equiv \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 24 \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Получили, что три “корневых” вектора располагаются вне светового конуса ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$) (пространственно-подобные), остальные три ($\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$) – изотропные, то есть лежат на световом конусе [162].

Используя обобщённую формулу Адлера – ван Мёрбеке (4.30), с учётом нулевой нормы трёх векторов, получаем трёхкратно вырожденное собственное значение $\rho = 4$. Классификация полупростых алгебр для случая евклидова пространства корней была проведена Эли Картаном [142]. Однако, наша матрица не принадлежит к этим хорошо изученным примерам.

4.3 Алгебры Каца – Муди

Согласно теореме Ж.-П. Серра, представления полупростых алгебр Ли можно расширить, сконструировав новое семейство алгебр Ли [163]. Матрица Картана, построенная с помощью некоторой системы корневых векторов, может задать некоторую новую комплексную алгебру Ли. Структура алгебры определена матрицей Картана. По определению [163], невырожденная матрица Картана есть матрица $r \times r$ такая, что $A_{ii} = 2$,

$A_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$, и если $A_{ij} = 0$, то подразумевается, что $A_{ji} = 0$. Матрица Картана \hat{A} определяет алгебру Каца — Муди $\mathfrak{g}(\hat{A})$. Генераторы h_i, e_i, f_i ($i = 1, \dots, r$) задают соотношения Шевалле

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j, \quad (4.32)$$

$$[h_i, e_j] = A_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ij} f_j, \quad (4.33)$$

где δ_{ij} есть символ Кронекера. Матрица \hat{A} симметризуемая, то есть существует такая диагональная матрица \hat{D} с положительными элементами и симметрическая матрица \hat{S} , что $\hat{A} = \hat{D}\hat{S}$.

Триангулярное разложение алгебры $\mathfrak{g}(\hat{A})$ имеет вид прямой суммы векторных пространств

$$\mathfrak{g}(\hat{A}) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Здесь \mathfrak{h} — подалгебра Картана, которая является абелевой подалгеброй, построенной на элементах h_i . Её размерность r называется рангом алгебры. Подпространства \mathfrak{n}_- , \mathfrak{n}_+ свободно генерируются. Подалгебра \mathfrak{n}_+ включает следующие коммутаторы

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots, [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}] \dots]], \quad (4.34)$$

а подалгебра \mathfrak{n}_- :

$$[f_{i_1}, [f_{i_2}, \dots, [f_{i_{k-1}}, f_{i_k}] \dots]]. \quad (4.35)$$

В общем случае, число мультикоммутаторов (4.34), (4.35) бесконечно.

Условия Серра накладывают ограничения, которые могут обрезать цепочку коммутаторов, включающих e_i и f_i ($i \neq j$):

$$(\text{ad } e_i)^{1-A_{ij}} e_j \equiv [e_i, [e_i, \dots, [e_i, e_j]] \dots] = 0, \quad (4.36)$$

$$(\text{ad } f_i)^{1-A_{ij}} f_j \equiv [f_i, [f_i, \dots, [f_i, f_j]] \dots] = 0. \quad (4.37)$$

Если \hat{A} положительна, алгебра $\mathfrak{g}(\hat{A})$ конечномерна и попадает под классификацию Картана, то есть, она является одной из простых конечных алгебр $A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$.

Если \hat{A} положительно полуопределена, то есть, $\det \hat{A} = 0$ с одним нулевым собственным значением, алгебра бесконечномерная и называется алгеброй Каца – Муди. Все аффинные алгебры проклассифицированы в [163]. Алгебра Каца – Муди, в случае, когда матрица \hat{A} имеет одно отрицательное и остальные положительные собственные значения, называется лоренцевой [164]. Имеется подкласс лоренцевых алгебр, называемых гиперболическими. Алгебра Каца – Муди называется гиперболической, если в дополнение к тому, что она лоренцева, её диаграмма Дынкина такова, что если убрать один её узел, диаграмма Дынкина будет относиться к аффинной или конечномерной алгебре Каца – Муди. Лоренцевы алгебры рассматриваются в [165]. Классификация гиперболических корневых систем представлена в работе [166].

Борхердс ввёл новый класс алгебр Каца – Муди $\mathfrak{g}(\hat{A})$ следующим обобщением матриц Картана [146]. Симметрическая матрица Картана задаётся скалярными произведениями корней \mathbf{a}_i : $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$. Матрица \hat{A} может иметь неположительные вещественные элементы $A_{ij} \leq 0$ на диагонали и вне диагонали, но все $A_{ij} \in \mathbb{Z}$, если диагональный элемент $A_{ii} = 2$. Алгебра Борхердса $\mathfrak{g}(\hat{A})$, ассоциированная с обобщённой матрицей Картана \hat{A} , формируется $3r$ генераторами h_i, e_i, f_i ($i = 1, \dots, r$). Коммутационные соотношения Шевалле алгебры Борхердса, отвечающие обобщённой матрице Картана \hat{A} , аналогичны (4.32), (4.33). Следует

заменить условия Серра (4.36), (4.37) на

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-2A_{ij}/A_{ii}} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{1-2A_{ij}/A_{ii}} f_j = 0$$

для диагонального элемента A_{ii} . Если же $A_{ij} = 0$, тогда

$$[e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0.$$

Борхердс доказал, что его алгебра аналогична алгебре Каца — Муди. Он определил корень $\mathbf{a} \in \Delta$ как вещественный, если $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$; а иначе, если $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \leq 0$, как мнимый.

В силу соотношений Шевалле (4.33), присоединённое действие элементов $h_i \in \mathfrak{h}$ на $e_i \in \mathfrak{n}_+$, $f_i \in \mathfrak{n}_-$ диагональное

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_{h_i}(e_j) &= [h_i, e_j] = a_j(h_i)e_j = A_{ij}e_j, \\ \operatorname{ad}_{h_i}(f_j) &= [h_i, f_j] = a_j(h_i)f_j = -A_{ij}f_j. \end{aligned}$$

Здесь $a_j(h_i)$ линейная форма на \mathfrak{h} . Однако, рассматриваемая космологическая модель содержит скрытые симметрии и, как мы ниже докажем, алгебра относится к гиперболическому типу. Матрица Грама (4.31) вырождена и имеет ранг $\operatorname{rank} = 3$. Заметим, что корни разбиваются на тройки $(\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $(\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, $(\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)$. Векторы в каждой тройке лежат в соответствующей плоскости. Изотропные векторы образуются линейной комбинацией пространственно-подобных векторов:

$$\mathbf{a}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3), \quad \mathbf{a}_5 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \quad \mathbf{a}_6 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3).$$

Вид сверху на систему шести корней на Рис. 4.2 демонстрирует симметрию относительно вращений на углы, кратные $2\pi/3$ в плоскости (β_+, β_-) . Корни $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$ лежат на световом конусе.

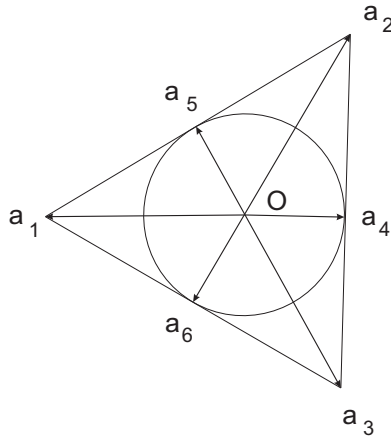


Рис. 4.2: Вид сверху на систему шести корней в пространстве $(\alpha, \beta_+, \beta_-)$. Система симметрична относительно поворотов треугольника на углы, кратные $2\pi/3$ в (β_+, β_-) плоскости.

Рассмотрим систему трёх векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Они образуют систему простых корней

$$\Pi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \Delta_0. \quad (4.38)$$

Пространственные компоненты этих векторов направлены вдоль градиентов стенок потенциала. Пространственные компоненты изотропных векторов направлены в лузы потенциала на Рис. 4.1. Они не принадлежат решётке корневых векторов системы простых корней (4.38).

Матрицу Картана \hat{A}' мы строим на системе простых корней (4.38)

$$\hat{A}' \equiv \frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Соответствующая диаграмма Дынкина показана на рис.4.3. Ассоциированная алгебра Каца — Мууди под порядковым номером 7 содержится в классификационном списке в [166].

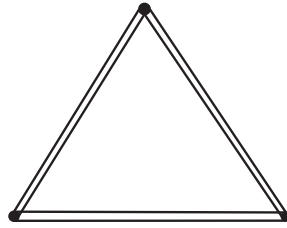


Рис. 4.3: Диаграмма Дынкина, отвечающая миксмастерной модели. Имеются три узла и соединяющие их, согласно правилам построения, линии.

4.4 Миксмастерная модель Луи Виттена

Гравитационные теории с осцилляторным поведением вблизи сингулярности размерности $d < 10$ ассоциируются с гиперболическими алгебрами Каца – Мууди, то есть гиперболичность подразумевает хаос [164]. Существуют многомерные вакуумные космологические модели, представляющие прямое произведение многообразий $R^1 \times M_1 \times \dots \times M_n$, описывающие казнеровское поведение в окрестности сингулярности.

Пространственно однородная вакуумная модель вселенной с геометрией $R^1 \times S^3 \times S^3 \times S^3$ была введена и исследована численными методами в [167], аналитическими методами в [160]. Наша цель состоит в исследовании модели в современном алгебраическом подходе [168]. Метрика пространства-времени определяется интервалом

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{2\alpha} \sum_{i=1}^9 e^{2\beta_{ij}} \sigma^i \sigma^j, \quad (4.40)$$

где дифференциальные формы удовлетворяют соотношениям

$$d\sigma^1 = \sigma^2 \wedge \sigma^3, \quad d\sigma^4 = \sigma^5 \wedge \sigma^6, \quad d\sigma^7 = \sigma^8 \wedge \sigma^9$$

с циклической перестановкой. Генераторы пространственной симметрии модели формируют алгебру Ли, представляющую собой прямую сумму

полупростых алгебр

$$so(3) \oplus so(3) \oplus so(3).$$

Семейство трёхмерных сфер – орбиты соответствующих групп симметрии. Здесь, N, α и β_{ij} – функции только координатного времени t . Диагональная матрица $(\beta)_{ij}$ состоит из элементов

$$\beta_{11} = \frac{2\theta}{\sqrt{3}} + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-,$$

$$\beta_{22} = \frac{2\theta}{\sqrt{3}} + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-,$$

$$\beta_{33} = \frac{2\theta}{\sqrt{3}} - 2\beta_+;$$

$$\beta_{44} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta + \psi_+ + \sqrt{3}\psi_-,$$

$$\beta_{55} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta + \psi_+ - \sqrt{3}\psi_-,$$

$$\beta_{66} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} - \eta - 2\psi_+;$$

$$\beta_{77} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta + \varphi_+ + \sqrt{3}\varphi_-,$$

$$\beta_{88} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta + \varphi_+ - \sqrt{3}\varphi_-,$$

$$\beta_{99} = -\frac{\theta}{\sqrt{3}} + \eta - 2\varphi_+.$$

Супергамильтониан определяется в координатах Мизнера

$$\mathbf{q}(\alpha, \beta_{\pm}, \theta, \psi_{\pm}, \eta, \varphi_{\pm})$$

следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\perp} = -\frac{p_{\alpha}^2}{24} + \sum_{j=1}^8 \frac{p_j^2}{2} + \frac{e^{16\alpha}}{2} \left[e^{-4\theta/\sqrt{3}} g(\beta) + e^{2\theta/\sqrt{3}} (e^{2\eta} g(\psi) + e^{-2\eta} g(\varphi)) \right], \quad (4.41)$$

где $g(x)$ есть функция

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv e^{4x_+ + 4\sqrt{3}x_-} + e^{4x_+ - 4\sqrt{3}x_-} + e^{-8x_+} \\ &- 2e^{4x_+} - 2e^{2x_+ + 2\sqrt{3}x_-} - 2e^{2x_+ - 2\sqrt{3}x_-}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Потенциал супергамильтониана (4.41) представляется в виде суммы трёх членов

$$U = \frac{1}{2}e^{16\alpha - 4\theta/\sqrt{3}}g(\beta) + \frac{1}{2}e^{16\alpha + 2\theta/\sqrt{3} + 2\eta}g(\psi) + \frac{1}{2}e^{16\alpha + 2\theta/\sqrt{3} - 2\eta}g(\varphi). \quad (4.43)$$

Линии уровня функции $g(x_+, x_-)$ показаны на Рис. 4.1. Асимптотическое поведение задаётся лидирующими членами в (4.42)

$$\begin{aligned} g(x) &\sim e^{-8x_+}, & x_+ &\rightarrow -\infty, \\ g(x) &\sim x_-^2 e^{4x_+}, & x_+ &\rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

которые определяют потенциальные стенки. Благодаря триангулярной симметрии функции $g(x)$ получаются следующие две экспоненциальные стенки.

Проблема может быть представлена как обобщённая псевдоевклидова цепочка Тоды экспоненциально взаимодействующих точек. Её потенциальная энергия комбинируется из 18 экспоненциальных членов

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{18} c_j \exp(\mathbf{a}_j, \mathbf{q}).$$

Корневые векторы 9-мерного пространства Уилера–ДеВитта

$$\mathbf{q}(\alpha, \beta_{\pm}, \theta, \psi_{\pm}, \eta, \varphi_{\pm})$$

с метрикой лоренцевой сигнатуры

$$(G)_{\mu\nu} = \text{diag}(-1/12, 1, \dots, 1) \quad (4.44)$$

ИМЕЮТ ВИД:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{a}_1(16, 4, 4\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_2(16, 4, -4\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_3(16, -8, 0, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_4(16, 4, 0, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_5(16, 2, 2\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_6(16, 2, -2\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_7(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{3}, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_8(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 4, -4\sqrt{3}, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_9(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, -8, 0, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_{10}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 4, 0, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_{11}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{3}, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_{12}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 2, -2\sqrt{3}, -2, 0, 0), \\
& \mathbf{a}_{13}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 4, 4\sqrt{3}), \\
& \mathbf{a}_{14}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 4, -4\sqrt{3}), \\
& \mathbf{a}_{15}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, -8, 0), \\
& \mathbf{a}_{16}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 4, 0), \\
& \mathbf{a}_{17}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 2, 2\sqrt{3}), \\
& \mathbf{a}_{18}(16, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 2, -2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Следующие 9 векторов набора

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3; \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9; \mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{14}, \mathbf{a}_{15}) \quad (4.45)$$

пространственно-подобные, а остальные – изотропные. Изотропные векторы направлены в лузы потенциала $U(\mathbf{q})$ (см. Рис. 4.1). Компактификационные схемы из начальных казнеровских состояний в финальные, фигуративно выражаясь, “забивание бильярдных шаров в лузы”, исследовались численными методами в [167]. Далее, для выяснения качественных особенностей поведения модели, сконцентрируем своё внимание на пространственно-подобных векторах (4.45). Изотропные векторы линейно выражаются через них

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), & \mathbf{a}_5 &= \frac{1}{6}(4\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3), & \mathbf{a}_6 &= \frac{1}{6}(\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3); \\ \mathbf{a}_{10} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_8), & \mathbf{a}_{11} &= \frac{1}{6}(4\mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_8 + \mathbf{a}_9), & \mathbf{a}_{12} &= \frac{1}{6}(\mathbf{a}_7 + 4\mathbf{a}_8 + \mathbf{a}_9); \\ \mathbf{a}_{16} &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{14}), & \mathbf{a}_{17} &= \frac{1}{6}(4\mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{14} + \mathbf{a}_{15}), & \mathbf{a}_{18} &= \frac{1}{6}(\mathbf{a}_{13} + 4\mathbf{a}_{14} + \mathbf{a}_{15}). \end{aligned}$$

Изотропные векторы не принадлежат корневой решётке пространственно-подобных векторов.

