МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ ИМЕНИ ПАТРИСА ЛУМУМБЫ»

На правах рукописи

Мартынов Егор Вячеславович

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

Специальность: 1.1.2. Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор, Фаминский Андрей Вадимович

Москва - 2023 г.

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность работы

В диссертации рассматриваются свойства решений начально-краевых задач для уравнения Кавахары и его различных модификаций.

Уравнение Кавахары (в литературе также можно встретить название *уравнение Кортевега–де Фриза пятого порядка*) в общем виде записывается следующим образом:

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Оно было впервые выведено Т. Кавахарой в 1972 году в работе [47] для описания распространения в узком канале длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией. Различные физические процессы, для описания которых используется уравнение Кавахары, приведены, например, в статьях [44, 15, 64, 66, 28, 2, 1]. Следует отметить, что в различных физических моделях знаки коэффициентов a и b могут быть различными.

Наряду с квадратичной нелинейностью uu_x в самом уравнении Кавахары рассматриваются уравнения с нелинейностью более высокого порядка роста, например, модифицированное уравнение Кавахары (см., например, [49])

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + u^2u_x = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение Кавахары является обобщением знаменитого уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0. \tag{1.3}$$

на случай закона дисперсии более высокого порядка. Уравнение Кортевега–де Фриза широко изучалось в течение последних пятидесяти лет. В частности, на его примере был разработан так называемый метод обратной задачи рассеяния. Уравнение Кортевега–де Фриза является полностью интегрируемым и для него существует бесконечный набор законов сохранения.

В отличие от него уравнение Кавахары изучено значительно меньше. Метод обратной задачи рассеяния для него не применим, уравнение не является полностью интегрируемым и для него на данный момент известно о существовании только двух законов сохранения, а именно,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2\,dx = const, \quad \int_{\mathbb{R}} \left(u_{xx}^2 + bu_x^2 - \frac{1}{3}u^3\right)\,dx = const. \tag{1.4}$$

Аналоги этих законов сохранения справедливы и для обобщений уравнения Кавахары с нелинейностью более высокого порядка роста, в частности, для уравнения (1.2).

Наиболее изученной для уравнения Кавахары и его обобщений с нелинейностью более высокого порядка роста является задача Коши. Вопросам корректности этой задачи в различных функциональных пространствах посвящены, в частности, статьи [22, 46, 48, 51, 45, 26, 66, 14, 24, 23, 67, 9]. В частности, для уравнения (1.1) в статье [22] была установлена глобальная корректность задачи Коши для начальной функции из пространства $H^s(\mathbb{R})$ при $s \geq -4/7$. В работе [66] для модифицированного уравнения Кавахары (1.2) при $b > 0$ аналогичный результат был получен при начальной функции из $H^2(\mathbb{R})$, а в статье [26] — из $L_2(\mathbb{R})$. Следует заметить, что наличие 1-го из законов сохранения (1.4) делает невозможным убывание при больших временах решений задачи Коши в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$. Чтобы добиться такого убывания в работе [26] в уравнение было добавлено абсорбирующее слагаемое вида $g(x)u$, где неотрицательная функция g строго положительна на бесконечности, и было установлено экспоненциальное убывание в данной норме как для самого уравнения Кавахары (1.1), так и его модифицированного аналога (1.2). Заметим, что ранее для уравнения Кортевега–де Фриза подобная идея была использована в статье [19]. В работе [6] аналогичный результат для уравнения (1.1) был получен при более сложном виде абсорбирующего слагаемого $g_1(t,x)u_x + g_0(t,x)u$. В статье [61] получено степенное убывание решения при $t \to +\infty$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ для $p > 4$ при малых начальных данных из пространства $H^2(\mathbb{R})$ с дополнительным степенным весом на бесконечности без дополнительной абсорбции.

Начально-краевые задачи для уравнения Кавахары и его обобщений изучены значительно меньше, хотя в случае задачи на полуоси они имеют прозрачный физический смысл, описывая распространение волн в канале от начальной стенки. В случае задачи на $\mathbb{R}_+$ для уравнения (1.1) результаты о корректности в различных функциональных пространствах были получены в статьях [3, 7, 40, 25, 53, 5, 8, 20]. В работе [7] была установлена глобальная корректность этой задачи в классе бесконечно гладких функций, экспоненциально быстро убывающих при $x \to +\infty$. Аналогичные результаты в классах менее гладких и быстро убывающих при $x \to +\infty$ были получены в статьях [25, 53]. Существование и единственность глобальных решений данной начально-краевой задачи для уравнения Кавахары при начальной функции из пространств $L_2(\mathbb{R}_+)$ и $H^2(\mathbb{R}_+)$ со степенными весами на бесконечности установлены в статье [8]. Глобальная корректность такой задачи для начальной функции из $H^k(\mathbb{R}_+)$, $k \geq 2$, доказана в работе [3]. Аналогичный результат для начальной функции из $L_2(\mathbb{R}_+)$ получен в статье [20].

Следует отметить, что в случае начально-краевой задачи на полуоси $\mathbb{R}_+$ для уравнений (1.2) и (1.2) с краевыми условиями $u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = 0$ первый из законов сохранения (1.4) заменяется на следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}_+} u^2(t,x)\,dx + \int_0^t u_{xx}^2(\tau,0)\,d\tau = const. \tag{1.5}$$

Оно показывает, что рассматриваемая система имеет определенную внутреннюю диссипацию, но вопрос, достаточно ли ее для убывания решения при больших временах, остается открытым.

Поэтому, аналогично задаче Коши в уравнение вводятся дополнительные абсорбирующие слагаемые. В работах [5], [40] был установлен результат об экспоненциальном убывании при больших временах в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ решений начально-краевой задачи для уравнения Кавахары, в которое добавлено дополнительное абсорбирующее слагаемое аналогичное [6]. Заметим, что для уравнения Кортевега–де Фриза подобные результаты при абсорбирующем слагаемом $g(x)u$, где неотрицательная функция g строго положительна на $+\infty$, ранее были получены в статьях [57] и [62].

В статье [19] был установлен результат об убывании при больших временах в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ решений начально-краевой задачи для уравнения Кортевега–де Фриза при малых начальных данных и абсорбирующем слагаемом $g(x)u$, где положительная функция g могла стремиться к нулю при $x \to +\infty$.

В 1-ой главе настоящей диссертации рассматривается начально-краевая задача на полуоси $\mathbb{R}_+$ для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и устанавливаются результаты о существовании и единственности глобальных сильных решений и убывании этих решений при $t \to +\infty$ при добавлении абсорбирующего слагаемого, аналогичного [19]. Малость начальных данных не предполагается. Данные результаты опубликованы в статьях [38, 39].

Начально-краевые задачи для уравнения Кавахары и его обобщений на ограниченном интервале рассматривались в статьях [18, 37, 43, 53, 12]. При этом, наряду с прямыми задачами изучались и обратные, когда к задаче добавляется некоторое условие переопределения, но либо в уравнение, либо в краевые условия вводятся неизвестные параметры или функции. Наиболее исследованными для случая уравнения Кавахары и его обобщений являются обратные задачи на ограниченном интервале с финальным переопределением (которые в литературе часто именуется задачами управляемости), когда дополнительное условие выглядит следующим образом:

$$u(T, x) = u_T(x)$$

для заданных $T > 0$ и функции u_T (см. например, [18, 21, 43, 68, 69]). В статье [43] была установлена локальная управляемость начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары с кубичной нелинейностью, когда в качестве управлений были выбраны два краевых условия. В работах [68, 69] была рассмотрена задача управляемости для уравнения Кавахары с распределенным управлением и периодическими краевыми условиями. В качестве управления была использована правая часть уравнения специального вида. В статье [21] было рассмотрено уравнение Кавахары с распределенной управляемостью и было получено условие, при котором задача не управляется. В работе [18] была доказана управляемость уравнения Кавахары в пространстве L_2 и локальная управляемость в пространствах Соболева.

Наряду с условием финального переопределения в обратных задачах также рассматриваются различные условия интегрального переопределения. Согласно книге [63] подобные условия имеют физический смысл и также заслуживают изучения (см., также, например, статьи [41, 42]). В статье [31] на основе некоторых идей книги [63] впервые были рассмотрены обратные задачи на ограниченном интервале с интегральным переопределением для неоднородного уравнения Кортевега–де Фриза. В качестве управления выбирались либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Были получены результаты об однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка. В статье [58] была рассмотрена обратная задача с двумя интегральными условиями переопределения для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза с двумя неизвестными коэффициентами в периодическом случае и установлена ее однозначная разрешимость на малом временном интервале. В работе [16] методы статьи [31] были применены для неоднородного уравнения Кавахары и были получены аналогичные результаты.

Отметим, что в работе [32] обратные задачи с интегральным переопределением были рассмотрены для уравнения Кортевега–де Фриза на неограниченных интервалах. На случай уравнения Кавахары эти результаты были перенесены в работе [17].

В статье [37] обратная задача с интегральным переопределением была изучена для неоднородного уравнения Захарова–Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + uu_x = 0,$$

являющегося многомерным обобщением уравнения Кортевега–де Фриза.

Во 2-ой главе настоящей диссертации рассматриваются обратные задачи на ограниченном интервале для неоднородного обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста. В качестве управления выбираются либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Установлены результаты об однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка, аналогичные [31] и [16]. Данные результаты опубликованы в статье [59].

Уравнение Захарова–Кузнецова описывает процессы распространения волн, двигающихся в заданном направлении x и испытывающих деформации в поперечном направлении y. С физической точки зрения наиболее естественными областями, в которых происходят подобные волновые процессы, являются каналы, ограниченные или полуограниченные по x и конечной ширины по y. При учете дисперсии более высокого порядка возникает уравнение Кавахары–Захарова–Кузнецова

$$u_t - u_{xxxxx} + u_{xxx} + u_{xyy} + au_x + uu_x = 0. \tag{1.6}$$

и его обобщения на случай нелинейности более высокого порядка роста. Физические модели, приводящие к уравнениям подобного типа, приведены, например, в работе [28]. Так же, как и для случая самого уравнения Захарова–Кузнецова, наиболее естественными областями для постановки начально-краевых задач здесь являются, например, области вида $\mathbb{R}_+ \times (0, L)$ для описания распространения волн в канале конечной ширины от начальной стенки. Впервые подобные начально-краевые задачи для уравнения (1.6) были рассмотрены в статье [52]. В работе [36] эти начально-краевые задачи были изучены для случая уравнения с нелинейностью более высокого порядка роста. В [52] и [36] были получены результаты о существовании и единственности глобальных решений в различных функциональных пространствах и убывании решений при больших временах. Результаты статьи [36] во-многом аналогичны результатам полученным ранее для уравнения Захарова–Кузнецова в работах [30, 34, 35]. Случай уравнения Кавахары–Захарова–Кузнецова для трех пространственных переменных рассмотрен в статье [54]. Вопросы гладкости решений двумерного уравнения (1.6) изучены в работе [56].

Однако, наряду с уравнением (1.6) можно рассматривать уравнение, которое и по переменной y имеет производные более высокого порядка и тогда по аналогии с уравнением Захарова–Кузнецова старшие члены которого выглядят следующим образом: $-(u_{xxxx} + u_{yyyy})_x$. Такое уравнение естественно назвать двумерным уравнением Кавахары. Именно такие уравнения с нелинейностью высокого порядка роста рассматриваются в 3-ей главе диссертации и для него изучаются начально-краевые задачи на полуполосе $\mathbb{R}_+ \times (0, L)$ с различными типами краевых условий. Устанавливаются результаты о глобальной корректности в классах слабых и сильных решений и убывании этих решений при больших временах. Ранее подобные уравнения не изучались. Полученные результаты опубликованы в статье [60].

1.2 Цели работы

Целями работы является изучение прямых и обратных начально-краевых задач для уравнения Кавахары и его обобщений. В 1-ой главе рассматривается начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и исследуются вопросы существования и единственности глобальных сильных решений и убывании этих решений при больших временах при добавлении в уравнение абсорбирующего слагаемого. Во 2-ой главе рассматриваются обратные задачи на ограниченном интервале для неоднородного обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста с интегральным условием переопределения. В качестве управления выбираются либо одно из краевых условий, либо правая часть уравнения специального вида. Исследуются вопросы однозначной разрешимости этих задач в классах слабых решений либо в случае малых входных данных, либо малости временного промежутка. В

3-ей главе рассматриваются начально-краевые задачи на полуполосе с различными типами краевых условий для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста и исследуются вопросы существования и единственности глобальных слабых и сильных решений и убывании этих решений при больших временах.

1.3 Методика исследования

Исследования, представленные в диссертации, имеют теоретический характер. Они основаны на современных методах теории уравнений с частными производными и нелинейного анализа. Широко используется сочетание изучения соответствующих линеаризованных задач и нелинейных оценок.

1.4 Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3-х глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 100 страниц. Список литературы содержит 69 наименований.

1.5 Содержание работы

1.5.1 Начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары

В Главе 1 на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + (F(u))_x + g(x)u = 0, \tag{1.7}$$

$u = u(t,x)$, a, b – действительные константы, $t > 0$, с начальными и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad u(t,0) = u_x(t,0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

Функция F удовлетворяет условию ограничения роста

$$|F'(u)| \leq c|u|^p, \quad p \in [1,8), \tag{1.9}$$

для некоторой константы $c > 0$ и любых $u \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности всегда полагаем, что $F(0) = 0$.

На интервале $I \subset \mathbb{R}$ определим пространство Соболева дробного порядка $H^s(I)$, $s \in \mathbb{R}$, как пространство сужений на I функций из пространства

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f : \mathfrak{F}^{-1}[(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})\},$$

где $\widehat{f} = \mathfrak{F}[f]$ и $\mathfrak{F}^{-1}[f]$ – прямое и обратное преобразования Фурье соответственно.

Для произвольного $T > 0$ положим $\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+$. Решения рассматриваемой задачи строятся в пространстве

$$X_2(\Pi_T^+) = \{u \in C([0,T]; H_0^2(\mathbb{R}_+)); \quad \partial_x^j u \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(4-j)/5}(0,T)),\ 0 \le j \le 4; \\ u \in L_8(0,T; C_b^2(\overline{\mathbb{R}}_+)), \quad u \in L_2(\mathbb{R}_+; C[0,T])\}$$

(индекс b здесь и далее означает ограниченность соответствующего отображения), на котором введена естественная норма. Такие решения будем называть сильными.

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ введем пространство Лебега со степенными весами

$$L_2^\alpha(\mathbb{R}_+) = \{\varphi(x) : (1+x)^\alpha \varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)\}.$$

Положим для $\alpha > 0$

$$X_2^\alpha(\Pi_T^+) = \{u \in X_2(\Pi_T^+) \cap C([0,T]; L_2^\alpha(\mathbb{R}_+)) : u_{xx} \in L_2(0,T; L_2^{\alpha-1/2}(\mathbb{R}_+))\}$$

с естественной нормой.

Сформулируем основные результаты этой главы.

Теорема 1.1. *Пусть $u_0 \in H_0^2(\mathbb{R}_+)$, $g \in W_\infty^2(\mathbb{R}_+)$, $F \in C^4(\mathbb{R})$ и для функции F выполнено условие (1.9). Тогда для любого $T > 0$ в полуполосе Π_T^+ существует сильное решение решение задачи (1.7), (1.8) $u \in X_2(\Pi_T^+)$, которое единственно в более широком пространстве $L_\infty(0,T; H_0^2(\mathbb{R}_+))$.*

Теорема 1.2. *Если в дополнение к условиям Теоремы 1.1 известно, что $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}_+)$ для некоторого $\alpha > 0$, то построенное решение $u \in X_2^\alpha(\Pi_T^+)$.*

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия Теорем 1.1 и 1.2 и пусть существуют положительные константы M и c_0 такие что для $x \geq 0$*

$$g(x) \geq \frac{c_0}{1+x}, \tag{1.10}$$

$$|g'(x)| \leq Mg(x), \quad |g''(x)| \leq Mg(x). \tag{1.11}$$

Тогда построенное решение u обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0. \tag{1.12}$$

Замечание 1.1. *Подобные результаты были получены в статье [19] для уравнения Кортевега-де Фриза при условии малости начальных данных, однако, затухание решений начально-краевой задачи для уравнение (1.7) рассматривается впервые.*

1.5.2 Обратные задачи на ограниченном интервале для обобщенного уравнения Кавахары

В Главе 2 рассматривается обратная начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары:

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u + (F(u))_x = f(t,x), \tag{1.13}$$

$u = u(t,x)$, $a_j \in \mathbb{R}$, (в терминах уравнения (1.1) можно считать, что $a_3 = b$, $a_1 = a$) заданного на прямоугольнике $Q_T = (0,T) \times (0,R)$, где $T, R > 0$, с начальным условием

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,R], \tag{1.14}$$

и с граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(t,0) = \mu(t), \quad u(t,R) = \nu(t), \\ u_x(t,0) = \theta(t), \quad u_x(t,R) = h(t), \\ u_{xx}(t,R) = \sigma(t), \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Функция $F(u) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию ограничения роста:

$$|F'(u)| \le c|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

для некоторых положительных констант c и p (условия на p будут уточнены далее). Без ограничения общности будем также предполагать, что $F(0) = 0$.