Сконструируем 9-мерную блочно-типа матрицу Грама скалярных произведений пространственно-подобных векторов \mathbf{a}_i (4.45) с метрикой Уилера – ДеВитта (4.44)

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \equiv G_{\mu\nu} a_i^\mu a_j^\nu = 24 \begin{pmatrix} A_1 & -I & -I \\ -I & A_1 & -I \\ -I & -I & A_1 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Матрица Грама (4.46) состоит из блоков \hat{A}_1 и вырожденных матриц \hat{I}

$$\hat{A}_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{I} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Матрица \hat{A}_1 соответствует картановской матрице миксмастерной космологической модели [154, 156]. Матрица Картана \hat{A} представляется как произведение блочной диагональной матрицы на симметрическую матрицу

$$\frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j \rangle} = \begin{pmatrix} A_1 & -I & -I \\ -I & A_1 & -I \\ -I & -I & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & I/2 & I/2 \\ I/2 & E & I/2 \\ I/2 & I/2 & E \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

где \hat{E} – единичная трёхмерная матрица. Детерминант матрицы \hat{A} отрицательный

$$\det(\hat{A}) = (\det \hat{A}_1)^3 = (-32)^3.$$

Он представляет собой произведение детерминантов блочных матриц и единичной. Собственные значения матрицы \hat{A} следующие:

$$(-8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1).$$

Таким образом, благодаря существованию одного отрицательного значения, следует, что матрица Картана \hat{A} лоренцева. В то же время, она не является гиперболической, поскольку миноры её диагональных элементов не равны нулю: $M_{ii} = -12288$. Миноры диагональных элементов s -го порядка ($s = 2, \dots, 7$) равны нулю или отрицательные: $M_{ii}^{(2)} = (0, 3)$, $M_{ii}^{(3)} = (-32, -8, 0)$, $M_{ii}^{(4)} = (-112, -64, -48)$, $M_{ii}^{(5)} = (-384, -256)$, $M_{ii}^{(6)} = (-1280, -1024)$, $M_{ii}^{(7)} = (-4096)$. Следовательно, мы доказали, что миксмастерного типа вселенная ассоциирована с лоренцевой алгеброй Каца – Мути.

Показатели Ковалевской рассмотренной модели были вычислены в [154]. В дополнении к целым значениям, имеются дробные показатели,

указывающие на нерегулярное поведение модели. Тривиальный вырожденный случай $\theta = \eta = 0$; $\beta_+ = \psi_+ = \varphi_+$; $\beta_- = \psi_- = \varphi_-$ сводится к миксмастерной модели Мизнера. В этом случае матрица Грама (4.47) эквивалентна соответствующей матрице Картана гиперболической алгебры Каца – Муди, ассоциированной с моделью Мизнера. Бильярдный стол идентичен камере Вейля алгебры Каца – Муди, чья диаграмма Дынкина показана на Рис. 4.3. Лоренцевы алгебры Каца – Муди пока не классифицированы, тогда как гиперболические алгебры классифицированы в работах [166, 169], где показано, что не существует алгебр ранга выше 10. Диаграмма Дынкина, соответствующая 9-мерной матрице Картана \hat{A} (4.48) может быть получена из диаграммы модели Мизнера (см. Рис. 4.3) с картановской матрицей \hat{A}_1 (4.47) путём соединения линиями всех узлов диаграммы.

Приведём соответствия между бильярдной системой и группой отражений Вейля $W(\hat{A})$ некоторой алгебры Ли [164].

- Отражения относительно гиперплоскостей, ортогональных простым корням оставляют корневую систему инвариантной. Соответствующая конечномерная группа называется вейлевской. Группа Вейля трансформирует одну камеру Вейля в другую.

- Бильярды, описывающие эволюцию вселенной вблизи сингулярности отвечают алгебрам Каца – Муди. Казнеровские показатели, описывающие свободное движение вселенной между отражениями от стенок, соответствуют элементам подалгебры Картана.

- Потенциальные стенки, отвечающие переходам из одной эры Казнера в другую, соответствуют простым корням алгебры Каца – Муди.

- Группа отражений космологических бильярдов есть группа Вейля

алгебры. Бильярдный стол идентичен камере Вейля.

- Если бильярдный стол гравитационной системы можно идентифицировать с фундаментальной камерой Вейля некоторой гиперболической алгебры Каца – Муди, динамика системы хаотична.

Вейлевские отражения действуют на простые корни по правилу

$$\hat{w}_i(\mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_j - \frac{2\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle}{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle} \mathbf{a}_i.$$

Фундаментальная камера Вейля \mathfrak{C}_W представляет собой клин, описанный около начала корневого пространства, ограничением отражениями относительно гиперплоскостей. Бильярдная камера идентифицируется с камерой Вейля алгебры. Фундаментальные веса $\{\Lambda_i\}$ представляют собой векторы дуального пространства \mathfrak{h}^* подалгебры Картана, определяемые скалярными произведениями [170]

$$\langle \Lambda_i, \mathbf{a}_j \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \delta_{ij} = 24\delta_{ij}.$$

Таким образом, получаем 9 векторов

$$\Lambda_1(-2, 1, \sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\Lambda_2(-2, 1, -\sqrt{3}, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\Lambda_3(-2, -2, 0, -4/\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\Lambda_4(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, -2, 0, 0),$$

$$\Lambda_5(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3}, -2, 0, 0),$$

$$\Lambda_6(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, -2, 0, -2, 0, 0),$$

$$\Lambda_7(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 1, \sqrt{3}),$$

$$\Lambda_8(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, 1, -\sqrt{3}),$$

$$\Lambda_9(-2, 0, 0, 2/\sqrt{3}, 0, 0, 2, -2, 0).$$

Вектор Вейля $\boldsymbol{\rho}$ определяется скалярными произведениями [170] с каждым пространственно-подобным корневым вектором \mathbf{a}_i (4.45):

$$\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle = 24. \quad (4.49)$$

Представим вычисления в компонентной форме

$$\langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}_i \rangle \equiv G_{\mu\nu} \rho^\mu a_i^\nu = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} a_i^\mu a_i^\nu = 24.$$

Вектор Вейля может быть получен суммированием всех фундаментальных весов [170]

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{i=1}^9 \Lambda_i = (-18, 0, \dots, 0). \quad (4.50)$$

Он имеет только времени-подобную компоненту. Его скалярный квадрат отрицательный:

$$\langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle \equiv G_{\mu\nu} \rho^\mu \rho^\nu = -27 < 0.$$

Согласно классификации [165], мы имеем дело с эллиптическим случаем. Отрицательное значение скалярного квадрата вектора Вейля означает, что фундаментальный полиэдр (камера Вейля) имеет почти конечный объём. Смысл вектора Вейля заключается в следующем: $\boldsymbol{\rho}$ указывает на центр, вокруг которой описывается полиэдр \mathfrak{C} . Пространственно-подобные корни (4.45) имеют одинаковую длину $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 24$ и лежат на гиперboloиде, ось которого указывает времени-подобное направление. Для рассмотренного выше случая лоренцевой алгебры Каца – Муди, камера Вейля имеет почти конечный объём и группа Вейля бесконечномерна.

4.5 Выводы

Миксмастерная космологическая модель Мизнера рассматривается как псевдоевклидова обобщённая цепочка Тоды. Показано, что миксмастерная космологическая модель также принадлежит к динамическим системам Эйлера—Пуанкаре на некоторой разрешимой алгебре Ли. Это сразу даёт возможность использовать для анализа подход Йошиды. Получена обобщённая формула Адлера – ван Мёрбеке для псевдоевклидовых цепочек. Вычислены показатели Ковалевской рассматриваемой космологической модели. Доказано, что модель ассоциируется с алгеброй Борхердса. После отбрасывания трёх корней строится диаграмма Дынкина, отвечающая системе простых корней матрицы Картана ранга три. Соответствующая алгебра ассоциирована с гиперболической алгеброй Каца — Муди, что говорит о хаотическом поведении модели вблизи сингулярности.

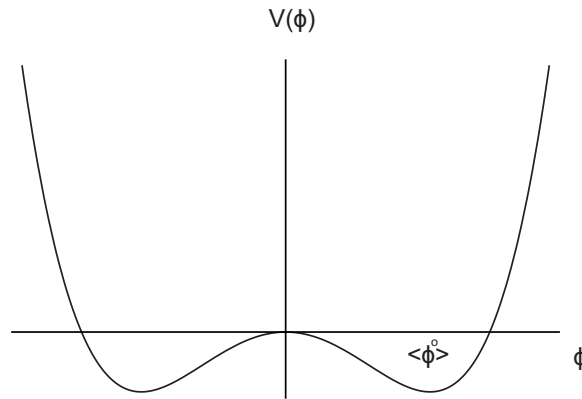
Рассмотрена многомерная космологическая модель миксмастерного типа Луи Виттена. Диаграмма Дынкина соответствует 9-мерной матрице Картана. Доказано, что соответствующая алгебра ассоциирована с лоренцевой алгеброй Каца – Муди, что говорит о её регулярном поведении.

Глава 5

Квантовые поля в конформной космологии

5.1 Потенциал Хиггса

Хотя совсем недавно было совершено экспериментальное открытие бозона Хиггса на Большом Адронном Коллайдере, остались до конца непрояснёнными теоретические вопросы о фундаментальном происхождении электрослабой энергетической шкалы. Аналогичный вопрос остаётся о шкале энергии в квантовой хромодинамике (КХД). Существуют различные трактовки этих шкал внутри Стандартной модели (СМ) [171, 172, 173]. Электрослабая шкала (~ 100) ГэВ обеспечивается значением параметра тахионной массы в исходном лагранжиане СМ, тогда как шкала КХД вообще не задаётся каким-либо параметром лагранжиана. Предполагается, что в КХД масштаб возникает благодаря механизму размерной трансмутации вследствие конформной аномалии. В настоящем Разделе мы покажем простую редукцию лагранжиана электрослабой СМ к его

Рис. 5.1: Потенциал Хиггса $V(\phi)$.

конформно – инвариантной версии и механизм размерной трансмутации, приводящий к конденсатам и массам скалярного бозона Хиггса и фермионных топ – кварковых полей. Согласно представлениям Стандартной модели, элементарные частицы приобретают свои массы из-за связи со средним значением по вакууму полем Хиггса. Это среднее значение возникает в силу спонтанного нарушения глобальной симметрии сектора Хиггса [174, 175]. В Стандартной модели мы имеем дело с потенциалом (см. Рис. 5.1)

$$V_{\text{Higgs}}(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi, \quad (5.1)$$

где одна компонента комплексного скалярного дублетного поля обладает ненулевым средним по вакууму значением $\langle \phi^0 \rangle = v/\sqrt{2}$, если $\mu^2 < 0$, и условие стабильности $\lambda^2 > 0$ предполагается. Присутствие в потенциале члена с тахионной массой является существенным для данной конструкции. В противоположность спонтанному нарушению конформной симметрии, здесь конформная симметрия нарушается явно в силу существования одного фундаментального размерного параметра. Напомним,

что явное нарушение конформной симметрии в секторе Хиггса приводит к серьёзной проблеме фантюинга при ренормировке массы бозона Хиггса.

В классическом приближении, условие потенциального минимума даёт соотношение между вакуумным средним и первичными параметрами λ и μ в виде $v = \sqrt{-2\mu^2/\lambda}$. В Стандартной модели значение v близко к константе взаимодействия Ферми, найденное из экспериментов по среднему времени жизни мюона $v = (\sqrt{2}G_{Fermi})^{-1/2} \approx 246.22$ ГэВ.

Как было показано в работах [176, 177, 178], измеренное значение массы бозона Хиггса делает СМ самосогласованной до высоких энергий, вплоть до масштаба планковской массы. Прямые и непрямые экспериментальные поиски возможно приведут к новым физическим явлениям. В этой ситуации вопрос о том, почему масса топ – кварка, масса бозона Хиггса и электрослабое значение величины v являются величинами одного порядка, становится интригующим.

Идея о динамическом нарушении электрослабой калибровочной симметрии с помощью конденсата топ – кварка обсуждалась ещё в пионерских работах [179] – [182]. Как отмечалось ещё самим Питером Хиггсом [183], скалярное поле, нарушающее конформную симметрию, может быть описано неэлементарной билинейной комбинацией ферми – полей. Но такой подход требует введения нового взаимодействия, выходящего за рамки Стандартной модели, подобно модели Намбу – Иноно–Лазинио. Однако, многочисленные эксперименты, проводимые в физике высоких энергий, не демонстрируют успеха в этом направлении.

5.2 Радиационное нарушение конформной симметрии

Механизм радиационного нарушения масштабной инвариантности был введён Стенли Коулменом и Эриком Вайнбергом [184]. Они показали, что ренормировка некоторых классических масштабно – инвариантных лагранжианов приводит к спонтанному нарушению масштабной инвариантности. Причиной является нестабильность по отношению к инфракрасным сингулярностям на квантовом уровне [185]. В частности, в рассмотренной безмассовой ϕ^4 модели стабильный минимум эффективного потенциала лежит вне области однопетлевой аппроксимации.

Как было показано, такой механизм работает для скалярных и векторных полей с абелевым или неабелевым взаимодействиями. В данном Разделе мы расширим формализм Коулмена – Вайнберга для систем скалярных и фермионных полей с юкавским взаимодействием. Начнём на классическом уровне с конформно-инвариантного лагранжиана, описывающего скалярное и фермионное поля

$$L_{cl} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_c)^2 - \frac{\lambda^2}{2} \phi_c^4 + i \bar{\Psi}_c \gamma_\mu \partial_\mu \Psi_c - y \phi_c \bar{\Psi}_c \Psi_c, \quad (5.2)$$

где ϕ_c и Ψ_c классические безмассовые поля. Модель является перенормируемой. На квантовом уровне мы должны добавить контрчлены всех возможных типов

$$\begin{aligned} L_{c.t.} = & \frac{1}{2} A (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} B \phi^2 - \frac{1}{2} C \phi^4 + i D \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\mu \Psi \\ & - E \bar{\Psi} \Psi + G \phi \bar{\Psi} \Psi + F \phi. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Масштабная инвариантность на классическом уровне требует равенства

нулю контрчленов B и E : они сократятся на уровне петлевых диаграмм. В однопетлевой аппроксимации член $F\phi$ отвечает фермионной петлевой диаграмме типа головастика, то есть $\phi\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$. Она пропорциональна интегралу

$$\int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{\text{Tr}(k_\mu\gamma_\mu + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (5.4)$$

который равен нулю для безмассового фермиона ($m_f = 0$). Однако, согласно [184], невозможно сохранить классическую масштабную инвариантность для широкого класса систем на квантовом уровне в силу инфракрасных расходимостей при петлевых поправках.

Поэтому точка ренормировки должна быть сдвинута от $\phi = 0$. Радиационно индуцированное нарушение симметрии имеет место в системе, потому что эффективный потенциал скалярного поля имеет инфракрасную расходимость при $\phi = 0$. Применим эту идею к модели (5.2), которая на квантовом уровне должна быть ренормирована при $\phi = M \neq 0$, где M – шкала энергии. Иными словами, классическая конформно-инвариантная теория обладает квантовой нестабильностью, называемой конформной аномалией. Тем не менее, нарушение симметрии динамическое, или спонтанное, согласно классификации Намбу [186].

В результате размерной трансмутации, безразмерный параметр классического лагранжиана становится размерным параметром. После сдвига точки ренормировки следует выполнить следующие действия:

- 1) найти минимум эффективного потенциала;
- 2) провести анализ масс полей в этой точке;
- 3) проверить стабильность системы с полученным потенциалом. Последнее условие является принципиальным при конструировании физи-

ческой модели.

Как было показано Коулменом и Вайнбергом [184], даже скалярное поле с ϕ^4 самодействием имеет радиационное нарушение конформной симметрии. Однако, чтобы получить стабильное решение для минимума эффективного потенциала, следует добавить взаимодействие с калибровочным полем. В нашей конструкции мы добавляем юкавское взаимодействие со скалярным полем. Это поле даёт дополнительный вклад в эффективный потенциал и позволяет эффективно достичь стабильный минимум в пертурбативной области значений констант связи.

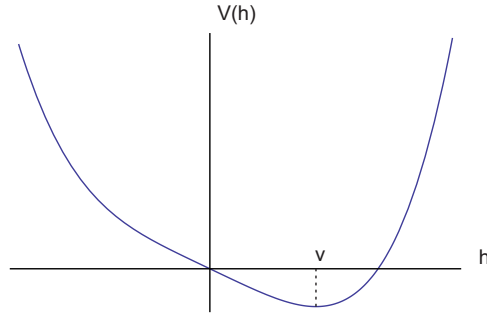
Рассмотрим фермионный конденсат $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, значение которого пропорционально интегралу (5.4). Он нестабилен по отношению к появлению массы фермиона. Прямое вычисление показывает, что даже появление небольшой массы приводит к квадратичной расходимости интеграла

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \sim m_f \Lambda^2,$$

где Λ – ультрафиолетовое обрезание. Расходимость следует ренормировать с помощью соответствующего контрчлена. Классическая конформная симметрия требует сокращения этой петлевой поправки с помощью соответствующего контрчлена $E\bar{\Psi}\Psi$. Следуя подходу [184], мы сдвинем точку ренормировки на некоторое ненулевое значение.

Представляется разумным предложить следующую схему [42]:

- 1) если, благодаря квантовым эффектам, ненулевое значение для конденсата скалярного поля появилось, это даёт массу фермиону;
- 2) фермионное поле создаёт ненулевой (даже расходящийся конденсат);
- 3) конденсат позволяет скалярному полю иметь ненулевое вакуумное

Рис. 5.2: Потенциал $V(h)$ с минимумом.

среднее значение.

Рассмотрим конформно-инвариантный лагранжиан взаимодействия хиггсовского поля

$$L_{int} = -\frac{\lambda^2}{2} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - y_t \Phi \bar{t} t, \quad (5.5)$$

где оставлены только наиболее интенсивные члены взаимодействия: самовзаимодействие и юкавское взаимодействие с топ – кварком. Заметим, что мы опустили член с тахионной массой из Стандартной модели [43]. В дальнейшем будем полагать, что группа $O(4)$ симметрии спонтанно нарушена до $O(3)$. Вакуумное среднее с последующей ренормировкой фермионных операторов в (5.5) ведёт к потенциалу (см. Рис. 5.2)

$$V(h) = \frac{\lambda^2}{8} h^4 + \frac{y_t}{\sqrt{2}} \langle \bar{t} t \rangle h. \quad (5.6)$$

Условие экстремума потенциала

$$\left. \frac{dV(h)}{dh} \right|_{h=v} = 0$$

даёт соотношение

$$v^3 \frac{\lambda^2}{2} = -\frac{y_t}{\sqrt{2}} \langle \bar{t} t \rangle. \quad (5.7)$$

Нетривиальное решение условия минимума приводит к стандартному

разложению $h = v + H$, где H описывает возмущения (ненулевые гармоники) с условием $\int d^3x H = 0$. Юкавская константа связи для топ – кварка $y_t \approx 0.99$ известна из экспериментального значения массы кварка $m_t = v y_t / \sqrt{2} \simeq 173.2$ ГэВ [187]. Таким образом, спонтанное нарушение симметрии приводит к минимуму потенциальной энергии, что есть следствие ненулевого вакуумного среднего v и массы бозона Хиггса. Подстановка $h = v + H$ в потенциал (5.6) даёт

$$V_{\text{cond}}(h) = V_{\text{cond}}(v) + \frac{m_H^2}{2} H^2 + \frac{\lambda^2 v}{2} H^3 + \frac{\lambda^2}{8} H^4, \quad (5.8)$$

что определяет массу скалярной частицы

$$m_H^2 \equiv \frac{3\lambda^2}{2} v^2. \quad (5.9)$$

Подчеркнём, что полученная формула (5.9) отличается от ($m_H = \lambda v$) Стандартной модели с потенциалом Хиггса (5.1).

Из уравнений (5.7) и (5.9) можно выразить квадрат массы скалярной частицы через конденсат топ – кварка

$$m_H^2 = -\frac{3y_t \langle \bar{t}t \rangle}{v\sqrt{2}}. \quad (5.10)$$

Для получения $m_H = 125$ ГэВ требуется, чтобы

$$\langle \bar{t}t \rangle \approx - (122 \text{ GeV})^3. \quad (5.11)$$

Такое значение конденсата топ – кварка не противоречит низкоэнергетической КХД феноменологии. В итоге, хотя изначально, в классическом лагранжиане не было члена с массой скалярного поля, он появился после проведения процедур квантования и ренормировки.

В данной Секции был предложен механизм радиационного нарушения конформной симметрии в Стандартной модели элементарных частиц. В такой конструкции конденсат топ – кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса. Механизм позволяет установить соотношение между конденсатами и массами, включая массу бозона Хиггса. Таким образом, мы предложили простой бутстрап между полем Хиггса и полем топ – кварка. Заметим, что бозон Хиггса рассматривается как элементарная частица, без введения дополнительных взаимодействий за рамками СМ. После спонтанного нарушения симметрии, на древесном уровне лагранжиана отличие от потенциала Хиггса СМ проявляется только в значении константы самодействия. Эти тонкие различия можно выявить только с помощью новых данных, которые можно извлечь на Суперколлайдере после проведения работ по его обновлению.

5.3 Казимировский конденсат скалярного поля

Квантовый конденсатный механизм происхождения массы бозона Хиггса без явного нарушения конформной симметрии бы предложен в работе [42]. Но для определения величины конденсата конформного поля требуется наложение дополнительных физических условий. Одна из возможностей получения конечных значений конденсата состоит в требовании выполнения граничных условий как в эффекте Казимира. В настоящей Главе мы будем рассматривать поля в замкнутом многообразии, что

приведёт к появлению топологического эффекта Казимира. Нетривиальная топология пространства приводит к условиям ренормировки в расчётах. В противовес стандартному эффекту Казимира, не требуется наложение граничных условий. Эффект Казимира играет существенную роль в космологических моделях и физике частиц [188]. Помимо вычисления казимировской энергии, казимировские конденсаты также заслуживают исследования, особенно при рассмотрении ранней стадии развития Вселенной. Казимировский конденсат представляет собой квантовое среднее произведения двух операторов в одной точке многообразия. Он соответствует фейнмановской диаграмме в виде вакуумного пузырька. Вакуум заполнен конденсатом кварковых [189] и глюонных [190] полей. Его учёт вносит вклад в вакуумную энергию Вселенной и другие космологические приложения [191].

В конформно-статичной Вселенной расчёты плотности энергии, давления и числа рождённых частиц бозонных пар, рождённых в ранней Вселенной, изучались в [192]. Однако, казимировский тензор энергии - импульса бозонного поля имеет сингулярность при нулевом значении масштабного фактора $a = 0$, отвечающего начальному моменту эволюции Вселенной. Для того, чтобы избежать сингулярности, можно конформным преобразованием привести модель к сфере современного радиуса a_0 . Одновременно следует провести конформное преобразование полей. При вычислении казимировского конденсата также следует работать в конформных переменных.

Существуют разнообразные эффективные методы регуляризации и ренормировки ультрафиолетовых расходимостей [193] – [197]. В частности, для случая топологического эффекта Казимира, выделение ко-

нечной величины бозонного конденсата можно получить вычитанием из расходящейся суммы, определённой во Вселенной Фрийдмана, соответствующего расходящегося интеграла, определённого в касательном пространстве Минковского. Для этого применяется формула Абеля – Плана из теории аналитических функций [192]. Рассмотрим пространство конформных метрик во Вселенной Фрийдмана $\mathcal{M} = \mathbb{R}^1 \times S^3$. Плотность функции Лагранжа массивного скалярного поля $\varphi(x)$, взаимодействующего с гравитацией [198, 199]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(x) \left(g^{\mu\nu}(x)\nabla_\mu\varphi(x)\nabla_\nu\varphi(x) + m^2\varphi^2(x) + \frac{1}{6}R(x)\varphi^2(x) \right). \quad (5.12)$$

Здесь, g – детерминант метрики пространства - времени; $g^{\mu\nu}$ – компоненты обратного метрического тензора; ∇_μ – ковариантная производная; m – затравочная масса поля.

Скалярная кривизна пространства-времени

$$R(\eta) = \frac{6}{a^3}(a'' + a), \quad (5.13)$$

где штрихом обозначена производная по η . Уравнение Клейна – Фока – Гордона

$$\left(-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 + \frac{1}{6}R \right) \varphi(x) = 0 \quad (5.14)$$

принимает вид

$$\varphi'' + 2\frac{a'}{a}\varphi' - \Delta\varphi + \left(m^2a^2 + \frac{a''}{a} + 1 \right) \varphi = 0, \quad (5.15)$$

где Δ – угловая часть оператора Лапласа 3-сферы единичного радиуса.

Выполним переход к конформной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ и конформному по-

лю $\tilde{\varphi}(x)$ согласно их конформным весам

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{a(\eta)}{a_0}\right)^2 \tilde{g}_{\mu\nu}(x), \quad \varphi(x) = \left(\frac{a_0}{a(\eta)}\right) \tilde{\varphi}(x). \quad (5.16)$$

Интервал статического пространства-времени соответствует современной Вселенной радиуса a_0

$$d\tilde{s}^2 = a_0^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (5.17)$$

с кривизной $\tilde{R} = 6/a_0^2$. Преобразование (5.16) приводит к уравнению Клейна – Фока – Гордона для конформного скалярного поля $\tilde{\varphi}(x)$ с переменной массой $m(\eta) = m \cdot a(\eta)$

$$\tilde{\varphi}'' - \Delta \tilde{\varphi} + (m^2 a^2 + 1)\tilde{\varphi} = 0. \quad (5.18)$$

Переход к конформным переменным приводит к наблюдаемым величинам с регулярным поведением при $a = 0$. В соответствующей квантовой теории получают конечные физические результаты [192]. Собственные функции (5.18) можно представить в факторизованной форме

$$\tilde{\varphi}_J(x) = g_\lambda(\eta) Y_J(\mathbf{x}). \quad (5.19)$$

Собственные функции $Y_J(\chi, \theta, \phi)$ оператора Лапласа – Бельтрами [188] представляют собой сферические функции

$$(\Delta + k_J^2) Y_J = 0, \quad (5.20)$$

формирующие ортогональный базис унитарных представлений группы изометрии сферы S^3

$$Y_J(\chi, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\sin \chi}} \sqrt{\frac{\lambda(\lambda + l)!}{(\lambda - l + 1)!}} P_{\lambda-1/2}^{-l-1/2}(\cos \chi) Y_{lM}(\theta, \phi),$$

где комбинированный индекс $J \equiv \{\lambda, l, M\}$ пробегает значения

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1; \quad -l \leq M \leq l; \quad k_J^2 = \lambda^2 - 1.$$

Уравнение осцилляторного типа для $g_\lambda(\eta)$ получается после подстановки (5.19) в уравнение Клейна – Фока – Гордона (5.18)

$$\frac{d^2}{d\eta^2} g_\lambda(\eta) + \omega^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad \omega^2(\eta) \equiv \lambda^2 + m^2 a^2(\eta). \quad (5.21)$$

Для решения задачи необходимо задать определённый эволюционный закон для масштабного фактора $a(\eta)$ [192]. Функции

$$\tilde{\varphi}_J^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_\lambda(\eta) Y_J^*(\mathbf{x}), \quad \tilde{\varphi}_J^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} g_\lambda^*(\eta) Y_J(\mathbf{x}) \quad (5.22)$$

образуют полный базис классических решений уравнения (5.18), если вронскиан равен

$$g_\lambda g_\lambda^{*'} - g_\lambda' g_\lambda^* = -2i.$$

Квантовое вакуумное состояние задаётся условием $a_J^{(-)}|0\rangle = 0$. Операторные коммутационные соотношения:

$$[a_J^{(-)}, a_{J'}^{(+)}] = \delta_{JJ'}, \quad [a_J^{(+)}, a_{J'}^{(+)}] = [a_J^{(-)}, a_{J'}^{(-)}] = 0. \quad (5.23)$$

Квантовый полевой оператор комбинируется как сумма

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_J \left(\tilde{\varphi}_J^{(-)}(x) a_J^{(-)} + \tilde{\varphi}_J^{(+)}(x) a_J^{(+)} \right). \quad (5.24)$$

Условия ортогональности

$$(\tilde{\varphi}_J^{(\pm)}, \tilde{\varphi}_{J'}^{(\pm)}) = \mp \delta_{JJ'}, \quad (\tilde{\varphi}_J^{(\pm)}, \tilde{\varphi}_{J'}^{(\mp)}) = 0,$$

где скалярное произведение функций определяется в конечном объёме V как

$$(f, g) \equiv \int_V d^3x \sqrt{\gamma} \left(f^* \frac{\partial}{\partial t} g - g^* \frac{\partial}{\partial t} f \right).$$

Определим квантовый казимировский конденсат как вакуумное среднее произведения двух операторов в одной точке [200]:

$$\begin{aligned}\langle 0|\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x)|0\rangle &= \sum_{J,J'} \tilde{\varphi}_J^{(-)}(x)\tilde{\varphi}_{J'}^{(+)}(x)\langle 0|a_J^{(-)}a_{J'}^{(+)}|0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_J |g_\lambda(\eta)|^2 |Y_J(\mathbf{x})|^2.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Применяя формулу суммирования по квантовым числам (l, M)

$$\sum_{l,M} |Y_J(\mathbf{x})|^2 = \frac{\lambda^2}{2\pi^2},$$

получаем

$$\langle 0|\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x)|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 |g_\lambda(\eta)|^2.\quad (5.26)$$

В настоящей Главе эффекты вакуумной поляризации и рождения частиц мы не будем рассматривать. Ограничим наше внимание на чисто статическом казимировском вкладе в квантовый конденсат. При условии $(a' = 0)$ [188], решение осцилляторного уравнения (5.21) принимает вид

$$g_\lambda(\eta) = \frac{e^{i\omega_\lambda\eta}}{\sqrt{\omega_\lambda}}.$$

Таким образом мы получаем расходящийся ряд

$$\langle 0|\tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(x)|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}}.\quad (5.27)$$