Условие переопределения задано в интегральном виде:

$$\int_0^R u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.17}$$

где ω и φ некоторые данные функции. В качестве управления выбирается либо функция σ, либо правая часть уравнения f специального вида.

Решения строятся в функциональном пространстве

$$X(Q_T) = C([0,T]; L_2(0,R)) \cap L_2(0,T; H^2(0,R)), \tag{1.18}$$

с нормой
$$\|u\|_{X(Q_T)} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(0,R)} + \|u_{xx}\|_{L_2(Q_T)}. \tag{1.19}$$

Такие решения будем называть слабыми.

На функцию ω наложим следующие ограничения:

$$\omega \in H^5(0,R), \quad \omega(0) = \omega(R) = \omega'(0) = \omega'(R) = \omega''(0) = 0. \tag{1.20}$$

Будем предполагать, что
$$a_4 \geq 0, \qquad a_2 \leq 0. \tag{1.21}$$

Теперь приведем основные результаты этой главы.

В первой обратной задаче при известных функциях u_0, μ, ν, θ, h и f, необходимо найти функцию σ такую, чтобы решение задачи (1.13) -(1.15) удовлетворяло условию (1.17).

Теорема 1.4. *Пусть $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\mu, \nu \in H^{2/5}(0,T)$, h, $\theta \in H^{1/5}(0,T)$, $f \in L_2(Q_T)$, неравенство (1.16) выполнено для $0 < p < 5$, соблюдены условия (1.20) и (1.21), кроме того, $\omega''(R) \neq 0$, и*

$$\varphi(0) = \int_0^R u_0(x)\omega(x)dx. \tag{1.22}$$

Положим
$$\begin{aligned} c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Тогда,

1) При фиксированном $\delta > 0$ найдется $T_0 > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$ и $T \in (0, T_0]$, то существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (1.13)–(1.15) удовлетворяющее условию (1.17).

2) При фиксированном T найдется $\delta > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$, то существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (1.13)–(1.15) удовлетворяющее условию (1.17).

Пусть теперь правая часть уравнения (1.13) имеет вид

$$f(t,x) \equiv f_0(t)g(t,x). \tag{1.24}$$

Во второй обратной задаче при известных функциях $u_0, \mu, \nu, h, \theta, \sigma$ и g, необходимо найти функцию f_0, такую, чтобы соответствующее решение задачи (1.13)–(1.15) удовлетворяло условию (1.17).

Теорема 1.5. *Пусть $u_0 \in L_2(0,R)$, $\varphi \in W_1^1(0,T)$, μ, $\nu \in H^{2/5}(0,T)$, h, $\theta \in H^{1/5}(0,T)$, $\sigma \in L_2(0,T)$, $g \in C([0,T];L_2(0,R))$, неравенство (1.16) выполнено для $0 < p < 6$, соблюдены условия (1.20), (1.21) и (1.22), кроме того, найдется положительная константа g_0 такая, что для любого $t \in [0,T]$*

$$g_0 \leq \Big| \int_0^R g(t,x)\omega(x)dx \Big|. \tag{1.25}$$

Положим

$$\begin{gathered} c_0 = \|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\sigma\|_{L_2(0,T)} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)}. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Пусть правая часть уравнения (1.13) задана формулой (1.24). Тогда,

1) При фиксированном $\delta > 0$ найдется $T_0 > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$ и $T \in (0,T_0]$, то существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (1.13)–(1.15) удовлетворяющее условию (1.17).

2) При фиксированном T найдется $\delta > 0$ такое, что если $c_0 \leq \delta$, то существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ и соответствующее единственное решение $u \in X(Q_T)$ задачи (1.13)–(1.15) удовлетворяющее условию (1.17).

Замечание 1.2. *Обратные задачи для начально-краевых задач для уравнения Кавахары с интегральным переопределением изучались, в частности, в статье [18], однако, в настоящей работе рассмотрено уравнение более общего вида с высокой нелинейностью.*

1.5.3 Двумерное уравнение Кавахары

В Главе 3 рассматриваются начально-краевые задачи для обобщенного двумерного уравнения Кавахары:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x + (F(u))_x = f(t,x,y), \tag{1.27}$$

$u = u(t,x,y)$, a, b – действительные константы, без ограничения общности считаем, что $F(0) = 0$, заданного в области $\Pi^+_{T,L} = (0,T) \times \Sigma_+$, где $\Sigma_+ = \mathbb{R}_+ \times (0,L) = \{(x,y) : X > 0, 0 < y < L\}$ – полуполоса произвольной ширины $L > 0$, $T > 0$ – произвольно, с начальным условием:

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Sigma_+, \tag{1.28}$$

граничными условиями:

$$u(t,0,y) = u_x(t,0,y) = 0, \quad (t,y) \in B_T = (0,T) \times (0,L); \tag{1.29}$$

и одним из двух типов граничных условий при $(t,x)\in\Omega_T^+=(0,T)\times\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &a) u(t,x,0)=u(t,x,L)=u_{yy}(t,x,0)=u_{yy}(t,x,L)=0,\\ &b) u_y(t,x,0)=u_y(t,x,L)=u_{yyy}(t,x,0)=u_{yyy}(t,x,L)=0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

В дальнейшем в обоих случаях рассматриваемые задачи будем нумеровать как задача (1.27)–(1.30).

Введем специальные функциональные пространства $\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$, учитывающие граничные условия (1.30). Пусть $\widetilde{H}^0(\Sigma_+)=L_2(\Sigma_+)$, а для $k\geq 1$ пусть $\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$ является подпространством пространства $H^k(\Sigma_+)$, состоящим из функций $\varphi(x,y)$ таких, что
в случае a)

$$\partial_y^{2m}\varphi|_{y=0}=\partial_y^{2m}\varphi|_{y=L}=0\quad\forall m\in[0,k/2),$$

в случае b)

$$\partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L}=0\quad\forall m\in[0,(k-1)/2).$$

Введем следующее обозначение:

$$\lambda^+(u;T)=\sup_{x_0\geq 0}\int_0^T\int_{x_0}^{x_0+1}\int_0^L u^2\,dydxdt. \tag{1.31}$$

Дадим определение допустимой весовой функции.

Определение 1.1. *Будем называть функцию $\psi(x)$ допустимой весовой функцией, если ψ – бесконечно гладкая положительная на $\overline{\mathbb{R}}_+$ функция такая, что для всех $j\in\mathbb{N}$ и $\forall x\geq 0$*

$$|\psi^{(j)}(x)|\leq c(j)\psi(x). \tag{1.32}$$

Для допустимой весовой функции $\psi(x)$ обозначим через $\widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+)$ пространство функций $\varphi(x,y)$ таких, что $\varphi\psi^{1/2}(x)\in\widetilde{H}^k(\Sigma_+)$. Пусть $L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+)=\widetilde{H}^{0,\psi(x)}(\Sigma_+)=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}(x)\in L_2(\Sigma_+)\}$.

Решения рассматриваемых задач строятся в пространствах $X_w^{k,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ для $k=0$ (слабые решения) и $k=2$ (сильные решения) для допустимых весовых функций $\psi(x)$, для которых $\psi'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями, состоящих из функций $u(t,x,y)$ таких, что

$$u\in C_w([0,T];\widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+))\cap L_2(0,T;\widetilde{H}^{k+2,\psi'(x)}(\Sigma_+)) \tag{1.33}$$

(нижний индекс w означает слабую непрерывность).

Пусть $X_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)=X_w^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$. Определение слабых решений будет дано в самой главе. Сильные решения — это слабые решения, лежащие в пространстве $X_w^{2,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Далее, приведем основные результаты этой главы. Первая теорема устанавливает существование и единственность слабых решений рассматриваемых задач.

Теорема 1.6. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+)$, $f \in L_1(0,T;L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+))$ *для некоторой допустимой весовой функции* $\psi(x)$, *для которой* $\psi'(x)$ *также является допустимой весовой функцией. Пусть функция* $F \in C^1(\mathbb{R})$ *и для некоторых констант* $p \in [0,4)$ *и* $c > 0$

$$|F'(u)| \le c|u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{1.34}$$

и, если $p > 1$, *функция* ψ *удовлетворяет неравенству* $\psi(x) \le c(1+x)^n\psi'(x)$ *для некоторых констант* n *и* $c > 0$. *Тогда существует слабое решение задачи (1.27)-(1.30)* $u \in X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$; *и, более того,* $\lambda^+(u_{xx};T) + \lambda^+(u_{yy};T) < +\infty$. *Если дополнительно известно, что в неравенстве (1.34)* $p \le 3$ *и для некоторой положительной константы* c_0

$$(\psi'(x))^{p+1}\psi^{p-1}(x) \ge c_0 \quad \forall x \ge 0, \tag{1.35}$$

то это решение единственно в пространстве $X_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Замечание 1.3. *Экспоненциальные* $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ $\forall \alpha > 0$ *и степенные* $\psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}$, $\alpha \ge (p+1)/(4p)$, $p > 0$, *веса удовлетворяют условиям Теоремы 1.6 (включая условия для обеспечения единственности решения). Если* $u_0 \in L_2(\Sigma_+)$, $f \in L_1(0,T;L_2(\Sigma_+))$, *то существует слабое решение такое, что* $u \in C_w([0,T];L_2(\Sigma_+))$, $\lambda^+(u_{xx};T) + \lambda^+(u_{yy};T) < +\infty$.

Вторая теорема устанавливает существование и единственность сильных решений рассматриваемых задач.

Теорема 1.7. *Пусть* $u_0 \in \widetilde{H}^{2,\psi(x)}(\Sigma_+)$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}(\Sigma_+))$ *для некоторой допустимой весовой функции* $\psi(x)$, *для которой* $\psi'(x)$ *также является допустимой весовой функцией,* $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$. *Пусть функция* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *и удовлетворяет условию (1.34) для* $p \in [0,4)$. *Тогда существует сильное решение рассматриваемой задачи (1.27)-(1.30)* $u \in X_w^{2,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$; *более того,* $\lambda^+(u_{xxxx};T) + \lambda^+(u_{xxyy};T) + \lambda^+(u_{yyyy};T) < +\infty$. *Если дополнительно известно, что для некоторых* $q \ge 0$ *и* $c > 0$

$$|F''(u)| \le c|u|^q \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{1.36}$$

и для некоторых констант $c_0 > 0$ *и* $r \in (2,4]$

$$\psi'(x)^{r-2}\psi^{rq+2}(x) \ge c_0 \quad \forall x \ge 0, \tag{1.37}$$

то это решение единственно в пространстве $X_w^{2,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^+)$.

Замечание 1.4. *Экспоненциальные* $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ $\forall \alpha > 0$ *и степенные* $\psi(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}$, $\forall \alpha > 0$, *веса удовлетворяют условиям Теоремы 1.7 (включая условия для обеспечения единственности решения). Если* $u_0 \in \widetilde{H}^2(\Sigma_+)$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_+))$, *то существует сильно решение такое, что* $u \in C_w([0,T];\widetilde{H}^2(\Sigma_+)))$, $\lambda^+(u_{xxxx};T) + \lambda^+(u_{xxyy};T) + \lambda^+(u_{yyyy};T) < +\infty$.

В следующих двух теоремах устанавливаются результаты об убывании при больших временах малых слабых и сильных решений в случае a) граничных условий (1.30).

Теорема 1.8. *Пусть функция* $F \in C^1(\mathbb{R})$ *удовлетворяет неравенству (1.34) для* $p \in (0,3]$. *Тогда существуют* $L_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *и* $\epsilon_0 > 0$ *такие, что для любых* $L \in (0, L_0]$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$ *и* $\beta = \pi^4/(8L^4)$, *если* $u_0 \in L_2^{e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)$, $\|u_0\|_{L_2(\Sigma_+)} \le \epsilon_0$, $f \equiv 0$, *то соответствующее единственное слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи (1.27)-(1.30) в случае a), принадлежащее пространству* $X_w^{e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^+)$ $\forall T > 0$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\|e^{\alpha x} u(t,\cdot,\cdot)\|^2_{L_2(\Sigma_+)} \le e^{-\alpha\beta t} \|e^{\alpha x} u_0\|^2_{L_2(\Sigma_+)} \quad \forall t \ge 0. \tag{1.38}$$

Теорема 1.9. *Пусть функция* $F \in C^2(\mathbb{R})$ *удовлетворяет неравенству (1.34) для* $p \in (0,4)$ *и неравенству (1.36). Тогда существуют* $L_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ *и* $\epsilon_0 > 0$ *такие, что для любых* $L \in (0, L_0]$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ *и* $\beta = \pi^4/(8L^4)$, *если* $u_0 \in \widetilde{H}^{2,e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)$, $\|u_0\|_{L_2(\Sigma_+)} \le \epsilon_0$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \equiv 0$, *то соответствующее единственное сильное решение* $u(t,x,y)$ *задачи (1.27)-(1.30) в случае a), принадлежащее пространству* $X_w^{2,e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^+)$ $\forall T > 0$, *удовлетворяет неравенству:*

$$\|e^{\alpha x} u(t,\cdot,\cdot)\|^2_{H^2(\Sigma_+)} \le c(\alpha, \beta, \|u_0\|_{H^{2,e^{2\alpha x}}(\Sigma_+)}) e^{-\alpha\beta t} \quad \forall t \ge 0. \tag{1.39}$$

Замечание 1.5. *Различные двухмерные модификации уравнения Кавахары были изучены в работах [33, 52]. Однако, уравнение вида (1.27) рассматривается впервые.*

1.6 Основные положения, выносимые на защиту.

1) Теоремы о существовании и единственности глобальных сильных решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста.

2) Теорема об убывании при больших временах сильных решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста без условий малости начальных данных.

3) Теорема о существовании единственного слабого решения обратной начально-краевой задачи на ограниченном интервале с интегральным условием переопределения для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста, когда в качестве управления выбирается одна из краевых функций, при условии малости либо входных данных, либо временного интервала.

4) Теорема о существовании единственного слабого решения обратной начально-краевой задачи на ограниченном интервале с интегральным условием переопределения для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка

роста, когда в качестве управления выбирается правая часть уравнения специального вида, при условии малости либо входных данных, либо временного интервала.

5) Теоремы о существовании и единственности глобальных слабых и сильных решений начально-краевых задач на полуполосе для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста.

6) Теоремы об убывании при больших временах слабых и сильных решений начально-краевой задачи на полуполосе для обобщенного двумерного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка роста при малых начальных данных.

1.7 Теоретическая значимость.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при изучении начально-краевых прямых и обратных задач для квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка более общего вида.

1.8 Апробация диссертационной работы

Результаты настоящей диссертации были представлены на следующих международных конференциях:

- Singularities, Blow–up, and Non–Classical Problems in Nonlinear PDEs. 10-14 ноября, 2019. Москва, Россия.

- Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis. 30 июня- 9 июля, 2021. Долгопрудныи, Россия.

- Дифференциальные уравнения и смежные вопросы 26-30 декабря, 2021. Москва, Россия.

- Уфимская осенняя математическая школа. 28-сентября-1 октября, 2022. Уфа, Россия.

- Вторая конференция математических центров России. 7–11 ноября, 2022. Москва, Россия.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах:

- Математические методы экономики и естественных наук. Руководители семинара — профессор Розанова О.С. и профессор Шамаев А.С. (МГУ)–21.04.2023.

- Обратные задачи математической физики и естествознания. Руководители семинара — профессор Прилепко А.И. и академик Садовничий В.А. (МГУ)– 11.05.2023.

- Общематематический семинар аспирантов и молодых ученых МИ. Руководитель семинара — Беляева Ю.О. (РУДН)– 26.10.2020.

- Семинар по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Руководитель семинара — профессор Скубачевский А.Л. (РУДН)– 03.11.2020, 26.09.2023.

- Научный семинар по нелинейным задачам уравнений в частных производных и математической физики. Руководитель семинара — профессор Шишков А.Е. (РУДН)–26.09.2023.

- Научный семинар Лаборатории дифференциальных уравнений и математической физики Центра прикладной математики НовГУ. Руководитель семинара — профессор Панов Е.Ю. (НовГУ)–02.10.2023.

1.9 Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 3 статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных (Scopus, MathSciNet), 1 статья индексируемая в ВАК и 5 — в тезисах докладов на международных конференциях. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Статьи в научных журналах:

1. E.V. Martynov. Initial-boundary value problems for two dimensional Kawahara equation. *Прикладная Математика и Физика*, 55(1): 12–28, 2023.