Теперь проблема формулируется для скалярного поля с бегущей массой (ma) в статической вселенной Эйнштейна $\mathbb{R}^1 \times S^3$, где S^3 – сфера радиуса a_0 . Для рассматриваемой задачи эффективным методом ренормировки ряда служит формула Абеля – Плана [188]

$$\text{ren} \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda) - \int_0^{\infty} dt F(t) = \frac{F(0)}{2} + i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) - 1},\quad (5.28)$$

где $F(\lambda)$ – аналитическая функция. С физической точки зрения, мы получаем разность между расходящейся суммой $F(\lambda)$, определённой в пространстве-времени Фрийдмана, и соответствующим интегралом от функции $F(t)$, определённой в касательном пространстве Минковского. В результате вычитания, получаем конечный результат в виде сходящегося ряда:

$$\tilde{c} := \langle 0 | \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x) | 0 \rangle^{\text{ren}} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2} (\exp(2\pi\lambda) - 1)}. \quad (5.29)$$

При выводе этой формулы мы приняли во внимание, что подынтегральная функция $F(\lambda) = \lambda^2 / \sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}$ имеет точки ветвления в комплексной плоскости: $\lambda = \pm i m a$, поэтому

$$\begin{aligned} F(i\lambda) &= F(-i\lambda) = -\frac{\lambda^2}{\sqrt{m^2 a^2 - \lambda^2}}, & \lambda < ma, \\ F(i\lambda) &= -F(-i\lambda) = i \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2}}, & \lambda > ma. \end{aligned}$$

Интеграл (5.29) ограничен снизу переменной затравочной массой элементарной частицы. В случае безмассовых виртуальных частиц регуляризирующая функция в (5.29) совпадает с функцией распределения для бозонов с эффективной температурой $T_{\text{eff}} = \hbar c / (2\pi k_B)$, где k_B – постоянная Больцмана. Для безмассового случая ($m = 0$), интеграл (5.29) находится точно

$$\tilde{c}_0 = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\exp(2\pi\lambda) - 1} = \frac{1}{4\pi^2} \text{ren} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda = -\frac{1}{48\pi^2}. \quad (5.30)$$

Для элементарных частиц с $ma \gtrsim 0.5$, условие энергодоминантности $\epsilon \geq |p|$ нарушается, что обсуждается в работе [201]. Это может приве-

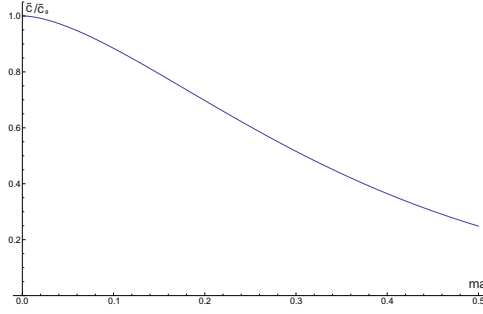


Рис. 5.3: Казимировский конденсат конформного массивного скалярного поля как функция бегущей массы ma .

сти к рождению частиц гравитационным полем. Зависимость безразмерного отношения конформных конденсатов (5.29) и (5.30) как функция бегущей массы $\tilde{c}/\tilde{c}_0 = \tilde{c}/\tilde{c}_0(ma)$ регулярна и показана на Рис. 5.3.

5.4 Казимировский конденсат биспинорного поля

Вычислим квантовый конденсат массивного биспинорного поля во Вселенной Фридмана. Метрика пространства-времени в тетрадной форме

$$ds^2 = \eta_{ab} \left(e_{\mu}^{(a)} dx^{\mu} \right) \left(e_{\nu}^{(b)} dx^{\nu} \right), \quad (5.31)$$

где тетрадные векторы

$$\begin{aligned} e_{(0)0} &= -a(\eta); & e_{(1)1} &= a(\eta); & e_{(2)2} &= a(\eta) \sin \chi; \\ e_{(3)3} &= a(\eta) \sin \chi \sin \theta \end{aligned}$$

касаются линий координат [202]. Матрицы Дирака удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$[\gamma^a, \gamma^b]_+ = -2\eta^{ab},$$

где $(\eta_{ab}) = (-1, 1, 1, 1)$ – метрика Минковского.

В римановом пространстве-времени постоянные матрицы Дирака γ^a заменяются матричными функциями $\gamma^\mu(x)$

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_{(a)} \gamma^a$$

с антикоммутиационными соотношениями

$$[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)]_+ = [\gamma^a, \gamma^b]_+ e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} = -2\eta^{ab} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} = -2g^{\mu\nu}(x).$$

В конформной метрике Фрийдмана они имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma^0(x) &= \frac{1}{a} \gamma^0, & \gamma^1(x) &= \frac{1}{a} \gamma^1, & \gamma^2(x) &= \frac{1}{a \sin \chi} \gamma^2, \\ \gamma^3(x) &= \frac{1}{a \sin \chi \sin \theta} \gamma^3. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Уравнение Дирака для массивного биспинорного поля $\psi(x)$ в пространстве - времени Фрийдмана принимает вид

$$(\gamma^\mu(x) D_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (5.33)$$

где ковариантные производные D_μ биспинора определяются с помощью спиновой связности

$$D_\mu \psi := \left(\partial_\mu - \frac{1}{4} \Delta_{(a)(b)(c)} e_\mu^{(c)} \gamma^b \gamma^a \right) \psi$$

с коэффициентами Риччи, антисимметричными по первым индексам

$$\begin{aligned} \Delta_{(a)(b)(c)} &\equiv \left(\nabla_\mu e_{(a)}^\nu \right) e_{(b)\nu} e_{(c)}^\mu = \nabla_\mu \left(e_{(a)}^\nu e_{(b)\nu} \right) e_{(c)}^\mu - \left(\nabla_\mu e_{(b)\nu} \right) e_{(a)}^\nu e_{(c)}^\mu \\ &= -\Delta_{(b)(a)(c)}. \end{aligned}$$

Тетрадные коэффициенты в конформном пространстве-времени Фридмана:

$$\begin{aligned} e_{(0)}^0 &= \frac{1}{a(\eta)}, & e_{(1)}^1 &= \frac{1}{a(\eta)}, & e_{(2)}^2 &= \frac{1}{a(\eta) \sin \chi}, \\ e_{(3)}^3 &= \frac{1}{a(\eta) \sin \chi \sin \theta}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ковариантные производные тетрад находятся с помощью коэффициентов Кристоффеля $\Gamma_{\mu\epsilon}^\nu$

$$\nabla_\mu e_{(a)}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} e_{(a)}^\nu + \Gamma_{\mu\epsilon}^\nu e_{(a)}^\epsilon.$$

Вычислим теперь коэффициенты Риччи

$$\begin{aligned} \Delta_{(0)(1)(1)} &= \left(\nabla_1 e_{(0)}^1 \right) e_{(1)1} e_{(1)}^1 \\ &= -\Delta_{(1)(0)(1)} = - \left(\nabla_1 e_{(1)}^0 \right) e_{(0)0} e_{(1)}^1 = \frac{a'}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(0)(2)(2)} &= \left(\nabla_2 e_{(0)}^2 \right) e_{(2)2} e_{(2)}^2 \\ &= -\Delta_{(2)(0)(2)} = - \left(\nabla_2 e_{(2)}^0 \right) e_{(0)0} e_{(2)}^2 = \frac{a'}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)(2)(2)} &= \left(\nabla_2 e_{(1)}^2 \right) e_{(2)2} e_{(2)}^2 \\ &= -\Delta_{(2)(1)(2)} = - \left(\nabla_2 e_{(2)}^1 \right) e_{(1)1} e_{(2)}^2 = \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(0)(3)(3)} &= \left(\nabla_3 e_{(0)}^3 \right) e_{(3)3} e_{(3)}^3 \\ &= -\Delta_{(3)(0)(3)} = - \left(\nabla_3 e_{(3)}^0 \right) e_{(0)0} e_{(3)}^3 = \frac{a'}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)(3)(3)} &= \left(\nabla_3 e_{(1)}^3 \right) e_{(3)3} e_{(3)}^3 \\ &= -\Delta_{(3)(1)(3)} = - \left(\nabla_3 e_{(3)}^1 \right) e_{(1)1} e_{(3)}^3 = \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{(2)(3)(3)} &= \left(\nabla_3 e_{(2)}^3 \right) e_{(3)3} e_{(3)}^3 \\ &= -\Delta_{(3)(2)(3)} = - \left(\nabla_3 e_{(3)}^2 \right) e_{(2)2} e_{(3)}^3 = \frac{1 \operatorname{ctg} \theta}{a \sin \chi}.\end{aligned}$$

В вышеприведённых формулах штрихом обозначена производная по конформному времени η .

Уравнение Дирака поля $\psi(x)$ принимает вид [188]:

$$\begin{aligned}&\gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{3a'}{2a} \right) \psi(x) + \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \operatorname{ctg} \chi \right) \psi(x) \\ &+ \gamma^2 \frac{1}{\sin \chi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) \psi(x) + \gamma^3 \frac{1}{\sin \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(x) \\ &+ iam \psi(x) = 0.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Выполним переход к конформной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ и конформному биспинорному полю $\tilde{\psi}(x)$ согласно их конформным весам:

$$g_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{a(\eta)}{a_0} \right)^2 \tilde{g}_{\mu\nu}(x), \quad \psi(x) = \left(\frac{a_0}{a(\eta)} \right)^{3/2} \tilde{\psi}(x).\tag{5.36}$$

Теперь проблема биспинорного поля с массой (ma) формулируется в статической вселенной Эйнштейна с конформным интервалом (5.17). Для разделения переменных возьмём следующий анзац [202]

$$\tilde{\psi}_J(x) = \begin{pmatrix} f_{\lambda+}(\eta)E & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}(\eta)E \end{pmatrix} N_J(\chi, \theta, \phi),\tag{5.37}$$

где E – единичная матрица (2×2), $N_J(\chi, \theta, \phi) = (N_1, N_2, N_3, N_4)^T$ – некоторый биспинор с комбинированным индексом $J \equiv \{\lambda, j, l, M\}$:

$$\lambda = 3/2, 5/2, \dots; \quad j = 1/2, 3/2, \dots, \lambda - 1; \quad l = j \pm 1/2; \quad -j \leq M \leq j.$$

Переменные $f_{\lambda+}$, $f_{\lambda-}$ как функции конформного времени удовлетворяют осцилляторным уравнениям второго порядка

$$f_{\lambda\pm}'' + (\omega_\lambda^2(\eta) \pm ima'(\eta)) f_{\lambda\pm} = 0, \quad \omega_\lambda^2(\eta) \equiv \lambda^2 + m^2 a^2(\eta).\tag{5.38}$$

После подстановки (5.37), уравнение Дирака (5.35) приобретает вид

$$\begin{aligned}
& -i\lambda \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} N_J + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \text{ctg } \chi \right) N_J \\
& + \frac{1}{\sin \chi} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \text{ctg } \theta \right) N_J \\
& + \frac{1}{\sin \chi \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial N_J}{\partial \phi} = 0,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

где были использованы матрицы Паули.

Представим биспинор N_J в виде произведения

$$N_J(\chi, \theta, \phi) = M(\chi)S(\theta, \phi)Z(\theta, \phi), \tag{5.40}$$

где матрицы $M(\chi)$ и $S(\theta, \phi)$ имеют вид суперматриц

$$M(\chi) = \begin{pmatrix} M_1(\chi)E & 0 \\ 0 & M_2(\chi)E \end{pmatrix}, \quad S(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} G(\theta, \phi) & 0 \\ 0 & G(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \tag{5.41}$$

где G – унитарная матрица (2×2)

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp[i(\theta + \phi)/2] & -i \exp[i(\theta - \phi)/2] \\ \exp[-i(\theta - \phi)/2] & i \exp[-i(\theta + \phi)/2] \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

а $Z(\theta, \phi)$ – биспинор.

Волновая функция является собственной функцией операторов

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2, \quad J_z = L_z + S_z,$$

где \mathbf{L} и \mathbf{S} – операторы углового и спинового моментов электрона, соответственно. Собственные значения оператора проекции углового момента

L_z равны $\hbar m$, где m пробегает целые значения: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Собственные значения оператора J_z есть $\hbar M$. Следовательно, если спин направлен вверх, тогда $M = m + 1/2$, если же вниз, тогда $M = m - 1/2$. Собственные значения оператора \mathbf{J}^2 равны $\hbar^2 j(j + 1)$. Биспинор $Z_{j\ell M}(\theta, \phi)$ комбинируется из сферических спиноров $\Omega_{j\ell M}(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned} Z_{j\ell M}(\theta, \phi) &\equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i^{l-l'+1} \Omega_{j\ell M}(\theta, \phi) \\ \Omega_{j\ell' M}(\theta, \phi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\mp) \Omega_{j\ell M}(\theta, \phi) \\ \Omega_{j\ell' M}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

где $l = j \pm 1/2$, $l' = j \mp 1/2$, так что $l + l' = 2j$. Сферические спиноры выражаются через коэффициенты Клебша – Гордана. Для ($l = j + 1/2$):

$$\Omega_{j\ell M}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l-M+1/2}{2l+1}} Y_{l, M-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{\frac{l+M+1/2}{2l+1}} Y_{l, M+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix};$$

и для ($l = j - 1/2$):

$$\Omega_{j\ell M}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+M+1/2}{2l+1}} Y_{l, M-1/2}(\theta, \phi) \\ \sqrt{\frac{l-M+1/2}{2l+1}} Y_{l, M+1/2}(\theta, \phi) \end{pmatrix}.$$

Сферические спиноры $\Omega_{j\ell M}(\theta, \phi)$ обладают свойствами

$$\sum_{M=-j}^j \Omega_{j\ell M}^+ \Omega_{j\ell M} = \frac{1}{2\pi} \left(j + \frac{1}{2} \right). \quad (5.44)$$

Умножим уравнение (5.39) слева на унитарно сопряжённую матрицу

S^+ и получим

$$\begin{aligned}
& -i\lambda \begin{pmatrix} M_1 E & 0 \\ 0 & -M_2 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 0 & R(\partial/\partial\chi + \text{ctg } \chi) M_2 \\ -R(\partial/\partial\chi + \text{ctg } \chi) M_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{\sin \chi} \begin{pmatrix} 0 & M_2(D - R) \\ -M_1(D - R) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Выше были использованы условия унитарной эквивалентности матриц [202]

$$\begin{aligned}
G^+ \sigma_1 G &= R, \quad G^+ \sigma_2 G = \frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}), \\
G^+ \sigma_3 G &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial R}{\partial \phi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}),
\end{aligned}$$

где \mathbf{n} – единичный радиус-вектор,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = R = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \quad R^2 = E, \quad R^+ = R.$$

Далее,

$$G^+ \sigma_2 \frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} R, \quad G^+ \sigma_3 \frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} K, \tag{5.46}$$

где

$$K \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

Дифференциальный оператор D :

$$D \equiv \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial R}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

и

$$R\Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm}, \quad R\Omega_{j'l'm} = -\Omega_{jlm}; \tag{5.48}$$

$$(D - R)\Omega_{jIM} = (\mp)(j + 1/2)\Omega_{j'IM}, \quad (D - R)\Omega_{j'IM} = (\pm)(j + 1/2)\Omega_{jIM}. \quad (5.49)$$

Уравнения Дирака (5.45) принимают вид

$$-i\lambda M_1 u_1 + \left(\frac{d}{d\chi} + \text{ctg } \chi \right) M_2 (Ru_2) + \frac{1}{\sin \chi} M_2 (D - R)u_2 = 0, \quad (5.50)$$

$$i\lambda M_2 u_2 - \left(\frac{d}{d\chi} + \text{ctg } \chi \right) M_1 (Ru_1) - \frac{1}{\sin \chi} M_1 (D - R)u_1 = 0. \quad (5.51)$$

После применения (5.48), (5.49), сферические спиноры расщепляются и получается система двух дифференциальных уравнений

$$\pm i\lambda M_1 - \left(\frac{d}{d\chi} + \text{ctg } \chi \right) M_2 \pm \frac{j + 1/2}{\sin \chi} M_2 = 0, \quad (5.52)$$

$$i\lambda M_2 \mp \left(\frac{d}{d\chi} + \text{ctg } \chi \right) M_1 - \frac{j + 1/2}{\sin \chi} M_1 = 0. \quad (5.53)$$

Мы обозначили $M_1 \equiv q_{\lambda j}^{\pm}(\chi)$, $M_2 \equiv \pm q_{\lambda j}^{\mp}(\chi)$, и представляем окончательный результат с помощью присоединённых полиномов Лежандра [202]

$$q_{\lambda j}^+(\chi) = \frac{1}{2 \cos(\chi/2) \sqrt{\sin \chi}} \sqrt{\frac{(\lambda + j)!}{(\lambda - j - 1)!}} \\ \times \left[(\lambda + j + 1) P_{\lambda}^{-j-1}(\cos \chi) + (\lambda - j - 1) P_{\lambda-1}^{-j-1}(\cos \chi) \right],$$

$$q_{\lambda j}^-(\chi) = \frac{-i}{2 \cos(\chi/2) \sqrt{\sin \chi}} \sqrt{\frac{(\lambda + j)!}{(\lambda - j - 1)!}} \left[P_{\lambda}^{-j}(\cos \chi) + P_{\lambda-1}^{-j}(\cos \chi) \right].$$

Полная система базисных функций $\psi_J^{(\pm)}$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$(\psi_J^{(\pm)}, \psi_{J'}^{(\pm)}) \equiv \int_V d^3x \sqrt{\gamma} \psi_J^{(\pm)+}(x) \psi_{J'}^{(\pm)}(x) = \delta_{JJ'}, \quad (\psi_J^{(\pm)}, \psi_{J'}^{(\mp)}) = 0.$$

Для вычисления вакуумных средних значений фермионного конденсата, разложим полевой оператор по полному базису положительно- и

отрицательно- частотных биспиноров. Квантовый полевой оператор комбинируется как следующая сумма

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_J \left(\tilde{\psi}_J^{(+)}(x) \hat{a}_J + \tilde{\psi}_J^{(-)}(x) \hat{b}_J^+ \right). \quad (5.54)$$

Здесь \hat{a}_J – оператор аннигиляции частиц, и \hat{b}_J^+ – оператор рождения античастиц. Определим квантовый казимировский конденсат как вакуумное среднее произведения двух операторов в одной точке. После использования стандартных антикоммутиационных соотношений, получаем суммирование по модам

$$\langle 0 | \bar{\tilde{\psi}}(x) \tilde{\psi}(x) | 0 \rangle = \sum_J \bar{\tilde{\psi}}_J^{(-)}(x) \tilde{\psi}_J^{(-)}(x) = \sum_J \psi_J^{(-)+}(x) \gamma^0 \psi_J^{(-)}(x), \quad (5.55)$$

где $\bar{\tilde{\psi}} \equiv \tilde{\psi}^+ \gamma^0$. Согласно (5.55) заключаем, что казимировский конденсат формируется из виртуальных античастиц. Представим сумму (5.55) в матричном виде

$$\sum_J N_J^+ \begin{pmatrix} f_{\lambda^+}^{(-)}(\eta) E & 0 \\ 0 & f_{\lambda^-}^{(-)}(\eta) E \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} f_{\lambda^+}^{(-)}(\eta) E & 0 \\ 0 & f_{\lambda^-}^{(-)}(\eta) E \end{pmatrix} N_J.$$

Ограничим наше внимание на чисто статическом казимировском вкладе в квантовый конденсат, принимая условие статичности ($a' = 0$) [188].

Положительно- и отрицательно- частотные решения:

$$f_{\lambda^\pm}^{(+)}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\omega \mp ma}{\omega}} e^{i\omega\eta}, \quad f_{\lambda^\pm}^{(-)}(\eta) = \sqrt{\frac{\omega \pm ma}{\omega}} e^{-i\omega\eta}. \quad (5.56)$$

Отрицательно- частотные решения (5.56) удовлетворяют равенству

$$|f_{\lambda^+}^{(-)}|^2 - |f_{\lambda^-}^{(-)}|^2 = 2ma/\omega.$$

Далее, для вычисления квантового конденсата используется формула суммирования по квантовым числам

$$\sum_{j,l,M} \psi_J^{(\pm)+}(x) \psi_J^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (5.57)$$

В итоге получаем расходящийся ряд

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) \tilde{\psi}(x) | 0 \rangle = \frac{ma}{\pi^2} \sum_{\lambda=3/2, 5/2, \dots}^{\infty} \frac{\lambda^2 - 1/4}{\sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}}. \quad (5.58)$$

Для ренормировки воспользуемся формулой Абеля – Плана из теории аналитических функций [188]

$$\begin{aligned} \text{ren} \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda + 1/2) &\equiv \\ &\equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda + 1/2) - \int_0^{\infty} dt F(t) = -i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) + 1} \end{aligned}$$

для суммирования по полуцелым числам. Трёхмерное евклидово пространство, касательное к трёхмерной сфере S^3 используется как фоновое пространство. В результате проведённой процедуры перенормировки получаем сходящийся интеграл [203]

$$\tilde{c} := \langle 0 | \bar{\psi}(x) \tilde{\psi}(x) | 0 \rangle^{\text{ren}} = 2 \frac{ma}{\pi^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{d\lambda (\lambda^2 + 1/4)}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2} (\exp(2\pi \lambda) + 1)}. \quad (5.59)$$

Интеграл (5.59) ограничен снизу переменной массой элементарной частицы. Зависимость конформного казимировского конденсата как функции переменной массы $\tilde{c} = \tilde{c}(ma)$ показана на Рис. 5.4.

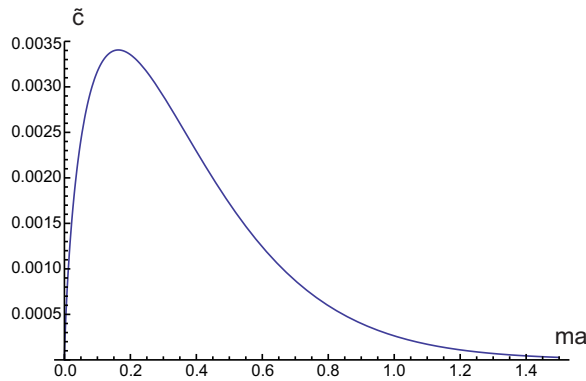


Рис. 5.4: Казимировский конденсат конформного массивного фермионного поля как функция бегущей массы ma .

5.5 Уравнение состояния казимировского вакуума

Формально расходящаяся вакуумная плотность энергии массивного бозонного поля положительная, тогда как для массивного фермионного поля отрицательная [191]. Это даёт надежду на решение космологической проблемы [204, 205]. Теоретические предсказания для значения Λ -члена превышают наблюдательные данные более чем на 10 порядков. Мы рассматриваем проявление эффекта Казимира в нетривиальных пространствах, что особенно актуально в космологии ранней вселенной.

Уравнение состояния материи $p = w\epsilon$ связывает давление p и плотность энергии ϵ , где w - коэффициент пропорциональности. Принимая w постоянным, принято рассматривать случаи: для межгалактической пыли $p = 0$; для радиации $p = \epsilon/3$; для вклада от Λ -члена $p = -\epsilon$; для сверхжесткого состояния материи $p = \epsilon$. Динамическое уравнение состояния с непостоянным коэффициентом пропорциональности $w(z) = w_0 + w_1z$, линеаризованное вблизи нашей эпохи по красному смещению z , было

предложено в работе [206].

В настоящей Главе мы изучаем чисто казимировский вклад в тензор энергии – импульса, рассматривая квазистатический случай [207]. В течение эволюции Вселенной массы элементарных частиц растут, что проявляется в характеристиках квантового вакуума. Квантовый вакуум обладает необычными свойствами, что может обосновать неожиданные свойства диаграммы Хаббла. Поэтому особый интерес представляет изучение уравнения состояния вакуума. Использование формулы Абеля – Плана из теории аналитических функций оказывается эффективным методом ренормировки расходящихся характеристик в квантовой теории поля. Квантовое среднее значение “00”-компоненты тензора энергии – импульса массивного скалярного поля [188]

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = \frac{1}{4\pi^2 a^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}. \quad (5.60)$$

Квантовое среднее пространственных компонент тензора энергии – импульса массивного скалярного поля [188]

$$\langle 0|T_{ij}|0\rangle = \frac{1}{12\pi^2 a^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}} \gamma_{ij}, \quad (5.61)$$

где γ_{ij} – пространственные компоненты метрического тензора.

Перейдём к конформной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$. Согласно конформным весам получим конформную плотность энергии $\tilde{\epsilon}$ и конформное давление \tilde{p} :

$$\tilde{\epsilon} = \left(\frac{a(\eta)}{a_0} \right)^4 \epsilon, \quad \tilde{p} = \left(\frac{a(\eta)}{a_0} \right)^4 p.$$

Применив формулу Абеля – Плана, получим ренормированное значение

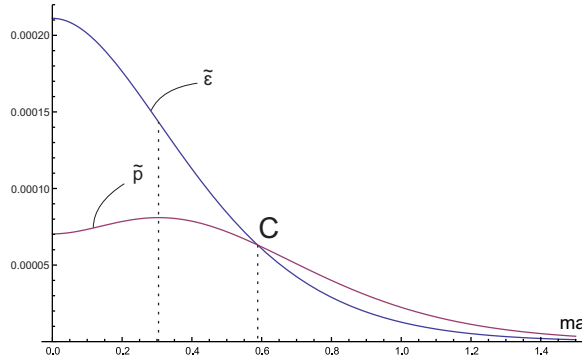


Рис. 5.5: Конформные казимировские плотность энергии и давление как функции бегущей массы ma . Здесь мы положили $a_0 = 1$.

для плотности энергии

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{2\pi^2 a_0^4} \int_{ma}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2}}{\exp(2\pi\lambda) - 1}, \quad (5.62)$$

и ренормированное значение для давления (см. Рис. 5.5)

$$\tilde{p} = \frac{1}{6\pi^2 a_0^4} \int_{ma}^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^4}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2} (\exp(2\pi\lambda) - 1)}. \quad (5.63)$$

Систему уравнений $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(ma)$ (5.62), $\tilde{p} = \tilde{p}(ma)$ (5.63) можно рассматривать как параметрическое представление уравнения состояния вакуума $p = p(\epsilon)$ (см. Рис. 5.5). Явная зависимость $p = p(\epsilon)$ показана на

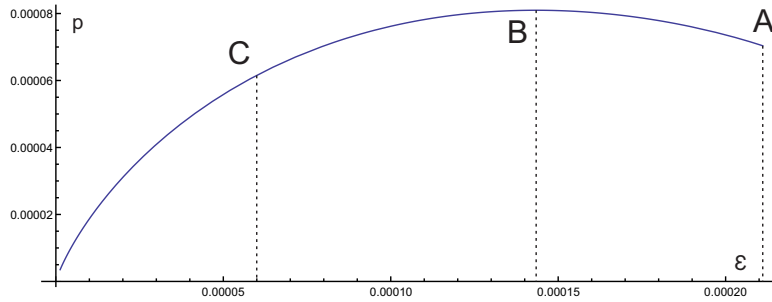


Рис. 5.6: Уравнение состояния массивного скалярного вакуумного поля для каждого значения ma .

Рис. 5.6. В безмассовом пределе ($ma = 0$) уравнение состояния становится ультрарелятивистским (Рис. 5.6, точка А)

$$\epsilon = 3p = \frac{1}{480\pi^2 a^4}.$$

Условие энергодоминантности ($\epsilon \geq p$) реализуется на кривой ABC (Рис. 5.6). Вакуум виртуальных частиц в случае $p = \epsilon$ ($ma \approx 0.59$) отвечает сверхжесткому состоянию материи (Рис. 5.5, Рис. 5.6, точка С). Таким образом, мы имеем уравнение состояния $p = w\epsilon$ с $1/3 \leq w \leq 1$ (Рис. 5.6, кривая ABC). С дальнейшим ростом массы ma , условие энергодоминантности нарушается (область правее точки С на Рис. 5.5, и левее точки С на Рис. 5.6). Для классической материи выполнение условия энергодоминантности требует, чтобы скорость звука не превышала скорости света. В соответствующей квантовой теории при нарушении условия будут рождаться частицы. В пределе $ma \gg 1$ плотность казимировской энергии так же как и давление, экспоненциально уменьшаются

$$\epsilon \approx \frac{(ma)^{5/2}}{8\pi^3 a^4} e^{-2\pi ma}, \quad p \approx \frac{(ma)^{7/2}}{12\pi^2 a^4} e^{-2\pi ma}.$$

В области выполнения условия энергодоминантности функцию $w \equiv p/\epsilon$ можно аппроксимировать полиномом второго порядка

$$w(ma) \approx \frac{1}{3} (1 + (ma) + 4(ma)^2). \quad (5.64)$$

Квантовое среднее значение “00”-компоненты тензора энергии – импульса массивного биспинорного поля [188]

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{\lambda=3/2}^{\infty} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}. \quad (5.65)$$

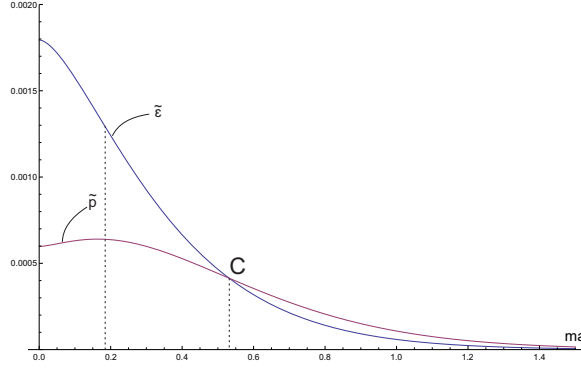


Рис. 5.7: Конформные казимировские плотность энергии и давление массивного биспинорного поля как функции бегущей массы ma . Здесь мы положили $a_0 = 1$.