2. E.V. Martynov. Inverse Problems for the Generalized Kawahara Equation, *Lobachevskii Journal of Mathematics,* 43(10): 1–11, 2022.

3. A.V. Faminskii, E.V. Martynov. On initial-boundary value problem on semiaxis for generalized Kawahara equation. *Journal of Mathematical Sciences,* 265(5): 849–864, 2022.

4. A.V. Faminskii, E.V. Martynov. Large-time decay of solutions of the damped Kawahara equation on the half-line. *In: Manuilov, V.M., et al. (eds.) Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Basel*: 130–141, 2021.

Тезисы конференций:

1. E.V. Martynov. "Large-time behavior of solutions to the damped modied Kawahara equation". Singularities, Blow–up, and Non–Classical Problems in Nonlinear PDEs. P. 45–46. Moscow, Russia, 2019, ISBN 978-5-209-09616-0.

2. E.V. Martynov. "Decay of Solutions to Damped Kawahara Equation"International Conference "Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis". P. 113–114. Dolgoprudny, Russia, 2021, ISBN 978-5-6043721.

3. E.V. Martynov. "Inverse problems for the Kawahara equation with integral overdetermination". Сборник тезисов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Стр. 91–93. Москва, Россия, 2022.

4. E.V. Martynov. "Inverse problems for the generalized Kawahara equation". Материалы Международной Научной Конференции "Уфимская Осенняя Математическая Школа–2022 Том 2. Стр. 211–213ю Уфа, Россия, 2022, ISBN 978-5-7477-5533-8.

5. E.V. Martynov. "Inverse problems for the generalized Kawahara equation". Вторая конференция математических центров России. Сборник Тезисов. Стр. 286–288. Москва, Россия, 2023, ISBN 978-5-19-011798-1.

2 Глава 1

2.1 Обозначения и вспомогательные результаты

Для удобства, в этой главе мы будем использовать следующие обозначения: $L_{q,+} = L_q(\mathbb{R}_+)$, $W^k_{q,+} = W^k_q(\mathbb{R}_+)$, $H^k_+ = W^k_{2,+}$, $H^k_{0,+} = H^k_0(\mathbb{R}_+) = \{\varphi(x) \in H^k_+ : \varphi^{(j)} = 0, 0 \leq j \leq k-1\}$, $C^k_{b,+} = C^k_b(\overline{\mathbb{R}}_+)$ (здесь и далее индекс b обозначает ограниченность отображения) для $p \in [1, +\infty)$ и целых $k \geq 0$. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ определим специальные пространства Лебега со степенными весами:

$$L^\alpha_{2,+} = \{\varphi(x) : (1+x)^\alpha \varphi \in L_2(\mathbb{R}_+)\}.$$

Напомним, что $\Pi^+_T = (0,T) \times \mathbb{R}_+$ для $T > 0$ и $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Кроме того, мы опускать пределы интегрирования в интегралах по $\mathbb{R}_+$.

Обозначим через $\eta(x)$– неубывающую и бесконечно дифференцируемую функцию среза такую, что $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 0$ для $x \leq 0$, $\eta(x) = 1$ и для $x \geq 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$. Для функции F положим

$$F^*(u) \equiv \int_0^u F(\theta) d\theta \tag{2.1}$$

В дальнейшем будем использовать простое интерполяционное неравенство,

$$\int (\varphi')^2 \psi dx \leq (\int (\varphi'')^2 \psi dx)^{1/2} (\int \varphi^2 \psi dx)^{1/2} + \frac{1}{2} \int \varphi^2 |\psi''| dx, \tag{2.2}$$

справедливое для функций $\varphi \in H^2_+ \cap H^1_{0,+}$ и гладких весовых функций ψ при условии, что интегралы в правой части существуют.

Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 2.1. *Пусть $g \in L_{\infty,+}$, $u_0 \in L_{2,+}$. Функция $u \in L_2(\Pi^+_T)$ называется слабым решением задачи (1.7), (1.8) в полуполосе Π^+_T для некоторого $T > 0$, если для любой функции $\phi \in L_2(0,T; H^5_+)$, такой что $\phi_t \in L_2(\Pi^+_T)$, $\phi\big|_{t=T} \equiv 0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} \equiv 0$ функция $F(u(t,x))\phi_x \in L_1(\Pi^+_T)$ и справедливо равенство*

$$\iint_{\Pi^+_T} [u(\phi_t - \phi_{xxxxx} + b\phi_{xxx} + a\phi_x - g\phi) + F(u)\phi_x] dxdt + \int_{\mathbb{R}_+} u_0 \phi\big|_{t=0} dx = 0. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Пусть положительные функции $\psi_j \in W^1_\infty(0,r)$ $\forall r > 0$, $j = 0$ и 1, причем существует константа $\widetilde{c} > 0$ такая, что для каждого j*

$$|\psi'_j(x)| \leq \widetilde{c} \psi_j(x) \quad \forall x > 0.$$

Пусть $2 \leq q \leq +\infty$, $s = \frac{1}{8} - \frac{1}{4q}$. *Тогда существует константа* $c = c(q, \widetilde{c})$ *такая, что*

$$\|\varphi\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} \leq c[\|(|\varphi''| + |\varphi|)\psi_0^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s}\|\varphi\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s} + \|\varphi\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\|_{L_{2,+}}^{1-2/q}\|\varphi\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2/q}] \tag{2.4}$$

для любой функции $\varphi \in H^2(0, r)$ $\forall r > 0$ *такой, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi''\psi_0^{1/2}$, $\varphi\psi_0^{1/2}$, $\varphi\psi_1^{1/2} \in L_{2,+}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что φ – гладкая, убывающая при $x \to +\infty$, функция.

Интегрированием по частям и использованием свойств функций ψ_j находим, что

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}dx = -\int \varphi''\varphi\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}dx - \int \varphi'(\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2})'dx$$

$$\leq (\int (\varphi'')^2\psi_0 dx)^{1/2}(\int \varphi^2\psi_1 dx)^{1/2} + c(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}dx)^{1/2}(\int \varphi^2\psi_0 dx)^{1/4}(\int \varphi^2\psi_1)^{1/4},$$

откуда следует неравенство

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}dx \leq c(\int ((\varphi'')^2 + \varphi^2)\psi_0 dx)^{1/2}(\int \varphi^2\psi_1 dx)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Далее используя элементарное неравенство

$$\sup_{x>0} \phi^2 \leq 2\int |\phi'||\phi|dx, \tag{2.6}$$

находим, что

$$\sup_{x>0}(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}) \leq c\int (|\varphi'| + |\varphi|)\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}|\varphi|\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}dx$$

$$\leq c\int |\varphi'|\psi_0^{1/4}\psi_1^{1/4}|\varphi|\psi_1^{1/2}dx + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx$$

$$\leq c(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}dx)^{1/2}(\int \varphi^2\psi_1 dx)^{1/2} + \int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx),$$

откуда, применяя (2.5), выводим, что

$$\sup_{x>0}(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}) \leq c(\int ((\varphi'')^2 + \varphi^2)\psi_0 dx)^{1/4}(\int \varphi^2\psi_1 dx)^{3/4} + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx, \tag{2.7}$$

что совпадает с (2.4) при $q = +\infty$. Если $q < +\infty$, поскольку

$$sq = \frac{q}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(\frac{q}{2} - 1),$$

$$(\frac{1}{2}-s)q = 3\frac{q}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3q+2}{8} = \frac{3}{4}(\frac{q}{2}-1)+1 = \frac{3q+2}{8},$$

из (2.7) следует неравенство

$$\int(|\varphi|\psi_0^s\psi_1^{1/2-s})^q dx \leq (\sup_{x>0}(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}))^{q/2-1}\int\varphi^2\psi_1 dx$$

$$\leq c(\int((\varphi'')+\varphi^2)\psi_0 dx)^{(q-2)/8}(\int\varphi^2\psi_1)^{(3q+2)/8} + c(\int\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4})^{(q-2)/2}\int\varphi^2\psi_1 dx,$$

что совпадает с (2.4) при $q \in (2,+\infty)$.

Заметим, что если $\psi_0(x) \leq c\psi_1(x)\ \forall x>0$, то неравенство (2.4) в более общем виде было доказано ранее, например, в [8].

□

2.2 Вспомогательная линейная задача

В полуполосе Π_T^+ рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу:

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = f(t,x), \tag{2.8}$$

$$v(0,x) = u_0(x), \quad x \geq 0, \quad v(t,0) = v_x(t,0) = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

Слабое решение этой задачи понимается полностью аналогично Определению 2.1: Функция $v \in L_2(\Pi_T^+)$ называется слабым решением задачи (2.8), (2.9) в полуполосе Π_T^+ для некоторого $T>0$, если для любой функции $\phi \in L_2(0,T;H_+^5)$, такой что $\phi_t \in L_2(\Pi_T^+)$, $\phi\big|_{t=T} \equiv 0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} \equiv 0$, справедливо равенство

$$\iint_{\Pi_+^T}[v(\phi_t - \phi_{xxxxx} + b\phi_{xxx} + a\phi_x) + f\phi]dxdt + \int u_0\phi\big|_{t=0}dx = 0. \tag{2.10}$$

Заметим, что слабое решение задачи (2.8), (2.9) единственно в пространстве $L_2(\Pi_T^+)$ (см. [3]).

Лемма 2.2. *Пусть $u_0 \in H_{0,+}^2$, $f \in L_2(0,T;H_{0,+}^2)$. Тогда существует единственное решение задачи (2.8), (2.9) $v \in X_2(\Pi_T^+)$ и для любого $t \in (0;T]$*

$$\|v\|_{X_2(\Pi_t^+)} \leq c(T)(\|u_0\|_{H_+^2} + t^{1/10}\|f\|_{L_2(0,t;H_+^2)}), \tag{2.11}$$

$$\int v^2(t,x)dx + \int_0^t v_{xx}^2\big|_{x=0}d\tau = \int u_0^2 dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fv\,dxd\tau, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered}\int[v_{xx}^2(t,x) + bv_x^2(t,x) - 2F^*(v(t,x))]dx + \int_0^t[(v_{xxxx}-bv_{xx})^2 + av_{xx}^2]\big|_{x=0}d\tau \\ -2\iint_{\Pi_t^+}F'(v)(v_xv_{xxxx} - bv_xv_{xx})dxd\tau = \int[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2f^*(u_0)]dx \\ +\iint_{\Pi_t^+}(2f_{xx}v_{xx} - 2bfv_{xx} - fF(v))dxd\tau,\end{gathered} \tag{2.13}$$

где функция F удовлетворяет условиям Теоремы 1.1.

Доказательство. Существование решения $v \in X_2(\Pi_T^+)$, удовлетворяющего оценке (2.11) было ранее доказано в статье [3].

Существование решений задачи (2.8), (2.9) в классе гладких быстро убывающих на $+\infty$ функций (при соответствующих условиях на u_0 и f) было ранее установлено в статье [7]. Получим равенство (2.12): умножим уравнение (2.8) на $2v(t,x)$, получим

$$2vv_t - 2vv_{xxxxx} + b2vv_{xxx} + a2vv_x = 2vf(t,x),$$

затем проинтегрируем полученное равенство по t и по x:

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_\tau^2 dxd\tau - \iint_{\Pi_t^+} (2vv_{xxxxx} + b2vv_{xxx} + a2vv_x)dxd\tau = 2\iint_{\Pi_t^+} fvdxd\tau.$$

Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_t^2 dxd\tau = \iint_{\Pi_t^+} (v^2)_\tau dxd\tau = \int v^2\big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx = \int v^2(t,x)dx - \int u_0^2 dx,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2v_{xxxxx}dxd\tau = \int_0^t [2vv_{xxxx} - 2v_xv_{xxx} + v_{xx}^2]\big|_{x=0}^{x=R} d\tau = -\int_0^t v_{xx}^2\big|_{x=0} d\tau,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_{xxx}dxd\tau = \int_0^t [2vv_{xx} - v_x^2]\big|_{x=0}^{x=R} d\tau = 0,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_x dxd\tau = \iint_{\Pi_t^+} (v^2)_x dxd\tau = \int_0^t v^2\big|_{x=0}^{x=R} d\tau = 0,$$

получаем искомое равенство:

$$\int v^2(t,x)dx + \int_0^t v_{xx}^2\big|_{x=0} d\tau = \int u_0^2 dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fvdxd\tau.$$

Аналогично получаем (2.13): умножим уравнение (2.8) на $(2v_{xxxx}(t,x) - 2bv_{xx}(t,x) - 2F(v(t,x)))$:

$$\iint_{\Pi_t^+} (2v_{xxxx}(t,x) - 2bv_{xx}(t,x) - 2F(v(t,x)))v_\tau dxd\tau$$

$$= \int_0^t [2v_{xxx}v_\tau - 2v_{xx}v_{x\tau} - 2bv_xv_t]\big|_{x=0}^{x=R} d\tau + \int [v_{xx}^2 - v_x^2]\big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx - \iint_{\Pi_t^+} 2F(v)v_\tau dxd\tau$$

$$= \int_0^t [2v_{xxx}v_\tau - 2v_{xx}v_{x\tau} - 2bv_xv_t]\big|_{x=0}^{x=R} d\tau + \int [v_{xx}^2 - v_x^2]\big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx - \int 2F(v)\big|_{x=0}^{x=R} dx$$

$$= \int_0^t [2v_{xxx}v_\tau - 2v_{xx}v_{x\tau} - 2bv_xv_t]\big|_{x=0}^{x=R} d\tau + \int [v_{xx}^2 - v_x^2]\big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx$$

$$- \int 2[F(v(t,x)) - F(u_0)]dx,$$

$$\iint_{\Pi_t^+}(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2F(v(t,x)))v_{xxxxx}dxd\tau$$
$$=\int_0^t[v_{xxxx}^2-2bv_{xx}v_{xxxx}+bv_{xxx}^2]\big|_{x=0}^{x=R}d\tau-\iint_{\Pi_t^+}2F(v)u_{xxxxx}dxd\tau$$
$$\iint_{\Pi_t^+}(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2F(v(t,x)))bv_{xxx}dxd\tau$$
$$=\int_0^t[bv_{xxx}^2-b^2v_{xx}^2]\big|_{x=0}^{x=R}d\tau-\iint_{\Pi_t^+}2bF(v)v_{xxx}dxd\tau,$$
$$\iint_{\Pi_t^+}(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2F(v(t,x)))av_xdxd\tau$$
$$=\int_0^t[2av_{xxx}v_x-v_{xx}^2+av_x^2]\big|_{x=0}^{x=R}d\tau-\iint_{\Pi_t^+}2aF(v)v_xdxd\tau,$$
$$\iint_{\Pi_t^+}(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2F(v(t,x)))fdxd\tau$$
$$=\iint_{\Pi_t^+}(2f_{xx}v_{xx}-2bfv_{xx}-2fF(v))dxd\tau,$$

просуммируем и получаем искомое равенство:

$$\int[v_{xx}^2(t,x)+bv_x^2(t,x)-2F^*(v(t,x))]dx+\int_0^t[(v_{xxxx}-bv_{xx})^2+av_{xx}^2]\big|_{x=0}d\tau$$
$$-2\iint_{\Pi_t^+}F'(v)(v_xv_{xxxx}-bv_xv_{xx})dxd\tau=\int[(u_0'')^2+b(u_0')^2-2F^*(u_0)]dx$$
$$+\iint_{\Pi_t^+}(2f_{xx}v_{xx}-2bfv_{xx}-2fF(v))dxd\tau,$$

Общий случай получается предельным переходом. Рассмотрим

$$\|F^*(v)\|_{C([0,T];L_{1,+})}\le c\|v^p\|_{C([0,T];L_{1,+})}\le c\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}\|v^p\|_{L_{1,+}}$$
$$\le c\sup_{t\in(0,T)}\int|v|^{p+2}dx\le c\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}|v|^p\|v\|^2_{C([0,T];L_{2,+})}$$
$$\le c\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

в силу (2.6), получаем, что:

$$\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}|v|\le\|v\|_{C([0,T'H_+^1])}.$$

Тогда

$$c\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}|v|^p\|v\|^2_{C([0,T];L_{2,+})}\le c\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

и, следовательно
$$\|F^*(v)\|_{C([0,T];L_{1,+})} \le c\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)}.$$
Аналогично:
$$\|F'(v)v_x v_{xxxx}\|_{L_1(\Pi_T^+)} \le c\iint_{\Pi_T^+} |v|^p |v_x v_{xxxx}|dxdt$$
$$\le c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^{p-1}\|v_x\|_{L_2(\Pi_T^+)}(\int \sup_{t\in(0,T)} v^2 dx)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}_+}(\int_0^T v_{xxxx}^2 dt)^{1/2} \le c(T)\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$
$$\|fF(v)\|_{L_1(\Pi_T^+)} \le c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^p \|v\|_{C([0,T];L_{2,+})}\|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+})} \le C(T)\|v\|^{p+1}_{X_2(\Pi_T^+)}\|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}$$
Полученные неравенства обеспечивают возможность предельного перехода в соответствующих слагаемых. □

Замечание 2.1. *Если $u_0 \in L_{2,+}$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+})$, то предельным переходом из равенства (2.12) получаем существование единственного решения задачи (2.8), (2.9) из пространства $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ для которого при почти всех $t \in (0,T)$ справедливо неравенство*
$$\int v^2(t,x)dx \le \int u_0^2 dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fv dxd\tau. \tag{2.14}$$

Лемма 2.3. *Пусть $u_0 \in L^\alpha_{2,+}$, $f \in L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда существует единственное решение $v(t,x)$ задачи (2.8), (2.9) такое, что $v \in C([0,T];L^\alpha_{2,+})$, $v_{xx} \in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$ и для любого $t \in (0,T]$*
$$\|v\|_{C([0,t];L^\alpha_{2,+})} + \|v_{xx}\|_{C([0,t];L^{\alpha-1/2}_{2,+})} \le c(T,\alpha)(\|u_0\|_{L^\alpha_{2,+}} + \|f\|_{L_1(0,t;L^\alpha_{2,+})}) \tag{2.15}$$
$$\int v^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+}[5v_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')v_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')v^2]dxd\tau$$
$$\le \int u_0^2\rho dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fv\rho dxd\tau, \tag{2.16}$$
где $\rho(x) \equiv (1+x)^{2\beta}$ для $\beta \in (0,\alpha]$.