Вакуумное среднее значение пространственных компонент тензора энергии – импульса [188]:

$$\langle 0|T_{ij}|0\rangle = -\frac{1}{3\pi^2 a^2} \sum_{\lambda=3/2}^{\infty} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}} \gamma_{ij}. \quad (5.66)$$

После применения формулы Абеля – Плана получим ренормированную конформную казимировскую плотность энергии биспинорного поля

$$\tilde{\epsilon} = \frac{2}{\pi^2 a_0^4} \int_{ma}^{\infty} d\lambda \frac{(\lambda^2 + 1/4)\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2}}{\exp(2\pi\lambda) + 1} \quad (5.67)$$

и ренормированное значение казимировского давления

$$\tilde{p} = \frac{2}{3\pi^2 a_0^4} \int_{ma}^{\infty} d\lambda \frac{(\lambda^2 + 1/4)\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2}(\exp(2\pi\lambda) + 1)}. \quad (5.68)$$

Соответствующие графики функций $\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}(ma)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(ma)$ показаны на Рис. 5.7. Явная зависимость $p = p(\epsilon)$ для каждого значения ma как уравнение состояния казимировского вакуума показана на Рис. 5.8. В безмассовом пределе ($ma = 0$) уравнение состояния ультрарелятивист-

ское (Рис. 5.8, точка А)

$$\epsilon = 3p = \frac{17}{960\pi^2 a^4}.$$

В области ABC (Рис. 5.8) условие энергодоминантности выполняется. Вакуум виртуальных фермионов в случае $p = \epsilon$ ($ma \approx 0.55$) отвечает сверхжесткому уравнению состояния (Рис. 5.7, Рис. 5.8, точка С). Уравнение состояния $p = w\epsilon$ с $1/3 \leq w \leq 1$ представлено кривой ABC на Рис. 5.8. С ростом массы ma , условие энергодоминантности, выполняющееся для реальных частиц, нарушается (правее точки С на Рис. 5.7, и левее точки С на Рис. 5.8). В этой области происходит рождение частиц из вакуума. В пределе $ma \gg 1$ казимировские плотность энергии так же как и давление экспоненциально малы. В области выполнения условия энергодоминантности функцию $w \equiv p/\epsilon$ можно аппроксимировать полиномом второго порядка

$$w(ma) \approx \frac{1}{3} (1 + 2(ma) + 3(ma)^2). \quad (5.69)$$

Таким образом, ренормировка расходящихся рядов выполнена эффективным методом Абеля – Плана. Переход к конформным переменным помог избежать нефизической сингулярности. Казимировские плот-

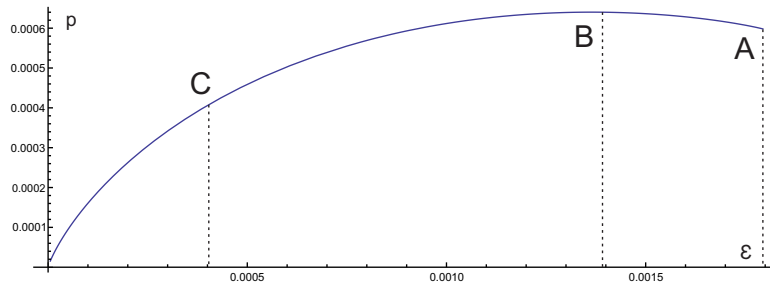


Рис. 5.8: Уравнение состояния массивного биспинорного поля вакуума для каждого значения ma .

ность энергии и давление для бозонного и фермионного полей оказались положительными. В этом проявилась нетривиальность топологии пространства. Уравнения состояния $p = w\epsilon$ казимировского вакуума получились нетривиальными, что может помочь в понимании космологических проблем.

5.6 Выводы

В данном разделе был предложен механизм радиационного нарушения конформной симметрии в Стандартной модели элементарных частиц. В такой конструкции конденсат топ – кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса. Механизм позволяет установить соотношение между конденсатами и массами, включая массу бозона Хиггса. Таким образом мы предложили простой бутстрап между полем Хиггса и полем топ – кварка. Заметим, что бозон Хиггса рассматривается как элементарная частица, без введения дополнительных взаимодействий за рамками Стандартной модели. После спонтанного нарушения симметрии, на древесном уровне лагранжиана отличие от потенциала Хиггса Стандартной модели проявляется только в значении константы самодействия. Эти тонкие различия можно выявить только с помощью новых данных, которые можно извлечь на Суперколлайдере после проведения работ по его обновлению.

Вычислены топологические казимировские квантовые конденсаты бозонного и биспинорного массивных полей. Переход к конформным переменным позволил избежать нефизическую сингулярность, возникающую при $a = 0$. Перенормировки формально расходящихся рядов с помощью

применения формулы Абеля – Плана приводят к конечным физическим результатам. Для вселенной Эйнштейна фоновым пространством является касательное плоское пространство. Получено уравнение состояния казимировского вакуума $p = w\epsilon$, причём коэффициент пропорциональности является функцией переменной массы частицы $w = w(ma)$. В области энергодоминантности её можно аппроксимировать полиномом второго порядка по бегущей массе.

Заключение

В диссертации изучается гамильтонова динамика космологических моделей. Для исследования моделей используются современные математические методы.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

- Исследована двумерная гравитационная модель с помощью построения вариационного комплекса Де Рама. Показано, что обобщённая группа когомологий Де Рама тривиальна. На физическом языке это означает, что функционал действия не задаёт динамики.
- Проведена процедура гамильтоновой редукции фазового пространства Тейхмюллера. Введено глобальное внутреннее время и гамильтониан гравитационного поля.
- Получена нелинейная пуассонова структура фазового пространства гравитации. Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внутреннем глобальном времени.
- Построены гамильтоновы уравнения динамики гравитационного поля во внешнем глобальном времени. Введено глобальное внешнее время гравитационного поля и соответствующий гамильтониан.
- Получены точные решения уравнения Фридмана для классической

космологии и конформной космологии в классе мероморфных функций. Вычислены характеристики космологической динамики. Проведён сравнительный анализ подходов.

- Вычислены показатели Ковалевской миксмастерной космологической модели Мизнера. Получена обобщённая формула Адлера – Ван Мёрбеке.

- Доказано, что многомерная миксмастерная модель отвечает лоренцевой алгебре Каца – Муди, что говорит о её регулярном поведении. Построены диаграммы Дынкина, отвечающие матрицам Картана.

- Предложен механизм спонтанного нарушения конформной симметрии в Стандартной модели элементарных частиц без введения феноменологического потенциала Хиггса. В такой конструкции конденсат топ - кварка заменил тахионный массовый член в потенциале Хиггса.

- Вычислены казимировские конформные квантовые конденсаты бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Предложенный переход к конформным переменным позволил избежать нефизическую сингулярность.

- Найдены уравнения состояния казимировского вакуума бозонного и фермионного массивных полей в замкнутой вселенной Фридмана. Перенормировка формально расходящихся рядов выполнена применением формулы Абеля – Плана из теории аналитических функций.

Литература

- [1] Вайнберг, С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной / С. Вайнберг. – М.: Эксмо, 2011. – 208с.
- [2] Perlmutter, S. Nobel Lecture: Measuring the acceleration of the cosmic expansion using supernovae / S. Perlmutter // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84. – P. 1127 - 1149.
- [3] Schmidt, B. Nobel Lecture: Accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae / B. Schmidt // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84. – P. 1151 - 1163.
- [4] Riess, A. G. Nobel Lecture: My path to the accelerating Universe / A. G. Riess // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84. – P. 1165 - 1175.
- [5] Чернин, А. Д. Тёмная энергия и всемирное антитяготение / А. Д. Чернин // Усп. Физ. Наук. – 2008. – Т. 178. – С. 268 - 300.
- [6] Муханов, В. Ф. Квантовая Вселенная / В. Ф. Муханов // Усп. Физ. Наук. – 2016. – Т. 186. – С. 1117 - 1125.
- [7] Блинников, С. И. Космологическое ускорение / С. И. Блинников, А. Д. Долгов // Усп. Физ. Наук. – 2019. – Т. 189. – С. 561 - 602.

-
- [8] Vishwakarma, R. G. A critique of supernova data analysis in cosmology / R. G. Vishwakarma, J. V. Narlikar // Research in Astron. Astrophys. – 2010. – Vol. 10. – P. 1195 - 1198.
- [9] Ananthanarayan, B. The accelerating universe: evidence and theories / B. Ananthanarayan, S. Mohanty // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2021. – Vol. 230. – P. 2051 - 2053.
- [10] Mazumdar, A. Evidence of dark energy in different cosmological observations / A. Mazumdar, S. Mohanty, P. Parashari // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2021. – Vol. 230. – P. 2055 - 2066.
- [11] Mohayaee, R. Do supernovae indicate an accelerating universe? / R. Mohayaee, M. Rameez, S. Sarkar // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2021. – Vol. 230. – P. 2067 - 2076.
- [12] Capazziello, S. Cosmological curvature acceleration // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2021. – Vol. 230. – P. 2123 - 2138.
- [13] Levin, S. F. Cosmological distance scale. Part 7: A new special case with the Hubble constant and anisotropic models / S. F. Levin // Measurement Techniques. – 2018. – Vol. 61. – P. 1057 - 1065.
- [14] Levin, S. F. Cosmological distance scale. Part 10: The universal anisotropy / S. F. Levin // Measurement Techniques. – 2020. – Vol. 63. – P. 780 - 797.
- [15] Levin, S. F. Cosmological distance scale. Part 11: “Extraordinary” evidences and “cosmically jerk problem” / S. F. Levin // Measurement Techniques. – 2020. – Vol. 63. – P. 849 - 855.

-
- [16] Levin, S. F. Cosmological distance scale. Part 12: Confluent analysis, rank inversion, lack-of-fit tests / S. F. Levin // Measurement Techniques. – 2020. – Vol. 63. – P. 940 - 949.
- [17] Эйнштейн, А. Эволюция физики: Развитие идей от первоначальных понятий до Теории Относительности и квант / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 279 с.
- [18] Окунь, Л. Б. Физика элементарных частиц / Л. Б. Окунь. – М.: Наука, 1984. – 224 с.
- [19] Вигнер, Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер. – М.: Мир, 1971. – 318с.
- [20] Mychelkin, E. G. On the variability of physical constants and conformal transformations / E. G. Mychelkin // Astrophys. and Space Science. – 1991. – Vol. 184. – P. 235 - 245.
- [21] Фридман, А. А. Вселенная как пространство и время / А. А. Фридман. – М: Наука, 1965. – 112 с.
- [22] Фок, В. А. Теория пространства, времени и тяготения / В. А. Фок. – М: ГИТТЛ, 1955. – 504 с.
- [23] Фок, В. А. Геометризация дираковской теории электрона. Сб. статей: Альберт Эйнштейн и теория гравитации / В. А. Фок // М.: Мир, 1979. – P. 415 - 432.
- [24] Ogievetsky, V. I. Infinite-dimensional algebra of general covariance group as the closure of finite-dimentsional algebra of conformal and

-
- linear groups / V. I. Ogievetsky // *Lett. Nuovo Cimento*. – 1973. – Vol. 8. – P. 988 - 990.
- [25] Борисов, А. Б. Теория динамических аффинной и конформной симметрий как теория гравитационного поля / А. Б. Борисов, В. И. Огиевецкий // *Теор. и Мат. Физ.* – 1974. – Vol. 21. – P. 329 - 342.
- [26] Волков, М. К. Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов / М. К. Волков, В. Н. Первущин. – М.: Атомиздат, 1978. – 239 с.
- [27] Pawlowski, M. Conformal unification of general relativity and standard model / M. Pawlowski, V. V. Papoyan, V. N. Pervushin, V. I. Smirichinski // *Phys. Lett. B*. – 1998. – Vol. 444. – P. 293 - 298.
- [28] Gyngazov, L. N. Proper time dynamics in General Relativity and conformal unified theory / L. N. Gyngazov, M. Pawlowski, V. N. Pervushin, V. I. Smirichinski // *Gen. Rel. Grav.* – 1998. – Vol. 30. – P. 1749 - 1773.
- [29] Pervushin, V. N. Cosmological particle origin in the Standard Model / V. N. Pervushin, D. V. Proskurin, A. A. Gusev // *Grav. and Cosmol.* – 2002. – Vol. 8. – P. 181 - 189.
- [30] Behnke, D. Description of supernova data in conformal cosmology without cosmological constant / D. Behnke, D. B. Blaschke, V. N. Pervushin, D. Proskurin // *Phys. Lett. B*. – 2002. – Vol. 530. – P. 20 - 26.

-
- [31] Блашке, Д. Б. Космологическое рождение векторных бозонов и реликтовое излучение / Д. Б. Блашке, С. И. Виноцкий, А. А. Гусев, В. Н. Первушин, Д. В. Проскурин // Ядерная Физика. – 2004. – Т. 67. – С. 1 - 13.
- [32] Проблемы калибровочных теорий. К 60-летию со дня рождения В. Н. Первушина. Под ред. Б. М. Барбашова, В. В. Нестеренко. Д2-2-4-66. Дубна: ОИЯИ, 2004. – 137 с.
- [33] Pervushin, V. N. The kinetic description of the vacuum particle creation in the oscillator representation / V. N. Pervushin, V. V. Skokov, A. V. Reichel, S. A. Smolyansky, A. V. Prozorkevich // Int. J. Mod. Phys. A. – 2005. – Vol. 20. – P. 5689 - 5704.
- [34] Захаров, А. Ф. Тетрадный формализм и системы отсчёта в Общей Теории Относительности / А. Ф. Захаров, В. А. Зинчук, В. Н. Первушин // ЭЧАЯ. – 2006. – Vol. 37. – P. 183 - 243.
- [35] Barbashov, V. M. Hamiltonian General Relativity in finite space and cosmological potential perturbations / V. M. Barbashov, V. N. Pervushin, A. F. Zakharov, V. A. Zinchuk // Int. J. Mod. Phys. A. – 2006. – Vol. 21. – P. 5957 - 5990.
- [36] Arbuzov, A. B. Conformal Hamiltonian dynamics of General Relativity / A. B. Arbuzov, V. M. Barbashov, R. G. Nazmitdinov, V. N. Pervushin, A. Borowiec, K. N. Pichugin, A. F. Zakharov // Phys. Lett. B. – 2010. – Vol. 691. – P. 230 - 233.

-
- [37] Zakharov, A. F. Conformal cosmological model parameters with distant SN Ia data: “gold” and “silver” / A. F. Zakharov, V. N. Pervushin // Int. J. Mod. Phys. D. – 2010. – Vol. 19. – P. 1875 - 1887.
- [38] Zakharov, A. F. Conformal cosmological model and SNe Ia data / A. F. Zakharov, V. N. Pervushin // Phys. of Atomic Nuclei. – 2012. – Vol.75. – P. 1418 - 1425.
- [39] Pervushin, V. Condensate mechanism of conformal symmetry breaking. XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems / V. Pervushin, A. Arbuzov, B. Barbashov, A. Borowiec, A. Cherny, A. Dorokhov, R. Nazmitdinov, A. Pavlov, V. Shilin, A. Zakharov. – JINR. – Dubna. – 2012. – P. 1 - 5.
- [40] Pervushin, V. Origin of masses in the Early Universe XXII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems / V. Pervushin, A. Arbuzov, A. Cherny, R. Nazmitdinov, A. Pavlov, K. Pichugin, A. Zakharov. – JINR. – Dubna. – 2014. – P. 1 - 5.
- [41] Pervushin, V. Principles of quantum Universe / V. Pervushin, A. Pavlov. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2014. – 480p.
- [42] Arbuzov, A. B. Radiative breaking of conformal symmetry in the Standard Model / A. B. Arbuzov, R. G. Nazmitdinov, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, A. F. Zakharov // EuroPhysics Letters. – 2016. – Vol. 113. – P. 31001 - 31005.
- [43] Arbuzov, A. B. Von Neumann’s quantization of General Relativity / A. B. Arbuzov, A. Yu. Cherny, D. J. Cirilo-Lombardo, R. G.