Доказательство. В гладком случае (см. доказательство предыдущей леммы) неравенство (2.16) получается умножением уравнения (2.8) на $2v(t,x)\rho(x)$ и интегрированием:
$$\iint_{\Pi_t^+} 2v\rho v_\tau dxd\tau = \iint_{\Pi_t^+}(v^2)_\tau dxd\tau = \int v^2(t,x)dx - \int u_0^2 dx,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_{xxx}\rho dxd\tau = \int_0^t [(2vv_{xx} - v_x^2)\rho - 2vv_x\rho' + v^2\rho'']d\tau\Big|_{x=0}^{x=R} + \iint_{\Pi_t^+} [3v_x^2\rho' - v^2\rho''']dxd\tau$$
$$= \iint_{\Pi_t^+} [3v_x^2\rho' - v^2\rho''']dxd\tau,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_x\rho dxd\tau = \iint_{\Pi_t^+} (v^2)_x\rho dxd\tau = \int_0^t v^2\Big|_{x=0}^{x=R}\rho d\tau - \iint_{\Pi_t^+} v^2\rho' dxd\tau,$$

$$\iint_{\Pi_t^+} 2vv_{xxxxx}\rho dxd\tau = \int_0^t v_{xx}^2\Big|_{x=0}^{x=R} d\tau + \iint_{\Pi_t^+} [-5v_{xx}^2\rho' + 5v_x^2\rho''' - v^2\rho'''''] dxd\tau.$$

Отсюда

$$\int v^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+} [5v_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')v_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')v^2]dxd\tau$$
$$\le \int u_0^2\rho dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fv\rho dxd\tau.$$

Используя (2.2) оценим

$$|\int (3b\rho' - 5\rho''')v_x^2 dx| \le \int cv_x^2\rho' dx$$
$$\le \widetilde{c}_0(\int v_{xx}^2\rho' dx)^{1/2}(\int v^2\rho' dx)^{1/2} + \int c_0 v^2\rho'' dx$$
$$\le c(\int v_{xx}^2\rho' dx)^{1/2}(\int v^2\rho dx)^{1/2} + \int c_3 v^2\rho dx$$
$$\le 4\int v_{xx}^2\rho' dx + c_2\int v^2\rho dx + \int c_3 v^2\rho dx,$$

и

$$|\int (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')v^2 dx| \le \int c_4 v^2\rho dx$$

В итоге

$$\int v^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+} v_{xx}^2\rho' dxd\tau \le c\iint_{\Pi_t^+} v^2\rho dxd\tau + \int u_0^2\rho dx + 2\iint_{\Pi_t^+} fv\rho dxd\tau.$$

Из последнего неравенства при $\beta = \alpha$ получаем оценку (2.15), которая позволяет сделать предельный переход и получить утверждение леммы. $\square$

2.3 Существование и единственность решений

Доказательство Теоремы 1.1. Сначала методом сжимающих отображений построим локальное по времени решение. Для этого для некоторого $T > 0$ рассмотрим отображение $v = \Lambda u$, где для произвольной функции $u \in X_2(\Pi_T^+)$ функция

$v \in X_2(\Pi_T^+)$ в полуполосе Π_T^+ является решением начально-краевой задачи для уравнения

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = -F'(u)u_x - g(x)u, \tag{2.17}$$

с граничными условиями (2.9). Имеем:

$$(F'(u)u_x)_{xx} = F'(u)u_{xxx} + 3F''(u)u_xu_{xx} + F'''(u)u_x^3,$$

а тогда

$$\iint_{\Pi_T^+} (F'(u)u_{xxx})^2 dxdt \le c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^{2p-2} \int \sup_{t\in(0,T)} u^2 dx \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int_0^T u_{xxx}^2 dt \le c_1 \|u\|^{2p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\iint_{\Pi_T^+} [(F''(u)u_xu_{xx})^2 + (F'''(u)u_x^3)^2 + ((F'(u)u_x))^2] dxdt$$
$$\le c(T)\|F'(\theta)\|^2_{C^2[|\theta|\le\|u\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)}]} \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}(u_x^4+1) \sup_{t\in(0,T)} \int (u_{xx}^2 + u_x^2) dx.$$

В итоге, для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ

$$\|F'(u)u_x\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \le \Phi(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}). \tag{2.18}$$

Кроме того очевидно, что

$$\|gu\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \le cT^{1/2}\|g\|_{W^2_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;H_+^2)}. \tag{2.19}$$

Сначала методом сжимающих отображений построим локальное по времени решение. Для этого для некоторого $T > 0$ рассмотрим отображение $v = \Lambda u$, где для произвольной функции $u \in X_2(\Pi_T^+)$ функция $u \in X_2(\Pi_T^+)$ в полуполосе Π_T^+ является решением начально-краевой задачи для линейного уравнения

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = f \equiv -F'(u)u_x - g(x)u, \tag{2.20}$$

с граничными условиями (1.8). Оценим норму функции $F'(u)u_x$ в пространстве $L_2(0,T;H_+^2)$. Имеем:

$$(F'(u)u_x)_{xx} = F'(u)u_{xxx} + 3F''(u)u_xu_{xx} + F'''(u)u_x^3.$$

Воспользуемся неравенством, полученным из (2.6)

$$\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u(t,x)|, \qquad \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u_x(t,x)| \le \|u\|_{C([0,T];H_+^2)} \le \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}.$$

Тогда

$$\iint_{\Pi_T^+} (F'(u)u_{xxx})^2 dxdt \le c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^{2p-2} \int \sup_{t\in(0,T)} u^2 dx \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int_0^T u_{xxx}^2 dt$$
$$\le c\|u\|^{2p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\iint_{\Pi_T^+} [(F''(u)u_x u_{xx})^2 + (F'''(u)u_x^3)^2 + (F'(u)u_x)^2] dxdt$$
$$\le cT\|F(\theta)\|_{C^2[|\theta|\le\|u\|_{C_b^2(\overline{\Pi}_T^+)}]} \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} (u_x^4+1) \sup_{t(0,T)} \int (u_{xx}^2 + u_x^2) dx$$
$$\le cT\|F'(\theta)\|^2_{C[^2|\theta|\le\|u\|_{X(\Pi_T^+)}]} (\|u\|^4_{X_2(\Pi_T^+)}+1)\|u\|^2_{X_2(\Pi_T^+)}.$$

Введем функцию

$$\Phi_0 \equiv c\xi^{p+1} + cT^{1/2}\|F'(\theta)\|_{C^2[|\theta\le\xi|]}(\xi^4+1)^{1/2}\xi,$$

определенную при $\xi \ge 0$. Очевидно, что эта функция непрерывна и не убывает по своим аргументам. Тогда для соответствующей константы c

$$\|F'(u)u_x\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \le \Psi_0(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}). \tag{2.21}$$

Кроме того, так как $u\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=0} = 0$ и $F'(0) = 0$, то

$$(F'(u)u_x)\big|_{x=0} = (F'(u)u_x)_x\big|_{x=0} = 0,$$

тогда $F'(u)u_x \in L_2(0,T;H_{0,+}^2)$. Кроме того,

$$\|gu\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \le cT^{1/2}\|g\|_{W^2_{\infty,+}}\|u\|_{C[0,T];H_+^2} \le cT^{1/2}\|g\|_{W^2_{\infty,+}}\|u\|_{X_2(\Pi_T^+)} \tag{2.22}$$

и $gu \in L_2(0,T;H_{0,+}^2)$. В итоге получаем, что $F'(u)u_x + gu \in L_2(0,T;H_{0,+}^2)$ для $u \in X_2(\Pi_T^+)$ и, следовательно, в силу Леммы 2.2 отображение Λ определено и, согласно (2.7),

$$\|\Lambda u\|_{X_2(\Pi_T^+)} \le c(T)(\|u_0\|_{H_+^2} + T^{1/10}\Phi(T.\|u\|_{X_2(\Pi_T^+)})), \tag{2.23}$$

для непрерывной и неубывающей по своим аргументам функцией $\Phi(T,\xi) \equiv \Phi_0(T,\xi) + cT^{1/2}\|g\|_{\infty,+}$ для непрерывной и убывающей функции $u, \widetilde{u} \in X_2(\Pi_T^+)$. Заметим, что

$$F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x = (F'(u) - F'(\widetilde{u}))u_x + F'(\widetilde{u})(u_x - \widetilde{u}_x),$$

а тогда для некоторого $\theta \in (0,1)$

$$|F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x| \le |F''((1-\theta)u + \theta\widetilde{u})| \cdot |u_x| \cdot |u - \widetilde{u}| + |F'(\widetilde{u})| \cdot |(u-\widetilde{u})_x|.$$

Аналогично

$$|F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x| \leq |F''((1-\theta)u + \theta\widetilde{u})| \cdot |u_{xxx}| \cdot |u - \widetilde{u}| + |F'(\widetilde{u})| \cdot |(u-\widetilde{u})_{xxx}|.$$

$$|F''(u)u_x u_{xx} - F''(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\widetilde{u}_{xx}| \leq |F''((1-\theta)u + \theta\widetilde{u})| \cdot |u_x u_{xx}| \cdot |u - \widetilde{u}|$$
$$+|F''(\widetilde{u})| \cdot |\widetilde{u}_{xx}| \cdot |(u-\widetilde{u})_{xx}| + |F''(\widetilde{u})| \cdot |\widetilde{u}_x| \cdot |(u-\widetilde{u})_{xx}|,$$

$$|F'''(u)u_x^3 - F'''(\widetilde{u})\widetilde{u}_x^3| \leq |F^{(4)}((1-\theta)u + \theta\widetilde{u})| \cdot |u_x^3| \cdot |u - \widetilde{u}|$$
$$+|F'''(\widetilde{u})| \cdot (u_x^2 + |u_x\widetilde{u}_x| + \widetilde{u}_x^2) \cdot |(u-\widetilde{u})_x|,$$

Тогда

$$\iint_{\Pi_T^+} (F'(u)u_{xxx} - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_{xxx})^2 dxdt$$
$$\leq c\|F''(\theta)\|_{C[|\theta| \leq max(\|u\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)})]} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int_0^T u_{xxx}^2 dt \int \sup_{t\in(0,T)} (u-\widetilde{u})^2 dx$$
$$+c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |\widetilde{u}|^{2p-2} \int \sup_{t\in(0,T)} \widetilde{u}^2 dx \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int_0^T ((u-\widetilde{u})_{xxx})^2 dt,$$

$$\iint_{\Pi_T^+} [(F''(u)u_x u_{xx} - F''(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\widetilde{u}_{xx})^2 + (F'''(u)u_x^3 - F(\widetilde{u})\widetilde{u}_x^3)^2$$
$$+(F'(u)u_x - F'(\widetilde{u}))^2]dxdt$$
$$\leq cT\|F'(\theta)\|^2_{C^3[|\theta| \leq max(\|u\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{C_b(\Pi_T^+)})]} \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} (u_x^6 + \widetilde{u}_x^6 + 1)$$
$$\times[\sup_{t\in(0,T)} \int ((u-\widetilde{u})^2 + (u_x - \widetilde{u}_x)^2 + (u_{xx} - \widetilde{u}_{xx})^2) dx$$
$$+ \sup_{t\in(0,T)} \int (u_{xx}^2 + \widetilde{u}_{xx}^2) dx \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} ((u-\widetilde{u})^2 + (u_x - \widetilde{u}_x)^2)]$$

и, опять используем оценку (2.6), аналогично (2.23)

$$\|\Lambda u - \Lambda\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)} \leq T^{1/10}\Phi_1(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)})\|u - \widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)}, \tag{2.24}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ_1.

Зафиксируем произвольное $T_o > 0$ (например, можно считать, что $T_0 = 1$).

1). Выберем $r > 0$ такое, что

$$r \geq 2c(T_0)\|u_0\|_{H_+^2},$$

где $c(T)$- константа из неравенства (2.23). Теперь выберем $T \in (0; T_0]$ так, чтобы

$$c(T_0)T^{1/10}\Phi(T_0, r) \leq \frac{1}{2}, \quad T^{1/10}\Phi_1(T_0, r, r) \leq \frac{1}{2}.$$

Из неравенств (2.23) и (2.24) следует, что замкнутый шар $\overline{U}_r(0)$ радиуса r с центром в нуле пространства $X_2(\Pi_T^+)$ отображение Λ переводит в себя и является на нем сжимаемым. Единственная неподвижная точка u данного отображения из этого шара является искомым решением.

Для доказательства единственности решения во всем пространстве заметим, что любые два решения u и $\widetilde{u}$ рассматриваемой задачи из пространства $X_2(\Pi_T^+)$ лежат в шаре $\overline{U}_r(0)$ этого пространства радиуса $r = max(\|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)})$, а тогда и в шаре того же радиуса в пространстве $X_2(\Pi_T^+)$ для любого $T' \in (0,T]$. Выберем T' так, чтобы $(T')^{1/10}\Phi_1(T_0,r,r) \leq 1/2$. Тогда функции u и $\widetilde{u}$ является неподвижными точками сжимающего отображения Λ, то есть совпадают в силу единственности такой неподвижной точки. Таким образом, $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x)$ при $t \in [0,T']$. Перенеся точку начала отсчета времени в T' и повторив проведенные рассуждения получим, что $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x)$ при $t \in (0, max(2T',T)]$. Повторив эту процедуру соответствующее конечное число раз, пока, не будет достигнута точка T, получим что $u(t,x) = \widetilde{u}(t,x)$ при $t \in [0,T]$. Таким образом Из неравенств (2.23) и (2.24) получаем результат о существовании единственного решения задачи (1.7), (1.8) из пространства $X_2(\Pi_T^+)$ при достаточно малых Т (зависящих от $\|u_0\|_{H_+^2}$).

Чтобы продолжить это решение на любой отрезок времени, установим соответствующие априорные оценки. Пусть $u \in X_2(\Pi_T^+)$ является решением рассматриваемой задачи для некоторого $T > 0$. Применим равенство (2.12) для $u \equiv v$, $f \equiv (-F'(u)u_x - gu)$,

$$\int u^2(t,x)dx + \int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}d\tau = \int u_0^2dx - 2\iint_{\Pi_t^+} u(F'(u)u_x + gu)dxd\tau,$$

тогда, так как

$$2\int F'(u)u_x u dx = 2\int 2\int (F'(u)u)_x^* dx = (F'(u)u^*)\big|_0^{=\infty} = 0,$$

для любого $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)dx + \int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}d\tau + 2\iint_{\Pi_t^+} gu^2dxd\tau = \int u_0^2dx, \tag{2.25}$$

откуда следует, что поскольку $g \in L_{\infty,+}$

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L(0,T)} \leq c(T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}}). \tag{2.26}$$

Далее в аналогичной ситуации применим равенство (2.13):

$$\int [u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) - 2f^*(u(t,x))]dx + \int_0^t [(u_{xxxx} - bu_{xx})^2 + au_{xx}^2]\big|_{x=0} d\tau$$
$$-2\iint_{\Pi_t^+} F'(u)(u_x u_{xxxx} - bu_x u_{xx})dxd\tau = \int [(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2f^*(u_0)]dx$$
$$+\iint_{\Pi_t^+} (-2(F'(u)u_x + gu)_{xx}u_{xx} - 2b(-F'(u)u_x - gu)u_{xx} + (F'(u)u_x + gu)F(u))dxd\tau.$$

Тогда поскольку

$$\iint_{\Pi_T^+} (F'(u)u_x)_{xx}u_{xx}dxdt = \iint_{\Pi_T^+} F'(u)u_x u_{xxxx}dxdt,$$

$$\int_{\Pi_T^+} F'(u)F(u)u_x dxdt = 0,$$

то получаем, что

$$\int [u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) - 2F^*(u(t,x))]dx + a\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0} d\tau +$$
$$\iint_{\Pi_T^+} [2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} - guF(u)]dxd\tau \le \int [(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2F^*(u_0)]dx. \tag{2.27}$$

Используем неравенство (2.4) для $q = p + 2 < 10$ (тогда $sq < 1$) и $\psi_0 = \psi_1 \equiv 1$ и с учетом оценки (2.27) получаем

$$\int |F^*(u(t,x))|dx \le \varepsilon \int u_{xx}^2 dx + c(\varepsilon, T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_\infty}), \tag{2.28}$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Тогда из неравенства (2.27), с использованием неравенства (2.2) для $\psi \equiv 1$:

$$\int (\varphi')^2 dx \le (\int (\varphi'')^2 dx)^{1/2} (\int \varphi^2 dx)^{1/2},$$

следует, что поскольку $g \in W_{\infty,+}^2$, справедлива оценка

$$\|u\|_{C([0,T];H_+^2)} \le c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}), \tag{2.29}$$

которая и обеспечивает существование решения $u \in X_2(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$.