-
- Nazmitdinov, Nguen Suan Han, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, A. F. Zakharov // *Physics of Atomic Nuclei*. – 2017. – Vol. 80. – P. 491 - 504.
- [44] Сажин, М. В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения / М. В. Сажин // *Усп. Физ. Наук*. – 2004. – Т. 174. – С. 197 - 205.
- [45] Турышев, В. Г. Экспериментальные проверки Общей Теории Относительности / В. Г. Турышев // *Усп. Физ. Наук*. – 2009. – Т. 179. – С. 3 - 34.
- [46] Мизнер, Ч. Гравитация / Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. А. Уилер. Т. 2 – М.: Мир, 1977. – 525 с.
- [47] Хокинг, С. Крупномасштабная структура пространства – времени / С. Хокинг, Дж. Эллис – М.: Мир, 1977. – 431 с.
- [48] Gourgoulhon, É. 3+1 Formalism in General Relativity. Bases of numerical Relativity / É. Gourgoulhon – Berlin: Springer, 2012. – 294p.
- [49] Dirac, P. A. M. The theory of gravitation in Hamiltonian form / P. A. M. Dirac // *Proc. Roy. Soc. London A*. – 1958. – Vol. 246. – P. 333 - 343.
- [50] Владимиров, Ю. С. Системы отсчёта в теории гравитации / Ю. С. Владимиров. – М.: Энергоиздат, 1982. – 256 с.
- [51] Arnowitt, R. The dynamics of General Relativity. In: “Gravitation: An Introduction to Current Research”, ed. L. Witten / R. Arnowitt, S. Deser, Ch. W. Misner // Wiley, 1962. – P. 227 - 265.

-
- [52] Hanson, H. Constrained Hamiltonian systems / H. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim. – Roma: Academia Nazionale dei Lincei, 1976. – 135 с.
- [53] Einstein, A. The Meaning of Relativity. Fifth edition: Including “The relativistic theory of the non-symmetric field” / A. Einstein. – Princeton: Princeton University Press, 1955. – 200 p.
- [54] Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. М.: ГИФМЛ, 1963. – 515 с.
- [55] Burlankov, D. E. Local structure of functional spaces and dynamical variables of gauge-invariant fields / D. E. Burlankov // Theor. Math. Phys. – 1979. – Vol. 39. – P. 293 - 300.
- [56] Burlankov, D. E. Variational forms and two-dimensional R^2 -gravity / D. E. Burlankov, A. E. Pavlov // Int. J. Mod. Phys. A. – 1989. – Vol. 4. – P. 5177 - 5183.
- [57] Pavlov, A. E. Two-dimensional R^n -gravitation / A. E. Pavlov // Int. J. Theor. Phys. – 1997. – Vol. 36. – P. 2107 - 2113.
- [58] Schmidt, Hans-Jürgen. Scale-invariant gravity in two dimensions / Hans-Jürgen Schmidt // J. Math. Phys. – 1991. – Vol. 32. – P. 1562 - 1566.
- [59] Faraoni, V. R^n gravity and chameleon / V. Faraoni // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 83. – P. 124044-1 – 124044-5.

-
- [60] Nojiri, Sh. Searching for dynamical black holes in various theories of gravity / Sh. Nojiri, S. D. Odintsov, V. Faraoni // Phys. Rev. D. – 2021. – Vol. 103. – P. 044055-1 – 044055-18.
- [61] Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
- [62] Дубровин, Б. А. Современная геометрия: методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
- [63] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1990. – 639 с.
- [64] Гриффитс, Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление / Ф. Гриффитс. – М.: Мир, 1986. – 360с.
- [65] Рам, Ж. Де. Дифференцируемые многообразия / Ж. Де Рам. – М.: УРСС, 2006. – 247 с.
- [66] Мизнер, Ч. Дифференциальная геометрия и дифференциальная топология. В сб. “Гравитация и топология. Актуальные проблемы”. Д. Иваненко (ред.) / Ч. Мизнер. – М.: Мир, 1966. – С. 189 - 264.
- [67] Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
- [68] Teitelboim, C. Many-time Hamiltonian gravitational theory / C. Teitelboim // Phys. Lett. B. – 1975. – Vol. 56. – P. 376 - 378.

-
- [69] Картан, Э. Интегральные инварианты / Э. Картан. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1940. – 216 с.
- [70] Kuchař, K. Canonical quantization of gravity. In: “Relativity, Astrophysics and Cosmology”, ed. W. Israel. / K. Kuchař. The USA: D. Reidel Publishing Company, 1973. – P. 237 - 288.
- [71] Unruh, W. G. Time and the interpretation of canonical quantum gravity / W. G. Unruh, R. M. Wald // Phys. Rev. D. – 1989. – Vol. 40. – P. 2598 - 2614.
- [72] Bombelli, L. Time as spacetime four-volume and the Ashtekar variables / L. Bombelli, W. E. Couch, R. J. Torrence // Phys. Rev. D. – 1991. – Vol. 44. – P. 2589 - 2592.
- [73] Kuchař, K. Time and interpretations of quantum gravity. In: “The 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics”, eds. G. Kunstatter, D. Vincent, and J. Williams / K. Kuchař. – World Scientific: Singapore, 1992. – P. 1 -104.
- [74] Isham, C. J. Canonical quantum gravity and the problem of time. Lectures presented at the NATO Advanced Study Institute “Recent Problems in Mathematical Physics“ / C. J. Isham. – Salamanca, 1992. – 124 p.
- [75] Горобей, Н. Н. Трёхмерный объём замкнутой Вселенной как канонический параметр времени / Н. Н. Горобей, А. С. Лукьяненко // Теор. и Мат. Физ. – 1993. – Vol. 95. – P. 541 - 548.

-
- [76] Burlankov, D. E. Quantum dynamics of Friedmann's universe / D. E. Burlankov // Grav. and Cosmol. – 2016. – Vol. 22. – P. 64 - 70.
- [77] Kasner, E. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations / E. Kasner // Am. J. Math. – 1921. – Vol. 43. – P. 217 - 221.
- [78] Ryan, M. Hamiltonian cosmology / M. Ryan. – Berlin: Springer, 1972. – 169 p.
- [79] Бурланков, Д. Е. Квантовая динамика изотропной космологической модели / Д. Е. Бурланков, В. Н. Дутышев, А. А. Кочнев // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 87. – С. 705 - 716.
- [80] Pavlov, A. E. A quantized open homogeneous isotropic cosmological model / A. E. Pavlov // Phys. Lett. A. – 1992. – Vol. 165. – P. 211 - 214.
- [81] Pavlov, A. E. A quantized flat homogeneous isotropic cosmological model / A. E. Pavlov // Phys. Lett. A. – 1992. – Vol. 165. – P. 215 - 216.
- [82] Pavlov, A. E. Dynamics of a compact hyperbolic cosmological model with dustlike matter and radiation / A. E. Pavlov // Int. J. Theor. Phys. – 1996. – Vol. 35. – P. 2169 - 2190.
- [83] Barbour, J. The end of time: The next revolution in physics / J. Barbour. – Oxford: Oxford University Press, 1999. – 374 p.
- [84] DeWitt, B. S. Quantum theory of gravity. I. The canonical theory / B. S. DeWitt // Phys. Rev. – 1967. – Vol. 160. – P. 1113 - 1148.

-
- [85] Wheeler, J. A. Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics. In: “Battelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics”, eds. C. M. DeWitt, and J. A. Wheeler / J. A. Wheeler // Benjamin: New York, 1968. – P. 242 - 307.
- [86] Гейзенберг, В. Физика и философия. Часть и целое / В. Гейзенберг. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
- [87] Dirac, P. A. M. Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation / P. A. M. Dirac // Phys. Rev. – 1959. – Vol. 114. – P. 924 - 930.
- [88] York, J. W. Role of conformal three-geometry in dynamics of gravitation / J. W. York // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 28. – P. 1082 - 1085.
- [89] Шварцшильд, К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории. В сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации / К. Шварцшильд // М.: Мир, 1979. – P. 199 - 207.
- [90] Misner, C. W. Quantum cosmology. I / C. W. Misner // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 186. – P. 1319 - 1327.
- [91] Rosen, N. A bi-metric theory of gravitation / N. Rosen // Gen. Relat. Grav. – 1973. – Vol. 4. – P. 435 - 447.
- [92] Pavlov, A. E. Intrinsic time in Wheeler – DeWitt conformal superspace / A. E. Pavlov // Grav. and Cosmol. – 2017. – Vol. 23. – P. 208 - 218.

-
- [93] Fischer, A. E. Hamiltonian reduction of Einstein's equations of general relativity / A. E. Fischer, V. Moncrief // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) – 1997. – Vol. 57. – P. 142 - 161.
- [94] Regge, T. Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of General Relativity / T. Regge, C. Teitelboim // Annals of Phys. (N.Y.) – 1974. – Vol. 88. – P. 286 - 318.
- [95] Соловьёв, В. О. Гамильтонов подход в релятивистской теории гравитации и в общей теории относительности / В. О. Соловьёв // ЭЧАЯ. – 1988. – Т. 19. – С. 1115 - 1153.
- [96] Isenberg, J. Canonical gravity. In: "General Relativity and Gravitation", ed. A. Held. / J. Isenberg, J. Nester // Plenum Press.: 1980. – P. 23 - 97.
- [97] Arbuzov, A. B. Reduced conformal Geometrodynamics / A. B. Arbuzov, A. E. Pavlov // Int. J. Mod. Phys. A. – 2020. – Vol. 35. – P. 2040023-1 – 2040023-5.
- [98] Pavlov, A. E. Hamiltonian equations of reduced conformal Geometrodynamics in extrinsic time / A. E. Pavlov // Grav. and Cosmol. – 2020. – Vol. 26. – P. 208 - 211.
- [99] Roser, Ph. Classical and quantum cosmology with York time / Ph. Roser, A. Valentini // Class. and Quantum Grav. – 2014. – Vol. 31. – P. 245001-1 – 245001-21.
- [100] Roser, Ph. Quantum mechanics on York slices / Roser Ph. // Class. and Quantum Grav. – 2016. – Vol. 33. – P. 065001-1 - 065001-13.

-
- [101] Anderson, E. The physical gravitational degrees of freedom / E. Anderson, J. Barbour, B. Z. Foster, B. Kelleher, N. Ó. Murchadha // *Class. and Quantum. Grav.* – 2005. – Vol. 22. – P. 1795 - 1802.
- [102] Gomes, H. Einstein gravity as a 3D conformally invariant theory / H. Gomes, S. Gryb, T. Koslowski // *Class. and Quantum. Grav.* – 2011. – Vol. 28. – P. 045005-1 – 045005-24.
- [103] Фишер, А. Проблема начальных данных и динамическая формулировка Общей Теории Относительности / А. Фишер, Дж. Марсден. В сб.: *Общая Теория Относительности*. Я. А. Смородинский, В. Б. Брагинский (ред.) М.: Мир, 1983. – С. 87 - 162.
- [104] Choquet-Bruhat, Y. The Cauchy problem / Y. Choquet-Bruhat, J. W. York // In: “General Relativity and Gravitation”, ed. A. Held. New York: Plenum, 1980. – P. 99 - 193.
- [105] Шоке–Брюа, И. Математические вопросы Общей Теории Относительности / И. Шоке–Брюа // *Усп. Мат. Наук.* – 1985. – Т. 40. – С. 3 - 39.
- [106] Perlmutter, S. Constraining dark energy with type Ia supernovae and large-scale structure / S. Perlmutter, M. S. Turner, M. White // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – Vol. 83. – P. 670 - 673.
- [107] Riess A. G. et al. [Supernova Search Team Collaboration] The farthest known supernova: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration / A. G. Riess et al. // *The Astrophys. J.* – 2001. – Vol. 560. – P. 49 - 71.

-
- [108] Бронников, К. А. Лекции по теории гравитации и космологии / К. А. Бронников, С. Г. Рубин. – М.: Изд-во МИФИ, 2008. – 460 с.
- [109] Saha, V. Isotropic and anisotropic dark energy models / V. Saha // ЭЧАЯ. – 2014. – Vol. 45. – P. 583 - 669.
- [110] Вайнберг, С. Космология / С. Вайнберг. – М.: УРСС, 2013. – 608 с.
- [111] Фильченков, М. Л. Гравитация, астрофизика, космология / М. Л. Фильченков, С. В. Копылов, В. С. Евдокимов. – М.: УРСС, 2017. – 104 с.
- [112] Riess, A. G. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution / A. G. Riess et al. // The Astrophys. J. – 2004. – Vol. 607. – P. 665 - 687.
- [113] Pavlov, A. E. Two approaches to interpretation of Hubble diagram / A. E. Pavlov // RUDN J. Math. Inform. Sc. Phys. – 2017. – Vol. 25. – P. 390 - 400.
- [114] Deser, S. Scale invariance and gravitational coupling / S. Deser // Annals of Physics. – 1970. – Vol. 59. – P. 248 - 253.
- [115] Jordan, P. Zum gegenwärtigen Stand der Diracschen kosmologischen Hypothesen / P. Jordan // Zeitschrift für Physik. – 1959. – Vol. 157. – P. 112 - 121.

-
- [116] Gürsey, F. Reformulation of General Relativity in accordance with Mach's principle / F. Gürsey // *Annals of Physics*. – 1963. – Vol. 24. – P. 211 - 242.
- [117] Brown, J. D. Conformal invariance and the conformal-traceless decomposition of the gravitational field / J. D. Brown // *Phys. Rev. D*. – 2005. – Vol. 71. – P. 104011-1 – 104011-12.
- [118] Zel'dovich, Ya. B. The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations / Ya. B. Zel'dovich // *Soviet Physics JETP*. – 1962. – Vol. 14. – P. 1143 - 1147.
- [119] Нарликар, Дж. Неистовая Вселенная / Дж. Нарликар. – М.: Мир, 1985. – 256 с.
- [120] Вейль, Г. Гравитация и электричество. Сб. статей: Альберт Эйнштейн и теория гравитации / Г. Вейль. – М.: Мир, 1979. – С. 513 - 527.
- [121] Уиттекер, Э. Т. Аналитическая динамика / Э. Т. Уиттекер. – Ижевск.: Изд-во Удм. ун-та, 1999. – 588 с.
- [122] Пенроуз, Р. В состоянии ли мы увидеть другой мир сквозь Большой взрыв? Элементарное введение в конформную циклическую космологию / Р. Пенроуз. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике // 2013. – Т. 10. – С. 62 - 85.
- [123] Пенроуз, Р. Циклы времени. Новый взгляд на эволюцию Вселенной / Р. Пенроуз. – М.: БИНОМ, 2014. – 333 с.

-
- [124] Gurzadyan, V. G. On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky / V. G. Gurzadyan, R. Penrose // *Eur. Phys. J. Plus.* – 2013. – Vol. 128. – P. 22 - 39.
- [125] Vilenkin, A. Interpretation of the wave function of the Universe / A. Vilenkin // *Phys. Rev. D.* – 1989. – Vol. 39. – P. 1116 - 1122.
- [126] Альтшулер, Б. Л. Квантовая космология и физика переходов с изменением сигнатуры пространства – времени / Б. Л. Альтшулер, А. О. Барвинский // *Усп. Физ. Наук.* – 1996. – Т. 166. – С. 459 - 492.
- [127] Pavlov, A. E. Exact solutions of cosmological equations in Legendre elliptic integrals / A. E. Pavlov, S. M. Gaidar // *Grav. and Cosmol.* – 2022. – Vol. 28. – P. 403 - 408.
- [128] Pavlov, A. E. Friedmann cosmology in elliptic functions / A. E. Pavlov // *Grav. and Cosmol.* – 2021. – Vol. 27. – P. 403 - 408.
- [129] Голубев, В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки / В. В. Голубев. – М.: ЛЕНАНД, 2001. – 288 с.
- [130] Герасимов И. А. Функции Вейерштрасса и их приложения в механике и астрономии / И. А. Герасимов. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 150 с.
- [131] Крамер, Д. Точные решения уравнений Эйнштейна. Э. Шмутцер (ред.) / Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.