Для доказательства единственности решения в более широком классе прежде всего заметим, что если $u \in L_\infty(0,T;H_+^2)$, то очевидно, что $F'(u)u_x \in L_1(0,T;L_{2,+})$.

Рассмотрим два решения u и $\widetilde{u}$ из пространства $L_\infty(0,T;H^2_{0,+})$, запишем для $v\equiv u-\widetilde{u}$ неравенство (2.14):

$$\int (u-\widetilde{u})^2(t,x)dx \le \int u_0^2 dx + 2\iint_{\Pi_t^+} f(u-\widetilde{u})dxd\tau,$$

тогда

$$\int v^2(t,x)dx \le 2|\iint_{\Pi_t^+}(F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)vdxd\tau| \le$$

$$2\sup_{|\theta|\le max(\|u\|_{L_\infty(\Pi_T^+)},\|\widetilde{u}\|_{L_\infty(\Pi_T^+)})}|F''(\theta)| ess\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}(|u_x(t,x)|+|\widetilde{u}_x(t,x)|)\iint_{\Pi_t^+} v^2 dxd\tau,$$

что в силу леммы Гронуолла и устанавливает единственность в пространстве $L_\infty(0,T;H^2_{0,+})$. $\square$

Доказательство Теоремы 1.2. Повторим схему доказательства предыдущей теоремы, только отображение Λ будем строить в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$.

$$\|F'(u)u_x\|_{L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})} \le cT\sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}(|u|^{p-1}|u_x|)\sup_{t\in(0,T)}\|u(t,\cdot)\|_{L^\alpha_{2,+}} \le cT\|u\|^{p+1}_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}, \tag{2.30}$$

и аналогично

$$\|F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\|_{L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})} \le T\Phi(T,\|u\|_{X_T^\alpha},\|\widetilde{u}\|_{X_T^\alpha})\|u-\widetilde{u}\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}, \tag{2.31}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ. Кроме того очевидно, что

$$\|gu\|_{L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})} \le T\|g\|_{L_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;L^\alpha_{2,+})}. \tag{2.32}$$

В итоге, из оценок (2.19), (2.24), (2.30)–(2.32) следует существование единственного решения задачи (1.7), (1.8) из пространства $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ при достаточно малых T (зависящих от $\|u_0\|_{H^2_+}$ и $\|u_0\|_{L^\alpha_{2,+}}$).

Далее получим в дополнение к (2.29) оценку решения в весовом пространстве. Для этого применим неравенство (2.16) для $u\equiv v$, $f\equiv -F'(u)u_x - gu$ и $\beta\in(0,\alpha]$:

$$\int u^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+}[5u_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2]dxd\tau$$
$$\le \int u_0^2\rho dx - 2\iint_{\Pi_t^+}(F'(u)u_x + gu)u\rho dxd\tau.$$

Тогда при $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+} [5u_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2]dxd\tau +$$
$$2\iint_{\Pi_t^+} gu^2\rho dxd\tau \le \int u_0^2\rho dx - \iint_{\Pi_t^+} F'(u)uu_x\rho dxd\tau, \tag{2.33}$$

где

$$-\iint_{\Pi_t^+} F'(u)uu_x dxd\tau = \iint_{\Pi_t^+} (F'(u)u)^*\rho' dxd\tau, \tag{2.34}$$

И тогда с учетом уже полученной оценки (2.29)

$$|\iint_{\Pi_t^+} (F'(u)u)^*\rho' dxd\tau| \le c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^p \iint_{\Pi_t^+} u^2\rho' dxd\tau \le c(T, \|u_0\|_{H_+^2},$$
$$\|g\|_{W^2_{\infty,+}}) \iint_{\Pi_t^+} u^2\rho' dxd\tau. \tag{2.35}$$

Применяя неравенство (2.2) для оценки второго интеграла в левой части (2.35), (2.33) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)dx + \iint_{\Pi_t^+} u_{xx}^2\rho' dxd\tau \le \int u_0^2\rho dx + c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W^2_{\infty,+}}) \iint_{\Pi_t^2} u^2\rho dxd\tau. \tag{2.36}$$

Выбирая $\beta = \alpha$, получаем из (2.36)

$$\|u\|_{C([0,T];L^\alpha_{2,+})} \le c(T, \|u_0\|_{L^\alpha_{2,+}}, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W^2_{\infty,+}}). \tag{2.37}$$

Оценки (2.29) и (2.35) позволяют продолжить локальное по времени решение до решения в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$. $\square$

2.4 Убывание решений при больших временах

Установленные оценки (2.26), (2.29) не являются равномерными при $T \to +\infty$. В следующих двух леммах будут установлены аналоги этих оценок, уже не зависящие от T.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.1 и пусть дополнительно известно, что $g(x) > 0$ для любого $x \ge 0$ и для функции g справедливы неравенства (1.10). Тогда для решения задачи (1.7), (1.8) u, принадлежащего пространству $X_2(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$, справедливо неравенство*

$$\|u(t,\cdot)\|_{H_+^2} \le c(\|u_0\|_{H_+^2}, M) \quad \forall t \ge 0. \tag{2.38}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (2.25), тогда в силу неотрицательности функции g получаем, что

$$\|u\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}_+;L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_{2,+}} \le \|u_0\|_{L_{2,+}}. \tag{2.39}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что для любой положительной константы $\overline{c}$

$$\begin{gathered}\int [u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) + \widetilde{c}u^2(t,x) - 2F^*(u(t,x))]dx + (a+\widetilde{c})\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0} d\tau \\ + \iint_{\Pi_t^+} [2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} + \widetilde{c}gu^2 - guF(u)]dxd\tau \\ \le \int [(u_0'')^2 + b(u_0')^2 + \widetilde{c}u_0^2 - 2F^*(u_0)]dx.\end{gathered} \tag{2.40}$$

Из неравенств (1.11) и (2.2) находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$|\int 2(2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx}dx| \le \varepsilon \int gu_{xx}^2 dx + c(\varepsilon, M)\int gu^2 dx. \tag{2.41}$$

Далее, положим $q = p+2$, $s = (q-2)/8q$, $\psi_0 \equiv g$, $\psi_1 \equiv g^{(10-q)/(3q+2)}$ (очевидно, что эти функции удовлетворяют условиям Леммы 2.1). Нетрудно видеть, что

$$\frac{q}{2} - qs = \frac{3q+2}{8}, \quad qs + \frac{10-q}{3q+2}\cdot\frac{3q+2}{8} = 1.$$

Тогда применяя неравенство (2.4), находим, что

$$\begin{gathered}|\int guF(u)dx| \le c\int g|u|^q dx = c\|u\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\|_{L_{q,+}}^q \le \\ c(M)[\|(|u_{xx}|+|u|)\psi_0^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2qs}\|u\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{q-2qs} + \|u\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\|_{L_{2,+}}^{q-2}\|u\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^2] \\ = c_1(M)[(\int (u_{xx}^2+u^2)\psi_0^2 dx)^{\frac{q-2}{8}}(\int u^2\psi_1 dx)^{\frac{3q+2}{8}} + (\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx)^{\frac{q-2}{2}}] \le \int u^2\psi_1 dx.\end{gathered} \tag{2.42}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\int u^2 g^{(10-q)/(3q+2)}dx = \int (gu^2)^{(10-q)/(3q+2)}\cdot u^{2(4q-8)/(3q+2)}dx \\ \le (\int gu^2dx)^{(10-q)/(3q+2)}(\int u^2 dx)^{(4q-8)/(3q+2)}.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}(\int (u_{xx}^2+u^2)\psi_0 dx)^{(q-2)/8}(\int u^2\psi_1 dx)^{(3q+2)/8} \\ \le (\int g(u_{xx}^2+u^2)\psi_0 dx)^{(q-2)/8}(\int gu^2 dx)^{(10-q)/8}(\int u^2)^{(q-2)/2}.\end{gathered}$$

Кроме того,

$$(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1 dx = (\int u^2 g^{8/(3q+2)}dx)^{(q-2)/2}\int u^2 g^{(10-q)/(3q+2)}dx,$$

так как

$$\frac{8}{3q+2}+\frac{3(q-2)}{3q+2}=1,$$

где

$$\int u^2 g^{8/(3q+2)}dx = \int (gu^2)^{8/(3q+2)}\cdot u^{6(q-2)/(3q+2)}dx \le (\int gu^2dx)^{8/(3q+2)}(\int u^2dx)^{3(q-2)/(3q+2)},$$

и, таким образом, так как

$$\frac{8}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2}+\frac{10-q}{3q+2}=1,\quad \frac{3(q-2)}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2}+\frac{4(q-2)}{3q+2}=\frac{q-2}{2},$$

находим, что

$$(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}dx)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1 dx \le (\int gu^2dx)\cdot(\int u^2dx)^{(q-2)/2}.$$

В итоге, с учетом уже полученной оценки (2.39) выводим, что так как $(q-2)/8<1$

$$|\int guF(u)dx| \le \varepsilon\int gu_{xx}^2dx + c(\varepsilon,\|u_0\|_{L_{2,+}},M)\int gu^2dx, \tag{2.43}$$

где $\varepsilon>0$ можно выбрать сколь угодно малым.

Таким образом, если выбрать $\widetilde{c}$ достаточно большим (зависящим M, b, $\|u_0\|_{L_{2,+}}$), то из неравенства (2.40) следует, что равномерно по t.

$$\int [u_{xx}^2(t,x)+\widetilde{c}u^2(t,x)-4F^*(u(t,x))]dx \le c. \tag{2.44}$$

Заметим, что применяя вместо (2.26) оценку (2.39), полностью аналогично (2.28) находим, что равномерно по t

$$\int |F^*(u(t,x))|dx \le \varepsilon\int u_{xx}^2dx + c(\varepsilon,\|u_0\|_{L_{2,+}}). \tag{2.45}$$

Тогда из неравенств (2.44), (2.45) следует утверждение леммы. □

□

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия Теоремы 1.3. Тогда для решения задачи (1.7), (1.8) $u(t,x)$, принадлежащего пространству $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ $\forall T>0$, существует $\beta\in(0,\alpha]$ такое что*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}^\beta} \le \|u_0\|_{L_{2,+}^\beta}\quad \forall t\ge 0. \tag{2.46}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (2.33) и равенством (2.34). Применяя вместо оценки (2.29) оценку (2.38), находим аналогично (2.35), что для любого $t > 0$

$$|\iint_{\Pi_t^+}(F'(u)u)^*\rho' dxd\tau| \le c \sup_{t>0,x>0}|u|^p \iint_{\Pi_t^+} u^2\rho' dxd\tau \le c(\|u_0\|_{H_+^2}, M)\iint_{\Pi_t^+} u^2\rho' dxd\tau. \tag{2.47}$$

Далее будем считать без ограничения общности, что $\beta \in (0, 1/2]$. Напомним, что

$$\rho(x) = (1+x)^{2\beta},$$

$$\rho'(x) = 2\beta(1+x)^{2\beta-1},$$
$$\rho''(x) = 2\beta(2\beta-1)(1+x)^{2\beta-2},$$
$$\rho'''(x) = 2\beta(2\beta-1)(2\beta-2)(1+x)^{2\beta-3},$$
$$\rho^{(4)}(x) = 2\beta(2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3)(1+x)^{2\beta-4},$$
$$\rho^{(5)}(x) = 2\beta(2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3)(2\beta-4)(1+x)^{2\beta-5}.$$

Заметим, что так как

$$\beta \ge 0, (2\beta-1) \le 0, (2\beta-2) \le 0, (2\beta-3) \le 0, (2\beta-4) \le 0,$$

Тогда, в частности, $|\rho''(x)| \le \rho'(x)$, $0 \le \rho'''(x) \le 2\rho'(x)$, $\rho^{(5)} \ge 0$.

Применяя неравенство (2.2), находим, что

$$\int[(3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2]dx \ge -\int u_{xx}^2\rho' dx - c(a,b)\int u^2\rho' dx. \tag{2.48}$$

В силу (1.10)

$$2g(x)\rho(x) \ge 2c_0\rho'(x)/(2\beta),$$

из неравенств (2.33), (2.47), (2.48) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)dx + (\frac{2c_0}{2\beta} - c(a,b) - c(\|u_0\|_{H_+^2}, M))\iint_{\Pi_t^+} u^2\rho' dxd\tau \le \int u_0^2\rho dx,$$

что при достаточно малых $\beta > 0$ приводит к неравенству (2.46). □

Для любых положительных β, L и ε через $\mathfrak{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ обозначим множеством функций $\varphi \in H_{0,+}^2 \cap L_{2,+}^\beta$ таких, что

$$\|\varphi\|_{H_+^2} + \|\varphi\|_{L_{2,+}^\beta} \le L, \quad \|\varphi\|_{L_{2,+}} \ge \varepsilon.$$

Лемма 2.6. *Пусть $g \in W^2_{\infty,+}$ – неотрицательная функция такая, что $g(x) \geq g_0 > 0$ для $x \in I$, где I-непустой интервал на $\mathbb{R}_+$, а для функции F выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда для любого $T > 0$ и любого класса $\mathfrak{F}^{\beta,L,\varepsilon}_+$ существует константа $c = c(T, \beta, L, \varepsilon)$ такая, что если $u_0 \in \mathfrak{F}^{\beta,L,\varepsilon}_+$, то для соответствующего решения задачи (1.7), (1.8) $u(t,x)$ из пространства $X^\beta_2(\Pi^+_T)$ $\forall T > 0$ справедливо неравенство*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+/I} u^2(t,x)dxdt \leq c \iint_{\Pi^+_T} g(x)u^2(t,x)dxdt. \tag{2.49}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (2.49) не выполнено. Пусть $\{u_{0k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ $\mathfrak{F}^{\beta,L,\varepsilon}_+$, такая последовательность начальных функций, что для соответствующих решений $\{u_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \in X^\beta_2(\Pi^+_T)$ справедливо свойство

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{\Pi^+_T} g(x)u_k^2(t,x)dxdt(\int_0^T \int_{\mathbb{R}_+/I} u_k^2(t,x)dxdt)^{-1} = 0.$$

В частности, из ограниченности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_\infty(0,T; L_{2,+})$ (см. оценку (2.26)) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{\Pi^+_T} g(x)u_k^2(t,x)dxdt = 0, \tag{2.50}$$

Следовательно, в силу условий на функцию $g(x)$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_I u_k^2(t,x)dxdt = 0. \tag{2.51}$$

Так как последовательность $\{u_{0k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в пространстве $H^2_{0,+} \cap L^\beta_{2,+}$ из Теоремы 1.2 следует, что равномерно по k

$$\|u_k\|_{X^\beta_2(\Pi^+_T)} \leq c. \tag{2.52}$$

Согласно уравнению (1.7)

$$u_{kt} = u_{kxxxxx} - bu_{kxxx} - au_{kx} - F'(u_k)u_{k,x} - gu_k.$$

Из оценки (2.48), в частности, следует, что равномерно по k

$$\|u_k\|_{C_b(\overline{\Pi}^+_T)} \leq c$$

и для любого $r > 0$ равномерно по k

$$\|u_k\|_{L_2(0,T;H^4(0,r))} \leq c(r).$$

Тогда для любого $r > 0$ равномерно по k

$$\|u_{kt}\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,r))} \leq c(r).$$

Положим $B_0 = H^4(0,r), B = H^3(0,r), B_1 = H^{-1}$. Заметим, что $B_0 \in B \in B_1$, причем вложение B_0 и B компактно. Тогда поскольку множество производных $\{u_k\}$ ограничено в пространстве $L_2(0,T;B_0)$, а множество производных $\{u_{kt}\}$ ограничено в пространстве $L_2(0,T;B_1)$, то множество $\{u_k\}$ предкомпактно в пространстве $L_2(0,T;B)$ (см., например, [40] (Часть 8, Следствие 4)). Переходя к подпоследовательности (с сохранением обозначений) получаем, что

$$\|u_{kt}\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,r))} \leq c(r). \tag{2.53}$$

Переходя к подпоследовательности (с сохранением обозначений), стандартным рассуждением получаем, что

$$\begin{aligned}
&u_{0k} \to u_0 \text{ слабо в } H^2_{0,+} \text{ и } L^\beta_{2,+},\\
&u_k \to u \ *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H^2_{0,+}) \text{ и } L_\infty(0,T;L^\beta_{2,+}),\\
&u_k \to u \text{ слабо в } L_2(0,T;H^4(0,r)) \ \forall r > 0,\\
&u_k \to u \text{ сильно в } L_2(0,T;H^3(0,r)) \ \forall r > 0.
\end{aligned}$$

Из последнего свойства в сочетании с (2.51) следует, что

$$u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T), x \in I. \tag{2.54}$$

Пусть $\phi(t,x)$- произвольная функция такая, что $\phi \in L_2(0,T;H^5_+)$, $\phi_t \in L_2(\Pi^+_T)$, $\phi\big|_{t=T} = 0$, $\phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} = 0$. Положим $\phi_r(t,x) \equiv \phi(t,x)\eta(r-x)$ для $r > 0$. Тогда для любого k в силу равенства (2.3)

$$\iint_{\Pi^+_T} (u_k(\phi_{rt} - \phi_{rxxxxx} + b\phi_{rxxx} + a\phi_{rx} - g(x)\phi_r) + F(u_k)\phi_{rx})dxdt + \int u_{0k}\phi_r\big|_{t=0}dx = 0. \tag{2.55}$$

Заметим, что при $k \to +\infty$ в силу неравенства (1.9)

$$\begin{aligned}
\iint_{\Pi^+_T} |F(u_k) - F(u)| \cdot |\phi_{rx}|dxdt &\leq c \sup_{k\in\mathbb{N}} ess \sup_{(t,x)\in\Pi^+_T} |u_k(t,x)|^p \iint_{\Pi^+_T} |u_k - u| \cdot |\phi_{rx}|dxdt\\
&\leq c_1 \sup_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\|^p_{L_\infty(0,T;H^2_+)} \|u_k - u\|_{L_2((0,T)\times(0,r))} \|\phi\|_{L_2(0,T;H^1_+)} \to 0.
\end{aligned}$$

Поэтому переходя к пределу сначала при $k \to +\infty$ (и принимая во внимание (2.50)),

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\Pi^+_T} |F(u_k) - F(u)| \cdot |\phi_{rx}|dxdt = 0.$$

а потом при $r \to +\infty$, получаем равенство

$$\iint_{\Pi^+_T} (u(\phi_t - \phi_{xxxxx} + b\phi_{xxx} + a\phi_x) + F(u)\phi_x)dxdt + \int u_0\phi\big|_{t=0}dx = 0, \tag{2.56}$$

а это означает, что функция $u(t,x)$ является слабым решением в смысле Определения 2.1 задачи (1.7), (1.8) при $g \equiv 0$.

Заметим, что так как $u \in L_\infty(0,T;H^2_{0.+})$, то u лежит в классе единственности, поэтому, согласно Теореме 1.2 $u \in X^\beta_2(\Pi^+_T)$. В частности, u, $u_x \in L_\infty(\Pi^+_T)$, $u \in L_2(0,T;H^4(0,r))$ для любого $r>0$. Следовательно, можно применить результаты [[10], Теорема 1] о единственности продолжение слабых решений уравнения (1.7). Согласно этим результатам из свойства (2.54) следует, что

$$u(t,x) = 0 \quad (t,x) \in \Pi^+_T. \tag{2.57}$$

В частности,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_0^r u_k^2(t,x)dxdt = 0 \quad \forall r > 1. \tag{2.58}$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{\Pi^+_T} u_k^2(t,x)dxdt = 0. \tag{2.59}$$

Действительно,

$$\iint_{\Pi^+_T} u_k^2 dxdt = \int_0^T \int_0^r u_k^2 dxdt + \int_0^T \int_0^{+\infty} u_k^2 dxdt,$$

где равномерно по k в соответствии с (2.52)

$$\begin{aligned} ess \sup_{t\in(0,T)} \int_r^{+\infty} u_k^2 dx \le ess \sup_{t\in(0,T)} \int_2^{+\infty} (1+x)^{2\beta} u_k^2 dx 2(1+x) \\ \le \|u_k\|_{L_\infty(0,T;L^\beta_{2,+})} \le cr^{-2\beta}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Очевидно, что свойство (2.59) следует из (2.58) и (2.60).

С другой стороны, поскольку согласно (2.25)

$$\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \le \|u_{0k}\|_{L_{2,+}}, \tag{2.61}$$

то

$$\begin{aligned} \int (u_k(t,x) - u_{0k}(x))^2 dx = \int (u_k^2(t,x) - 2u_k(t,x)u_{0k}(x) + u_{0k}^2(x))dx \\ \le 2\int (u_{0k}^2 - u_k(t,x)u_{0k}(x))dx = 2\int (u_{0k}(x) - u_k(t,x))u_{0k}(x)dx \\ = 2\int (u_{0k}(x) - u_k(t,x))u_{0k}(x)\eta(r+1-x)dx + 2\int (u_{0k}(x) - u_k(t,x))du_{0k}(x)\eta(x-r)dx, \end{aligned} \tag{2.62}$$

где, в силу (2.60),

$$2|\int(u_{0k}(x)-u_k(t,x))u_{0k}(x)\eta(x-r)dx|\le 2(\|u_k\|_{L_{2,+}}+\|u_{0k}\|_{L_{2,+}})\|u_{0k}\|_{L_2(r,+\infty)}$$
$$\le 4\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}(\int_r^{+\infty}x^{2\beta}u_{0k}^2dx)^{1/2}r^{-\beta}\le\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}\|u_{0k}\|_{L_{2+}^{\beta}}r^{-\beta}\le 4r^{-\beta}L^2. \tag{2.63}$$

Далее, в соответствии с (2.53)

$$2|\int(u_{0k}(x)-u_k(t,x))u_{0k}(x)\eta(r+1-x)dx|$$
$$\le 2\int_0^t\|u_{k\tau}(\tau,\cdot)\|_{H^{-1}(0,r+1)}d\tau\|u_{0k}\|_{H_+^1}\le c(r,L)t^{1/2}. \tag{2.64}$$

Из неравенств (2.62)-(2.64) следует, что

$$\|u_k(t,\cdot)-u_{0k}\|^2_{L_{2,+}}\le 4r^{-\beta}L^2+c(r,L)t^{1/2}. \tag{2.65}$$

Выберем r так, чтобы $4r^{-\beta}L^2\le\varepsilon^2/4$ и $t_0\in(0,T]$ так, чтобы $c(r,L)t_0^{1/2}\le\varepsilon^2/4$. Тогда из неравенства (2.65) находим, что для $t\in[0,t_0]$ справедливо неравенство

$$\|u_k(t,\cdot)\|^2_{L_{2,+}}\ge\|u_{0k}\|^2_{L_{2,+}}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ge\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{2.66}$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+}u_k^2(t,x)dxdt\ge t_0\frac{\varepsilon^2}{2},$$

что противоречит (2.59). □

Доказательство Теоремы 1.2. Предположим, что свойство (1.12) не справедливо. Это означает, что $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}\ge\varepsilon$ $\forall t\ge 0$ для некоторого $\varepsilon>0$. Из Лемм 2.4 и 2.5 следует, что

$$u(t,\cdot)\in\mathfrak{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}\quad\forall t\ge 0 \tag{2.67}$$

для некоторых $L>0$ и $\beta\in(0,\alpha]$.

Зафиксируем произвольные $T>0$ и $r>0$. Пусть $I=(0,r)$, тогда $g(x)\ge g_0=c_0(1+r)^{-1}$ для любого $x\in I$. Из равенства (2.25) следует, что

$$\int u^2(T,x)dx+2g_0\int_0^T\int_0^r u^2dxd\tau\le\int u_0^2dx$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+}u^2dxdt=\int_0^T\int_0^R u^2dxdt+\int_0^T\int_2^\infty u^2dxdt$$
$$\le\frac{1}{2g_0}\int u_0^2dx-\frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)dx+\int_0^T\int_r^{+\infty}u^2dxdt.$$

Применяя (2.49) выводим из последнего неравенства, что

$$\iint_{\Pi_T^+} u^2 dxdt \le \frac{1}{2g_0}\int u_0^2 dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)dx + c\iint_{\Pi_T^+} g(x)u^2 dxdt.$$

Снова применим равенство (2.25) (из которого, в частности, следует невозрастание функции $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$), тогда

$$T\int u^2 dxdt \le \iint_{\Pi_T^+} u^2 dx \le \frac{1}{2g_0}\int u_0^2 dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)dx$$
$$+\frac{c}{2}(\int u_0^2 dx - \int u^2(T,x)dx).$$

В итоге получаем неравенство

$$(T+\frac{1}{2g_0}+\frac{c}{2})\int u^2(T,x)dx \le (\frac{1}{2g_0}+\frac{c}{2})\int u_0^2 ds,$$

которое эквивалентно следующему неравенству:

$$\|u(T,\cdot)\|_{L_{2,+}}\gamma\|u_0\|_{L_{2,+}},$$

где

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2g_0}+\frac{c}{2}}{T+\frac{1}{2g_0}+\frac{c}{2}} = \gamma(T,r,L,\beta,\varepsilon) \in (0,1).$$

Тогда для любого натурального n в силу (2.67) перенося последовательно начало отсчета времени в точки jT, $j=1...,n+1$

$$\|u(nT,\cdot)\|_{L_{2,+}} \le \gamma^n\|u_0\|_{L_{2,+}}$$

что противоречит (2.67). $\square$

3 Глава 2

3.1 О разрешимости начально-краевой задачи

В этой главе будут приведены некоторые результаты о разрешимости начально-краевой задачи для линеаризованного уравнения Кавахары.

Введем понятие слабого решения задачи (1.13)-(1.15).

Определение 3.1. *Пусть* $u_0 \in L_2(0,R)$, $\mu,\nu,h,\theta,\sigma \in L_2(0,T)$, $f \equiv f_1 + f_{2x}$, *где* $f_1, f_2 \in L_1(0,T;L_2(0,R))$. *Функция* $u \in L_\infty(0,T;L_2(0,R))$ *называется слабым решением задачи (1.13)–(1.15), если для любой функции* $\phi \in L_2(0,T;H^5(0,R))$ *такой, что* $\phi_t \in L_2(Q_T)$, $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi\big|_{x=R} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=R} = \phi_{xx}\big|_{x=0} \equiv 0$, *функция* $F(u(t,x))\phi_x \in L_1(Q_T)$ *и выполнено равенство*

$$\begin{gathered}
\iint_{Q_T} (u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - a_4 u\phi_{xxxx} + a_3 u\phi_{xxx} - a_2 u\phi_{xx} + a_1 u\phi_x - a_0 u\phi \\
+ F(u)\phi_x + f_1\phi - f_2\phi_x)dxdt + \int_0^R u_0\phi\big|_{t=0}dx \\
+ \int_0^T (\sigma\phi_{xx}\big|_{x=R} - h\phi_{xxx}\big|_{x=R} + \theta\phi_{xxx}\big|_{x=0} + \nu\phi_{xxxx}\big|_{x=R} - \mu\phi_{xxxx}\big|_{x=0} \\
- a_4 h\phi_{xx}\big|_{x=R} + a_4\mu\phi_{xxx}\big|_{x=R} - a_4\nu\phi_{xxx}\big|_{x=0} + a_3\nu\phi_{xx}\big|_{x=R})dt = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

В этом разделе мы будем считать $F(u) \equiv 0$, то есть мы будем рассматривать уравнение:

$$u_t - u_{xxxxx} + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j u = f(t,x), \tag{3.2}$$

Теперь приведем основные результаты этого раздела.

Обозначим решение задачи (1.13)–(1.15) при $F(u) \equiv 0$ следующим образом: $u = S(u_0,\mu,\nu,\theta,h,\sigma,f_1,f_2)$. Пусть $W = (u_0,\mu,\nu,\theta,h)$ и введем следующее обозначение для оператора S:

$$\begin{gathered}
S_0 W = S(u_0,\mu,\nu,\theta,h,0,0,0), \quad S_0 : L_2(0,R)\times(H^{2/5})^2\times(H^{1/5})^2 \to X(Q_T), \\
S_1 f_1 = S(0,0,0,0,0,0,f_1,0), \quad S_1 : L_1(0,T;L_2(0,R)) \to X(Q_T), \\
S_2 f_2 = S(0,0,0,0,0,0,0,f_2), \quad S_2 : L_{4/3}(0,T;L_2(0,R)) \to X(Q_T), \\
S_3\sigma = S(0,0,0,0,0,\sigma,0,0), \quad S_3 : L_2(0,T) \to X(Q_T),
\end{gathered}$$

где $f = f_1 + f_{2x}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $F(u) \equiv 0$, $u_0 \in L_2(0,R)$, $\mu,\nu \in H^{2/5}(0,T)$, $h,\theta \in H^{1/5}(0,T)$, $\sigma \in L_2(0,T)$, $f_1 \in L_1(0,T;L_2(0,R))$, $f_2 \in L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))$, *условия (1.21) выполнены, тогда существует единственное решение* $u \in X(Q_T)$ *задачи (1.13)–(1.15). Кроме того, оператор* $S : (u_0,\mu,\nu,\theta,h,\sigma,f_1,f_2) \to u$ *непрерывен в соответствующих нормах и норма этого оператора не убывает с ростом* T.

Доказательство. Оператор S может быть представлен как сумма операторов S_0 S_1, S_2, S_3. Этот результат уже был доказан ранее в работе [37] для всех операторов кроме S_1 и S_2.

Рассмотрим $u = S_1 f_1 + S_2 f_2$. Если $f_1, f_2 \in C_0^\infty(Q_T)$, тогда существует гладкое решение $u \in C^\infty(\overline{Q}_T)$ задачи (1.13)–(1.15) ([37]).

Умножим (3.2) на $2(1+x)u$ и проинтегрируем:

$$\int_0^R 2uu_t(1+x)dx = \int_0^R (u^2)_t(1+x)dx = \frac{d}{dt}\int_0^R u^2(1+x)dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^R 2uu_{xxxxx}(1+x)dx &= [(2u_{xxxx}u - 2u_x u_{xx})(1+x) \\ &+u_{xx}^2 + 2u_x u_{xx} - 2uu_{xx}]\Big|_{x=0}^{x=R} - 5\int_0^R u_{xx}^2 dx \\ &= -u_{xx}^2\big|_{x=0} - 5\int_0^R u_{xx}^2 dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^R 2u_{xxxx}u(1+x)dx &= [(2u_{xxx}u - 2u_{xx}u_x)(1+x) \\ &-2u_{xx}u + u_x^2]\Big|_{x=0}^{x=R} + \int_0^R 2u_{xx}^2(1+x)dx \\ &= \int_0^R 2u_{xx}^2(1+x)dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^R 2u_{xxx}u(1+x) &= [2u_{xx}u(1+x) - u_x^2(1+x)]\Big|_{x=0}^{x=R} + 3\int_0^R u_x^2 dx \\ &= 3\int_0^R u_x^2 dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^R uu_{xx}(1+x)dx &= [2(x+1)uu_x]\Big|_{x=0}^{x=R} - \int_0^R 2(x+1)u_x^2 dx - \int (u^2)_x dx \\ &= -\int_0^R 2(x+1)u_x^2 dx,\end{aligned}$$

$$\int_0^R u_x u(1+x)dx = u^2(1+x)\Big|_{x=0}^{x=R} - \int_0^R u^2 dx = -\int_0^R u^2 dx,$$

$$\int_0^R 2uf(1+x)dx = 2\int_0^R f_1(1+x)udx - 2\int_0^R f_2((1+x)u)_x dx,$$

в итоге получим:

$$\frac{d}{dt}\int_0^R (1+x)u^2dx + \int_0^R [5u_{xx}^2 + 2a_4(1+x)u_{xx}^2 + 3a_3u_x^2 - 2a_2(1+x)u_x^2$$
$$-a_1u^2 + 2a_0(1+x)u^2]dx + u_{xx}^2|_{x=0} \tag{3.3}$$
$$= 2\int_0^R f_1(1+x)udx - 2\int_0^R f_2((1+x)u)_xdx.$$

Используя неравенство Гёльдера получим интерполяционное неравенство для некоторой гладкой функции Y, которая равна нулю на границах некоторого интервала I:

$$|\int_I Y'^2dx| = |YY'\big|_I| + |\int_I YY''dx| \le \int_I [\frac{\varepsilon Y^2}{2} + \frac{2Y^{2''}}{\varepsilon}]dx,$$

в итоге, для произвольно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\int_I Y'^2dx \int | \le \varepsilon \int_I (Y'')^2dx + c(\varepsilon^{-1})\int_I Y^2dx, \tag{3.4}$$

Используя (3.4) оцениваем следующие слагаемые в (3.3):

$$\int_0^R [5u_{xx}^2 - a_1u^2 + 2a_0(1+x)u^2]dx + 3a_3\int_0^R {u_x}^2dx$$
$$\ge \int_0^R {u_{xx}}^2dx - c_1\int_0^R u^2(1+x)dx,$$

где мы выбрали ε так, чтобы:

$$c_1 = 3\frac{a_3^2}{2} + |a_1| + 2|a_0|(1+R),$$

и с учетом, что $a_2 \le 0$, $a_4 \ge 0$ получаем, что

$$\int_0^R 2a_4(1+x)u_{xx}^2 \ge 0,$$

$$-\int_0^R 2a_2(1+x)u_x^2dx \ge 0,$$
$$u_{xx}^2\big|_{x=0} \ge 0,$$

В итоге:

$$\frac{d}{dt}\int_0^R (1+x)u^2dx + \int_0^R u_{xx}^2dx$$
$$\le c_1\int_0^R (1+x)u^2dx + c_2(\int_0^R (1+x)u^2dx)^{1/2}(\int_0^R f_1^2dx)^{1/2} \tag{3.5}$$
$$+c_3(\int_0^R (1+x)u^2dx)^{1/3}(\int_0^R f_2^2dx)^{2/3} + c_4(\int_0^R (1+x)u^2)^{1/2}(\int_0^R f_2^2dx)^{1/2},$$

где c_i- положительные константы. Из неравенства (3.5) следует, что

$$\|u\|_{X(Q_T)} \leq c(T)\big(\|f_1\|_{L_1(0,T;L_2(0,R))} + \|f_2\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))}\big), \tag{3.6}$$

где константа $c(T)$ не убывает с ростом T.