-
- [132] Эйнштейн, А. Вопросы космологии и Общая Теория Относительности, сб.: Альберт Эйнштейн и теория относительности / А. Эйнштейн. М.: Мир, 1979. – С. 287 - 298.
- [133] Лифшиц, Е. М. Проблемы релятивистской космологии / Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников // Усп. Физ. Наук. – 1963. – Т. 80. – С. 391 - 438.
- [134] Халатников, И. М. Лев Ландау и проблема сингулярностей в космологии / И. М. Халатников, А. Ю. Каменщик // Усп. Физ. Наук. – 2008. – Т. 178. – С. 639 - 647.
- [135] Belinski, V. The cosmological singularity / V. Belinski, M. Henneaux. – Cambridge: Cambridge University Press, 2018. – 263p.
- [136] Ivashchuk, V. D. Stochastic properties of multidimensional cosmological models near a singular point / V. D. Ivashchuk, V. N. Mel'nikov, A. A. Kirillov // JETP Letters. – 1994. – Vol. 60. – P. 235 - 239.
- [137] Kirillov, A. A. Dynamics of inhomogeneities of the metric in the vicinity of a singularity in multidimensional cosmology / A. A. Kirillov, V. N. Melnikov // Phys. Rev. D. – 1995. – Vol. 52. – P. 723 - 729.
- [138] Szydlowski, M. Kovalevski exponents and integrability properties in class A homogeneous cosmological models / M. Szydlowski, M. Biesiada // J. Nonlinear Math. Phys. – 2002. – Vol. 9. – P. 1 - 10.
- [139] Тода, М. Теория нелинейных решёток / М. Тода. – М.: Высшая школа, 1984. – 260 с.

-
- [140] Ivashchuk, V. Multidimensional gravity, flux and black brane solutions governed by polynomials / V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov // Grav. and Cosmol. – 2014. – Vol. 20. – P. 182 - 189.
- [141] Bogoyavlensky, O. I. On perturbations of the periodic Toda lattice / O. I. Bogoyavlensky // Commun. Math. Phys. – 1976. – Vol. 51. – P. 201 - 209.
- [142] Переломов, А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А. М. Переломов. – М.: Наука, 1990. – 238с.
- [143] Adler, M. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves / M. Adler, P. van Moerbeke // Adv. in Math. – 1980. – Vol. 38. – P. 267 - 317.
- [144] Adler, M. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory / M. Adler, P. van Moerbeke // Adv. in Math. – 1980. – Vol. 38. – P. 318 - 379.
- [145] Adler, M. Kowalewski's asymptotic method, Kac – Moody Lie algebras and regularization / M. Adler, P. van Moerbeke // Commun. Math. Phys. – 1982. – Vol. 83. – P. 83 - 106.
- [146] Borchers, R. Generalized Kac – Moody algebras / R. Borchers // J. of Algebra. – 1988. – Vol. 115. – P. 501 - 512.
- [147] Buyl, S. de. Einstein billiards and spatially homogeneous cosmological models / S. de Buyl, G. Pinardi, Ch. Schomblond // Class. and Quantum Grav. – 2003. – Vol. 20. – P. 5141 - 5159.

-
- [148] Yoshida, H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals / H. Yoshida // *Celestial Mechanics*. – 1983. – Vol. 31. – P. 381 - 399.
- [149] Ковалевская, С. В. Научные Работы / С. В. Ковалевская. – М.: Изд-во АН СССР. – 1948. – 368 с.
- [150] Kozlov, V. V. *Problemata nova, ad quorum solutionem mathematici invitatur* / V. V. Kozlov // *Amer. Math. Soc. Transl.* – 1995. – Vol. 168. – P. 141 - 172.
- [151] Pavlov, A. E. Mixmaster model associated to a Borcherds algebra / A. E. Pavlov // *Grav. and Cosmol.* – 2017. – Vol. 27. – P. 20 - 27.
- [152] Misner, C. W. The mixmaster cosmological metrics. In: *Deterministic Chaos in General Relativity*, ed. D. Hobill / C. W. Misner // *Plenum Pub. Co.* – 1994. – P. 1 - 12.
- [153] Christiansen, F. Non-integrability of the mixmaster universe / F. Christiansen, H. H. Rugh, S. E. Rugh // *Journal of Physics. A.* – 1995. – Vol. 28. – P. 657 - 667.
- [154] Pavlov, A. E. The mixmaster cosmological model as a pseudo-Euclidean generalized Toda chain / A. E. Pavlov // *Reg. Chaot. Dyn.* – 1996. – Vol. 1. – P. 111 - 120.
- [155] Измайлова, О. В. Аналитические свойства решений уравнений Эйлера – Пуанкаре на разрешимых алгебрах Ли / О. В. Измайлова, В. В. Козлов // *Вестн. Моск. ун-та, сер.1.* – 1996. – P. 60 - 65.

-
- [156] Belinskii, V. A. Asymptotically Euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity / V. A. Belinskii, G. W. Gibbons, D. N. Page, C. N. Pope // Phys. Lett. B. – 1978. – Vol. 76. – P. 433 - 435.
- [157] Pavlov, A. E. Selfdual Yang – Mills fields in an Einstein Universe / A. E. Pavlov // Int. J. Theor. Phys. – 1992. – Vol. 31. – P. 2061 - 2063.
- [158] Gibbons, G. W. The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity / G. W. Gibbons, C. N. Pope // Commun. Math. Phys. – 1979. – Vol. 66. – P. 267 - 290.
- [159] Latifi, A. The Bianchi IX (mixmaster) cosmological model is not integrable / A. Latifi, M. Musette, R. Conte // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 194. – P. 83 - 92.
- [160] Gavrilov, V. R. Multidimensional cosmology with multicomponent perfect fluid and Toda lattices. In: Abstract of the reports at the International school-seminar / V. R. Gavrilov, V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov: Yaroslavl, 1994. – P. 66.
- [161] Flaschka, H. The Toda lattice. II Existence of integrals / H. Flaschka // Phys. Rev. B. – 1974. – Vol. 9. – P. 1924 - 1925.
- [162] Ivashchuk, I. D. Billiard representation for multidimensional cosmology with multicomponent perfect fluid near the singularity / I. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov // Class. and Quantum Grav. – 1995. – Vol. 12. – P. 809 - 826.
- [163] Кас, В. Infinite dimensional Lie algebras / В. Кас. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990. – 400 p.

-
- [164] Henneaux, M. Spacelike singularities and hidden symmetries of gravity / M. Henneaux, D. Persson, Ph. Spindel // Living Rev. Relativity. – 2008. – Vol. 11. – P. 1 - 231.
- [165] Nikulin, V. V. A theory of Lorentzian Kac – Moody algebras / V. V. Nikulin // J. Math. Sciences. – 2001. – Vol. 106. – P. 3212 - 3221.
- [166] Saçlıoğlu, C. Dynkin diagrams for hyperbolic Kac – Moody algebras / C. Saçlıoğlu // J. Phys. A. – 1989. – Vol. 22. – P. 3753 - 3769.
- [167] Stuckey, W. M. Dynamics of the mixmaster-type vacuum universe with geometry $R \times S^3 \times S^3 \times S^3$ / W. M. Stuckey, L. Witten, B. Stewart // Gen. Rel. and Grav. – 1990. – Vol. 22. – P. 1321 - 1339.
- [168] Pavlov, A. E. Hidden symmetries in a mixmaster-type universe / A. E. Pavlov // Grav. and Cosmol. – 2019. – Vol. 25. – P. 18 - 23.
- [169] Carbone, L. Classification of hyperbolic Dynkin diagrams, root lengths and Weyl group orbits / L. Carbone et al. // J. Phys. A. – Vol. 43. – P. 155209-1 – 155209-30.
- [170] Fuchs, J. Symmetries, Lie Algebras and Representations / J. Fuchs, Ch. Schweigert. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 438p.
- [171] Glashow, S. L. Partial symmetries of weak interactions / S. L. Glashow // Nucl. Phys. – 1961. – Vol. 22. – P. 579 - 588.
- [172] Weinberg, S. Dynamical approach to current algebra / S. Weinberg // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 18. – P. 188 - 191.

-
- [173] Salam, A. In: Proceedings of the 8th Nobel Symposium, ed. N. Svartholm / A. Salam. – Almqvist and Wiksells. – 1968. – P. 367.
- [174] Englert, F. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons / F. Englert, R. Brout // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 13. – P. 321 - 323.
- [175] Higgs, P. W. Broken symmetries and the mass of gauge bosons / P. W. Higgs // Phys. Rev. Lett. – 1964. – Vol. 13. – P. 508 - 509.
- [176] Bezrukov, F. Higgs boson mass and new physics / F. Bezrukov, M. Y. Kalmykov, B. A. Kniehl, M. Shaposhnikov // JHEP. – 2012. – Vol. 10. – P. 1 - 35.
- [177] Alekhin, S. The top quark and Higgs boson masses and the stability of the electroweak vacuum / S. Alekhin, A. Djouadi, S. Moch // Phys. Lett. B. – 2012. – Vol. 716. – P. 214 - 219.
- [178] Bednyakov, A. V. Stability of the electroweak vacuum: gauge independence and advanced precision // A. V. Bednyakov et al. // Phys. Rev. Lett. – 2015. – Vol. 115. – P. 201802-1 – 201802-5.
- [179] Nambu, Y. Model building based on bootstrap symmetry breaking. In: Proceedings of the 1989 Workshop on Dynamical Symmetry Breaking, eds. T. Muta and K. Yamawaki / Y. Nambu // Nagoya University, 1989. – P. 1 - 10.
- [180] Miransky, V. A. Dynamical electroweak symmetry breaking with large anomalous dimension and t quark condensate / V. A. Miransky, M.

-
- Tanabashi, K. Yamawaki // *Phys. Lett. B.* – 1989. – Vol. 221. – P. 177 - 183.
- [181] Nambu, Y. Plots, quarks and strange particles. In: *Proceedings of the Dalitz Conference*, eds. I.J.R. Aitchison, C.H. Llewellyn Smith, and J.E. Paton / Y. Nambu: World Scientific, 1991. – P. 56.
- [182] Bardeen, W. A. Minimal dynamical symmetry breaking of the standard model / W. A. Bardeen, C. T. Hill, M. Lindner // *Phys. Rev. D.* – 1990. – Vol. 41. – P. 1647 - 1660.
- [183] Higgs, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons / P. W. Higgs // *Phys. Rev.* – 1966. - Vol. 145. – P. 1156 - 1163.
- [184] Coleman, S. R. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking / S. R. Coleman, E. J. Weinberg // *Phys. Rev. D.* – 1973. – Vol. 7. – P. 1888 - 1910.
- [185] Арбузов , А. Б. Об иерархии масштабов при радиационном нарушении симметрии / А. Б. Арбузов, У. Е. Возная, Т. В. Копылова // *Письма в ЭЧАЯ.* – 2021. – Т. 18. – С. 159 - 167.
- [186] Nambu, Y. Evolutionary Trends in the Physical Sciences. In: *Proceedings of the Yoshio Nishina Centennial Symposium, Tokyo, Japan, 1990.* Eds. M. Suzuki and R. Kubo / Y. Nambu: Springer, 1991. – P. 51.
- [187] Particle Data Group Collaboration (K.A. Olive et al.) *Chin. Phys. C.* – 2014. – Vol. 38. – P. 090001.

-
- [188] Мостепаненко, В. М. Эффект Казимира и его приложения / В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 216 с.
- [189] Gell-Mann, M. Behavior of current divergences under $SU_3 \times SU_3^*$ / M. Gell-Mann, R. J. Oakes, B. Renner // Phys. Rev. 1968. – Vol. 175. – P. 2195 - 2199.
- [190] Вайнштейн, А. И. Инстантонная азбука / А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман // Усп. Физ. Наук. – 1982. – Vol. 136. – P. 553 - 591.
- [191] Martin, J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask) / J. Martin // Comptes Rendus Phys. – 2012. – Vol. 13. – P. 566 - 665.
- [192] Mamaev, S. G. Particle creation from the vacuum near a homogeneous isotropic singularity / S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, A. A. Starobinsky // Sov. Phys. JETP. – 1976. – Vol. 43. – P. 823 - 830.
- [193] Зельдович, Я. Б. Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле / Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский // ЖЭТФ. – Т. 61. – С. 2161 - 2175.
- [194] Parker, L. Adiabatic regularization of the energy – momentum tensor of a quantized field in homogeneous spaces / L. Parker, S. A. Fulling // Phys. Rev. D. – Vol. 9. – P. 341 - 354.
- [195] Ford, L. H. Quantum vacuum energy in general relativity / L. H. Ford // Phys. Rev. D. – Vol. 11. – P. 3370 - 3377.

-
- [196] Grib, A. A. Vacuum stress – energy tensor and particle creation in isotropic cosmological model / A. A. Grib, S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko // Fortsch. Phys. – 1980. – Vol. 28. – P. 173 - 199.
- [197] Mamayev, S. G. The exact equivalence of n-wave regularization to the renormalization procedure for the spinor field in isotropic space – time / S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko // Phys. Lett. A. – 1983. – Vol. 93. – P. 391 - 393.
- [198] Chernikov, N. A. Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time / N. A. Chernikov, E. A. Tagirov // Ann. Inst. H. Poincaré. A. – 1968. – Vol. 9. – P. 109 - 141.
- [199] Пенроуз, Р. Конформная трактовка бесконечности. В сб.: Гравитация и топология. Д. Иваненко (ред.) / Р. Пенроуз. – М.: Мир, 1966. – С. 152 - 182.
- [200] Arbuzov, A. B. Static Casimir condensate of conformal scalar field in Friedmann universe / A. B. Arbuzov, A. E. Pavlov // Mod. Phys. Lett. A. – 2018. – Vol. 33. – P. 1850162-1 – 1850162-7.
- [201] Ford, L. H. Quantum vacuum energy in a closed universe / L. H. Ford // Phys. Rev. D. – Vol. 14. – P. 3304 - 3313.
- [202] Гриб, А. А. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях / А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. – М.: Атомиздат, 1980. – 296 с.

-
- [203] Arbuzov, A. B. Static Casimir condensate of the bispinor field in the Friedmann Universe / A. B. Arbuzov, S. M. Gaidar, A. E. Pavlov // JETP Letters. – 2022. – Vol. 115. No. 7. – P. 377 – 379.
- [204] Weinberg, S. The cosmological constant problem / S. Weinberg // Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol. 61. – P. 1 - 23.
- [205] Peebles, P. J. E. The cosmological constant and dark energy / P. J. E. Peebles, B. Ratra // Rev. Mod. Phys. – 2003. – Vol. 75. – P. 559 - 656.
- [206] Szydłowski, M. Which cosmological model – with dark energy or modified FRW dynamics? / M. Szydłowski, W. Godłowski // Phys. Lett. B.– 2006. – Vol. 633. – P. 427 - 432.
- [207] Pavlov, A. E. EoS of Casimir vacuum of massive fields in Friedmann universe / A. E. Pavlov // Mod. Phys. Lett. A. – 2020. – Vol. 35. – P. 2050271-1 – 2050271-7.