В общем случае результат теоремы получается за счет замыкания с использованием оценки (3.6). □

Пусть $\widetilde{W}_p^1(0,T) = \{\varphi \in W_p^1(0,T) : \varphi(0) = 0\}$ для $1 \leq p \leq +\infty$. В пространстве функций $u(t,x)$, которые принадлежат $L_1(0,R)$ $\forall t \in [0,T]$, введем линейный оператор Q по формуле $(Qu)(t) = b(t)$, где

$$b(t) \equiv \int_0^R u(t,x)\omega(x)dx, \quad t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Пусть условие Теоремы 3.1 выполнено. Кроме того, пусть* $\mu, \nu, \theta, h, \sigma \in L_q(0,T)$, $f_1, f_2 \in L_q(0,T;L_1(0,R))$ *для некоторого* $q \in [1,+\infty]$. *Если*

$$u = S(u_0, \mu, \nu, \theta, h, \sigma, f_1, f_2)$$

и условия (1.20) и (1.21) выполнены, тогда, соответствующая функция $b = Qu$ *принадлежит пространству* $W_q^1(0,T)$. *К тому же,* $\forall t \in (0,T)$ *имеет место следующее тождество:*

$$\begin{gathered} b'(t) = \int_0^R (-u\omega'''''(x) - a_4 u\omega''''(x) + a_3 u\omega'''(x) - a_2 u\omega''(x) \\ +a_1 u\omega'(x) - a_0 u\omega(x)) + (f_1\omega(x) - f_2\omega'(x))dx \\ +(\sigma(t)\omega''(R) - h(t)\omega'''(R) + \theta(t)\omega'''(0) + \nu(t)\omega''''(R) - \mu(t)\omega''''(0) \\ -a_4 h(t)\omega''(R) + a_4\mu(t)\omega'''(R) - a_4\nu(t)\omega'''(0) + a_3\nu(t)(t)\omega''(R)) \end{gathered} \tag{3.8}$$

и, дополнительно,

$$\begin{gathered} \|b'\|_{L_q(0,T)} \leq c(T)\Big[\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|\sigma\|_{L_2(0,T)} + \|f_1\|_{L_1(0,T;L_2(0,R))} + \|f_2\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} + \|\mu\|_{L_q(0,T)} + \|\nu\|_{L_q(0,T)} \\ +\|\theta\|_{L_p(0,T)} + \|h\|_{L_q(0,T)} + \|\sigma\|_{L_q(0,T)} + \|f_1\|_{L_q(0,T;L_1(0,R))} + \|f_2\|_{L_q(0,T;L_1(0,R))}\Big]. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $\phi(t,x) \equiv \psi(t)\omega(x)$, $\psi \in C_0^\infty(0,T)$, тогда функция ϕ удовлетворяет условию определения слабого решения. Из равенства (3.1) следует, что

$$\int_0^T \psi'(t)b(t)dt = -\int_0^T \psi(t)\Big[\int_0^R (-u\omega'''''(x) - a_4u\omega''''(x) + a_3u\omega'''(x) - a_2u\omega''(x)$$
$$+a_1u\omega'(x) - a_0u\omega(x)) + (f_1\omega(x) - f_2\omega'(x))dx$$
$$+(\sigma(t)\omega''(R) - h(t)\omega'''(R) + \theta(t)\omega'''(0) + \nu(t)\omega''''(R) - \mu(t)\omega''''(0)$$
$$-a_4h(t)\omega''(R) + a_4\mu(t)\omega'''(R) - a_4\nu(t)\omega'''(0) + a_3\nu(t)(t)\omega''(R))\Big]dt$$
$$\equiv -\int_0^T \psi(t)r(t)dt. \tag{3.10}$$

Рассмотрим первый интеграл из $r(t)$:

$$\int_0^R |u\omega'''''(x)|dx \leq (\int_0^R u^2dx)^{1/2}(\int_0^R \omega'''''^2dx)^{1/2} \leq (\int u^2dx)^{1/2}\|\omega'''''\|_{L_2(0,R)}$$
$$\leq (\int u^2dx)^{1/2}\|\omega\|_{H^5(0,R)} \leq c\|u\|_{L_2(0,R)}.$$

Имеет место следующее неравенство

$$\|u\|_{L_q(0,T;L_2(0,R))} \leq T^{1/q}\|u\|_{C([0,T];L_2(0,R))}.$$

Оцениваем по аналогии остальные интегралы и получаем, что $r \in L_q(0,T)$, и тогда в силу определения из последнего равенства следует существование обобщенной Соболевской производной $b'(t) = r(t) \in L_q(0,T)$.

Далее, применяя Теорему 3.1 мы получаем искомый результат. □

3.2 Управляемость краевой функцией.

Без ограничения общности в этом пункте будем предполагать, что $\omega''(R) = 1$, чего легко можно достичь за счет масштабирования функций ω и φ.

Лемма 3.2. *Пусть условия (1.20) и (1.21) выполнены, $\omega''(R) = 1$ и $\varphi \in \widetilde{W}_2^1(0,T)$, тогда существует единственная функция $\sigma = \Gamma\varphi \in L_2(0,T)$, для которой соответствующей функция $u = S_3\sigma$ удовлетворяет условию (1.17), линейный оператор $\Gamma : \widetilde{W}_2^1(0,T) \to L_2(0,T)$ ограничен и его норма не убывает с ростом T.*

Доказательство. Введем линейный оператор $\Lambda = Q \circ S_3$ на пространстве $L_2(0,T)$. Согласно Лемме 3.1 и непрерывности оператора $S_3 : L_2(0,T) \to X(Q_T)$, оператор $\Lambda : L_2(0,T) \to \widetilde{W}_2^1(0,T)$ ограничен.

Из тождества $\varphi = \Lambda\sigma$ при $\sigma \in L_2(0,T)$ следует, что функция σ даёт искомое решение рассматриваемой задачи управляемости. Введем оператор $A : L_2(0,T) \to$

$L_2(0,T)$:

$$(A\sigma)(t) = \varphi'(t) - \int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^4 a_j\omega^{(5)})dx, \quad u = S_3\sigma. \tag{3.11}$$

Далее, покажем, что $\varphi = \Lambda\sigma$ тогда и только тогда, когда $\sigma = A\sigma$. Если $\varphi = \Lambda\sigma$, справедливо тождество $b'(t) = \varphi'(t)$ для функции $b(t) = (\Lambda\sigma)(t)$, в силу равенства (3.8) мы получаем

$$(A\sigma)(t) = b'(t) - \int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^4 a_j\omega^{(5)})dx = \sigma(t). \tag{3.12}$$

И обратно, если $\sigma = A\sigma$, то

$$\sigma(t) = \varphi'(t) - \int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^4 a_j\omega^{(5)})dx. \tag{3.13}$$

В силу равенства (3.8 тождество $b'(t) = \varphi'(t)$ справедливо для функции $b(t) = (\Lambda\sigma)(t)$. Заметим, что $b(t) = \varphi(t)$ потому что $b(0) = \varphi(0) = 0$

Далее, покажем, что оператор A является сжимающим при выборе в пространстве $L_2(0,T)$ некоторой эквивалентной нормы.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in L_2(0,T), u_j = S_3\sigma_j$, тогда,

$$A\sigma_1 - A\sigma_2 = -\int_0^R (u_1 - u_2)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^4 a_j\omega^{(5)})dx. \tag{3.14}$$

В силу Теоремы 3.1 когда $t \in [0,T]$ имеет место следующее неравенство

$$\|u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)\|_{L_2(0,R)} \le c(T)\|\sigma_1 - \sigma_2\|_{L_2(0,t)}. \tag{3.15}$$

Пусть $\varrho > 0$, тогда, мы получим

$$\begin{gathered}\|e^{-\eta t}(A\sigma_1 - A\sigma_2)\|_{L_2(0,T)} \\ \le (\|\omega'''''\|_{L_2(0,R))} + \sum_{j=0}^4 |a_j|\|\omega^{(5)}\|_{L_2(0,R)}) \times (\int_0^T e^{-2\varrho t}\|u_1 - u_2\|^2_{L_2(0,R)}dt)^{1/2} \\ \le c\big[(\int_0^T e^{-2\varrho t}(\int_0^t (\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau))^2 d\tau)dt\big]^{1/2} \\ = c\big[(\int_0^T e^{-2\varrho\tau} \mid \sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau) \mid^2 \int_\tau^T e^{2\varrho(\tau - t)}dtd\tau\big]^{1/2} \\ \le \frac{c}{\sqrt{2}\varrho^{1/2}}\|e^{-\varrho\tau}(\sigma_1(\tau) - \sigma_2(\tau))\|_{L_2(0,T)},\end{gathered} \tag{3.16}$$

где $c = c(T, a_i, \|\omega\|_{H^5(0,R)})$ для $i = \overline{0,4}$. Поэтому достаточно выбрать, например, $\varrho = \frac{(2c)^2}{2}$.

Таким образом мы получаем, что для любого $\varphi \in \widetilde{W}_2^1(0,T)$ существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ такая, что $\sigma = A\sigma$ или $\varphi = \Lambda\sigma$. Это означает, что оператор Λ обратим и по теореме Банаха обратный оператор $\Gamma = \Lambda^{-1} : \widetilde{W}_2^1(0,T) \to L_2(0,T)$ непрерывен. Кроме того,

$$\|\Gamma\varphi\|_{L_2(0,T)} \leq c(T)\|\varphi'\|_{L_2(0,T))}. \tag{3.17}$$

Для произвольного $T_1 > T$, продолжим функцию φ по непрерывности константой $\varphi(T)$ на интервале (T, T_1). Тогда аналог неравенства (3.17) на интервале $(0, T_1)$ для такой функции справедлив, очевидно, при $c(T) \leq c(T_1)$, что означает неубывание нормы оператора Γ с ростом T. Лемма доказана $\square$

Далее приведём теорему об управляемости в линейном случае.

Теорема 3.2. *Пусть $F(u) \equiv 0$ и функции u_0, μ, ν, θ, h удовлетворяют условию Теоремы 1.4, $f = f_1 + f_{2x}$, где $f_1 \in L_2(Q_T)$, $f_2 \in L_2(0,T; L_1(0,R)) \cap L_{4/3}(0,T; L_2(0,R))$ условия (1.20), (1.21) и (1.22) выполнены, $\omega''(R) = 1$ и $\varphi \in W_2^1(0,T)$. Тогда существует единственная функция $\sigma \in L_2(0,T)$ такая, что условие (1.17) выполнено для $u = S(u_0, \mu, \nu, \theta, h, \sigma, f_1, f_2)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi} = \varphi - Q(S_0W + S_1f_1 + S_2f_2)$. Тогда из Леммы 3.1 и Теоремы 1.4 следует, что $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{W}_2^1(0,T)$. Таким образом, согласно Лемме 3.2, функция $\sigma \in \Gamma\widetilde{\varphi}$ является искомой. В частности, если $u = S(u_0, \mu, \nu, \theta, h, \sigma, f_1, f_2)$, то,

$$u = S_0W + S_1f_1 + S_2f_2 + (S_3 \circ \Gamma)(\varphi - Q(S_0W + S_1f_1 + S_2f_2)). \tag{3.18}$$

Единственность функции σ следует из предыдущей леммы. $\square$

Доказательство Теоремы 1.4. В условии Теоремы 3.2 положим, что $f_1 \equiv f$, $f_2 \equiv F(v)$, где $v \in X(Q_T)$. Из известного интерполяционного неравенства

$$\sup_{x\in(0,R)} g^2(x) \leq c(R)(\|g''\|_{L_2(0,R)}^{1/2}\|g\|_{L_2(0,R)}^{3/2} + \|g\|_{L_2(0,R)}^2), \tag{3.19}$$

следует, что так как согласно (1.16)

$$|F(u)| \leq c|u|^{p+1},$$

то

$$
\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} \le \||v|^{p+1}\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} \le (\int_0^T (\int_0^R v^{2p+2}dx)^{2/3}dt)^{3/4} \\
\le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)} v^{\frac{4p}{3}} (\int_0^R v^2 dx)^{2/3}dt)^{3/4} \\
\le C(T)(\int_0^T (\|v_{xx}\|^{1/2}_{L_2(0,R)}\|v\|^{3/2}_{L_2(0,R)} + \|v\|^2_{L_2(0,R)})^{\frac{2p}{3}} (\int_0^R v^2dx)^{2/3}dt)^{3/4} \\
\le C(T)\sup_{t\in(0,T)}\|v\|^{\frac{3p+4}{4}}_{L_2(0,R)} (\int_0^T \|v_{xx}\|^{\frac{p}{3}}_{L_2(0,R)}dt)^{3/4} + C(T)\sup_{t\in(0,T)}\|v\|^{p+1}_{L_2(0,R)}T^{3/4} \\
\le C(T)\sup_{t\in(0,T)}\|v\|^{\frac{3p+4}{4}}_{L_2(0,R)} T^{\frac{6-p}{8}}\|v_{xx}\|^{\frac{p}{4}}_{L_2(Q_T)} + C(T)\sup_{t\in(0,T)}\|v\|^{p+1}_{L_2(0,R)}T^{3/4} \\
\le C(T)(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4})\|v\|^{p+1}_{X(Q_T)}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Кроме того, при $1 < p < 5$ имеем

$$
\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} \le c\||v|^{p+1}\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} \\
\le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)}|v|^{2(p-1)}(\int_0^R v^2dx)^2dt)^{1/2} \\
\le c(R)[\int_0^T (\|v_{xx}\|^{1/2}_{L_2(0,R)}\|v\|^{3/2}_{L_2(0,R)} + \|v\|^2_{L_2(0,R)})^{p-1}(\int_0^R dx)^2dt]^{p/2} \\
\le c(T)\sup_{t\in[0,T]}\|v\|^{\frac{3p+5}{4}}_{L_2(0,R)}\|v_{xx}\|^{\frac{p-1}{4}}_{L_2(Q_T)}T^{\frac{5-p}{8}} + c(T)\sup_{t\in[0,T]}\|v\|^{p+1}_{L_2(0,R)}T^{1/2} \\
\le C(T)(T^{\frac{5-p}{8}} + T^{1/2})\|v\|^{p+1}_{X(Q_T)},
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

и при $0 < p \le 1$

$$
\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} \le (\int_0^T (\int_0^R |v|^{p+1}dx)^2dt)^{1/2} \le (\int_0^T (\int_0^R |v|^2dx)^{p+1}R^{1-p}dt)^{1/2} \\
\le R^{\frac{1-p}{2}}\sup_{t\in[0,T]}(\int_0^R |v|^2dx)^{\frac{p+1}{2}}(\int_0^T dt)^{1/2} = C(R)T^{1/2}\|v\|^{p+1}_{X(Q_T)}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

В пространстве $X(Q_T)$ рассмотрим отображение

$$
u = \Theta v \equiv S_0W + S_1f - S_2(F(v)) + (S_3\circ\Gamma)(\varphi - Q(S_0W + S_1f - S_2(F(v)))).
\tag{3.23}
$$

Если $b(t) \equiv Q(S_0W + S_1f - S_2(F(v)))(t)$, тогда, согласно Лемме 3.1 при $p = 2$ мы получаем

$$\begin{aligned}\|b'\|_{L_2(0,T)} \le c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|f\|_{L_2(Q_T)} \\ +\|F(v)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} + \|F(v)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))}).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Из Теоремы 3.2 и Леммы 3.2 имеем

$$\begin{aligned}\|\Theta v\|_{X(Q_T)} = \|S_0 W + S_1 f - S_2(F(v)) + (S_3 \circ \Gamma)(\varphi - b)\|_{X(Q_T)} \\ \le c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|F(v)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)} + \|b'\|_{L_1(0,T)}) \\ \le c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|f\|_{L_1(Q_T)} + \|F(v)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T)})\end{aligned}$$

Пусть c_0 определена формулой (1.23). Тогда используя неравенства (3.20)–(3.22) находим, что

$$\|\Theta v\|_{X(Q_T)} \le c(T)\Big[c_0 + (T^{\frac{5-p}{8}} + T^{3/4})\|v\|^p_{X(Q_T)}\Big], \tag{3.25}$$

где c_0 определена формулой (1.23). Далее, если $v_1, V_2 \in X(Q_T)$, то $\theta \in (0,1)$

$$|F(v_1) - F(v_2)| = |F'(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)(v_1 - v_2))| \le c(|v_1|^p + |v_2|^p)|v_1 - v_2|,$$

где по аналогии с (3.19) получаем

$$\begin{aligned}\||v_j|^p(v_1 - v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} = (\int_0^T (\int_0^R v_j^{2p}(v_1-v_2)^2 dx)^{2/3} dt)^{3/4} \\ \le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)} |v_j|^{\frac{4p}{3}} (\int_0^R (v_1 - v_2)^2 dx)^{2/3} dt)^{3/4} \\ \le C(T)(\int_0^T (\|v_{jxx}\|^{1/2}_{L_2(0,R)} \|v_j\|^{3/2}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^2_{L_2(0,R)})^{\frac{2p}{3}} (\int_0^R (v_1-v_2)^2 dx)^{2/3} dt)^{3/4} \\ \le c \sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|^{\frac{3p}{4}}_{L_2(0,R)} (\int_0^T \|v_{jxx}\|^{\frac{p}{3}}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^{\frac{p}{3}}_{L_2(0,R)} dt)^{3/4} + \sup_{t\in(0,T)} \|v_1 - v_2\|_{L_2(0,R)} \\ \le c_1[\sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|^{\frac{3p}{4}}_{L_2(0,R)} T^{\frac{6-p}{8}} \|v_{jxx}\|^{\frac{p}{4}}_{L_2(Q_T)} + \sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|^p_{L_2(0,R)} T^{3/4}]\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)} \\ \le c_2(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4})\|v_j\|^p_{X(Q_T)} \|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}\end{aligned}$$

в итоге,

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} \le c(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4})(\|v_1\|^p_{X(Q_T)} + \|v_2\|^p_{X(Q_T)})\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}$$

Если $1 < p < 5$, то аналогично с (3.21)

$$\||v_j|^p(v_1-v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} = (\int_0^T (\int_0^R |v_j|^p|v_1-v_2|dx)^2dt)^{1/2}$$
$$\le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)} |v_j|^{2(p-1)}(\int_0^R |v_j(v_1-v_2)|dx)^2dt)^{1/2}$$
$$\le c[\int_0^T (\|v_{jxx}\|^{1/2}_{L_2(0,R)}\|v_j\|^{3/2}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^2_{L_2(0,R)})^{p-1}\|v_i\|^2_{L_2(0,R)}\|v_1-v_2\|^2_{L_2(0,R)}dt]^{1/2}$$
$$c_1 \sup_{x\in(0,R)} \|v_j\|^{\frac{3p+1}{4}}_{L_2(0,R)}[\int_0^T (\|v_{jxx}\|^{\frac{p-1}{2}}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^{\frac{p-1}{2}}_{L_2(0,R)})dt]^{1/2} \sup_{x\in(0,R)} \|v_1-v_2\|_{L_2(0,R)}$$
$$\le c_2[\sup_{x\in(0,R)} \|v_j\|^{\frac{3p+1}{4}}_{L_2(0,R)}T^{\frac{5-p}{8}}\|v_{jxx}\|^{\frac{p-1}{4}}_{L-2(Q_T)} + T^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in(0,R)} \|v_i\|^p]\|v_1-v_2\|_{X(Q_T)}$$
$$\le c_3(T^{\frac{5-p}{8}} + T^{\frac{1}{2}})\|v_j\|^p_{X(Q_T)}\|v_1-v_2\|_{X(Q_T)}.$$

Если $0 < p \le 1$, то

$$\||v_j|^p(v_1-v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} = (\int_0^T (\int_0^R |v_j|^p|v_1-v_2|dx)^2dt)^{1/2}$$
$$\le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)} |v_j|^{2(p-1)}(\int_0^R |v_j(v_1-v_2)|dx)^2dt)^{1/2}$$
$$\le c[\int_0^T (\|v_{jxx}\|^{1/2}_{L_2(0,R)}\|v_j\|^{3/2}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^2_{L_2(0,R)})^{p-1}\|v_i\|^2_{L_2(0,R)}\|v_1-v_2\|^2_{L_2(0,R)}dt]^{1/2}$$
$$c_1 \sup_{x\in(0,R)} \|v_j\|^{\frac{3p+1}{4}}_{L_2(0,R)}[\int_0^T (\|v_{jxx}\|^{\frac{p-1}{2}}_{L_2(0,R)} + \|v_j\|^{\frac{p-1}{2}}_{L_2(0,R)})dt]^{1/2} \sup_{x\in(0,R)} \|v_1-v_2\|_{L_2(0,R)}$$
$$\le c_2[\sup_{x\in(0,R)} \|v_j\|^{\frac{3p+1}{4}}_{L_2(0,R)}T^{\frac{5-p}{8}}\|v_{jxx}\|^{\frac{p-1}{4}}_{L-2(Q_T)} + T^{\frac{1}{2}} \sup_{x\in(0,R)} \|v_i\|^p]\|v_1-v_2\|_{X(Q_T)}$$
$$\le c_3(T^{\frac{5-p}{8}} + T^{\frac{1}{2}})\|v_j\|^p_{X(Q_T)}\|v_1-v_2\|_{X(Q_T)}.$$

если $0 < p \le 1$, то

$$\||v_j|^p(v_1-v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} = (\int_0^T (\int_0^R |v_j|^p|v_1-v_2|dx)^2dt)^{1/2}$$
$$\le (\int_0^T (\int_0^R v_j^2dx)^p \int_0^R (v_1-v_2)^2dxR^{1-p}dt)^{1/2}$$
$$\le R^{(1-p)/2} \sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|_{L_2(0,R)} \sup_{t\in(0,T)} \|v_1-v_2\|_{L_2(0,R)}$$
$$\le R^{\frac{1-p}{2}}T^{\frac{1}{2}}\|v_j\|^p_{X(Q_T)}\|v_1-v_2\|_{X(Q_T)}.$$

В итоге при $0 < p < 5$

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))} \le c(T^{\frac{5-p}{8}} + T^{1/2})(\|v_1\|^p_{X(Q_T)} + \|v_2\|^p_{X(Q_T)})\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}$$

Заметим, что

$$\Theta v_1 - \Theta v_2 = -S_2(F(v_1) - F(v_2)) + (S_3 \circ \Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2)).$$

Тогда так как

$$\|S_2(F(v_1) - F(v_2))\|_{X(Q_T} \le c(T)\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))},$$

$$\begin{gathered}\|(S_3 \circ \Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{X(Q_T)} \le c(T)\|(\Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{L_2(0,T)} \\ \le c_1\|(Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{\widetilde{W}^1_2(0,T)} \\ \le c_2(T)[\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} + \|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))}],\end{gathered}$$

то

$$\|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{X(Q_T)} \le C(T)(T^{\frac{5-p}{8}} + T^{3/4})(\|v_1\|^p_{X(Q_T)} + \|v_2\|^p_{X(Q_T)})\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}, \tag{3.26}$$

Константа $c(T)$ не убывает с ростом T в (3.24)–(3.26).

Далее, пусть $M(T) = T^{\frac{5-p}{8}} + T^{3/4}$.

1). Предположим сначала, что число $\delta > 0$ фиксировано. Выбираем $T_0 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$4c(T_0)M(T_0)(2c(T_0)\delta)^p \le 1$$

(это возможно поскольку $c(T)$ не возрастает с убыванием T и $M(T) \to 0$ при $T \to +0$). Теперь для любого $T \in (0, T_0]$ выберем произвольное

$$r \in [2c(T)\delta, \frac{1}{(4c(T)M(T))^{\frac{1}{p}}}]$$

(это возможно, поскольку в силу предыдущего неравенства этот отрезок непуст).

2) Теперь предположим, что число $T > 0$ фиксировано. Положим

$$r = \frac{1}{(4c(T)M(T))^{1/p}}, \quad \delta = \frac{1}{(4c(T)M(T))^{1/p}(2c(T))}.$$

В обоих случаях (то есть при фиксированном δ или фиксированном T) если $c_0 \le \delta$, то

$$c(T)c_0 \le r/2 \quad r^p 4c(T)M(T) \le 1.$$

Пусть $\|v\|_{X(Q_T)} \le r$. Тогда в силу (3.25)

$$\|\theta v\|_{X(Q_T)} \le \frac{r}{2} + c(T)M(T)\frac{r}{4c(T)M(T)} \le r,$$

а если $\|v_1\|_{X(Q_T)}, \|v_2\|_{X(Q_T)} \le r$, то в силу (3.25)

$$\|\theta v_1 - \theta v_2\|_{X(Q_T)} \le c(T)M(T)2r^p\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)} \le \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}.$$

Следовательно, отображение Θ является сжимающим на замкнутом шаре радиуса r с центром в нуле пространства $X(Q_T)$. Единственная неподвижная точка отображения $u = \Theta u$ удовлетворяет условиям (1.13)–(1.15) и (1.17) для $\sigma = \Gamma(\varphi - Q(S_0W + S_1f - S_2F(v))) \in L_2(0,T)$.

Единственность решения следует из того, что решение задачи (1.13)–(1.15) и (1.17) $u \in X(Q_{T_0}))$ при достаточно малом T_0 и достаточно большом r является фиксированной точкой отображения Θ, которое является сжимающим в шаре радиуса r в пространстве $X(Q_{T_0})$ (более подробно эти рассуждения приведены в доказательстве Теоремы 1.1 в Главе 1).

□

3.3 Управляемость правой частью уравнения

Лемма 3.3. *Пусть $g \in C([0,T];L_2(0,R))$, $\varphi \in \widetilde{W}_1^1(0,T)$, условия (1.20), (1.21) и (1.25) выполнены, тогда существует единственная функция $f_0 = \Gamma\varphi \in L_1(0,T)$, для которой соответствующая функция $u = S_1(f_0g)$ удовлетворяет условию (1.17), линейный оператор $\Gamma : \widetilde{W}_1^1(0,T) \to L_1(0,T)$ ограничен и его норма не убывает с ростом T.*

Доказательство. Пусть $Gf_0 \equiv f_0g$ для любой функции f_0 определенной на $(0,T)$. Введем линейный оператор $\Lambda = Q \circ S_1 \circ G$. Согласно Лемме 3.1 и непрерывности оператора $S_1 : L_1(0,T;L_2(0,R)) \to C([0,T];L_2(0,R))$, оператор $\Lambda : L_1(0,T) \to \widetilde{W}_1^1(0,T)$ и он ограничен.

Пусть, в силу (1.25),

$$g_1(t) \equiv \int_0^R g(t,x)\omega(x)dx, \quad g_0 \le |g_1(t)|. \tag{3.27}$$

Введем линейный оператор $A : L_1(0,T) \to L_1(0,T)$

$$\begin{gathered}(Af_0)(t) \equiv \frac{\varphi'(t)}{g_1(t)} - \frac{1}{g_1(t)}\int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^{4} a_j\omega^{(5)})dx,\\ u = (S_1 \circ G)f_0.\end{gathered} \tag{3.28}$$

Далее, докажем, что $\varphi = \Lambda f_0$, тогда и только тогда, когда $f_0 = Af_0$. Если $\varphi = \Lambda f_0$, то равенство $b'(t) \equiv \varphi'(t)$ выполнено для $b(t) \equiv (\Lambda f_0)(t)$. Таким образом, из (3.8) мы получаем, что

$$(Af_0)(t) = \frac{b'(t)}{g_1(t)} - \frac{1}{g_1(t)} \int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^{4} a_j \omega^{(5)})dx = f_0(t). \qquad (3.29)$$

И обратно, если $f_0 = Af_0$, тогда,

$$f_0(t) = \frac{\varphi'(t)}{g_1(t)} - \frac{1}{g_1(t)} \int_0^R u(t,x)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^{4} a_j \partial_x^j \omega)dx. \qquad (3.30)$$

Согласно Лемме (3.8) равенство $b'(t) \equiv \varphi'(t)$ выполнено для функции $b(t) \equiv (\Lambda f_0)(t)$. Заметим, что $b(t) \equiv \varphi(t)$, потому что $b(0) = \varphi(0)$.

Далее, покажем, что оператор A является сжимающим при выборе в пространстве $L_1(0,T)$ некоторой эквивалентной нормы.

Пусть $f_{01}, f_{02} \in L_1(0,T), u_j = (S_1 \circ G)f_{0j}$, тогда

$$Af_{01} - Af_{02} = -\frac{1}{g_1} \int_0^R (u_1 - u_2)(-\omega''''' + \sum_{j=0}^{4} a_j \omega^{(5)})dx. \qquad (3.31)$$

Из Теоремы 3.1 где $t \in [0,T]$ следует, что

$$\|u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)\|_{L_2(0,R)} \le c(T)\|g\|_{C([0,T];L_2(0,R))}\|f_{01} - f_{02}\|_{L_1(0,t)}. \qquad (3.32)$$

Пусть $\kappa > 0$, тогда,

$$\begin{aligned} &\|e^{-\kappa t}(Af_{01} - Af_{02})\|_{L_1(0,T)} \\ &\le (\frac{1}{g_0}(\|\omega'''''\|_{L_2(0,R)} + \sum_{j=0}^{4} |a_j|\|\omega^{(5)}\|_{L_2(0,R)}) \int_0^T e^{-\kappa t}\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,R)}dx \\ &\le c\big[\int_0^T e^{-\kappa t}\big(\int_0^t \mid f_{01}(\tau) - f_{02}(\tau) \mid d\tau\big)dt\big] \qquad (3.33) \\ &\le c\big[\int_0^T e^{-\kappa\tau}|f_{01}(\tau) - f_{02}(\tau)| \int_\tau^T e^{\kappa(\tau - t)}dtd\tau\big] \\ &\le \frac{c}{\kappa}\|e^{-\kappa t}(f_{01} - f_{02})\|_{L_{1(0,T)}}, \end{aligned}$$

где $c = c(T, a_i, \|\omega\|_{H^5(0,R)}, \|g\|_{C([0,T];L_2(0,R))}, g_0)$.

Для любой функции $\varphi \in \widetilde{W}_1^1(0,T)$, существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ такая, что функция $f_0 = Af_0$ или $\varphi = \Lambda f_0$. Это означает, что оператор Λ

обратим и по теореме Банаха обратный оператор $\Gamma = \Lambda^{-1} : \widetilde{W}_1^1(0,T) \to L_1(0,T)$ непрерывен. Кроме того,

$$\|\Gamma\varphi\|_{L_1(0,T)} \leq c(T)\|\varphi'\|_{L_1(0,T)}. \tag{3.34}$$

Окончание доказательства аналогично Лемме 3.2. $\square$

Теперь приведём теорему об управляемости для линейной задачи.

Теорема 3.3. *Пусть $F(u) \equiv 0$ и функции $u_0, \mu, \nu, \theta, h, \sigma, g$ удовлетворяет условию Теоремы 1.5, $f_2 \in L_{4/3}(0,T; L_2(0,R))$, $\varphi \in W_1^1(0,T)$, условия (1.20), (1.21), (1.22) и (1.25) выполнены. Тогда существует единственная функция $f_0 \in L_1(0,T)$ такая, что функция $u = S(u_0, \mu, \nu, \theta, h, \sigma, f_0 g, f_2)$ удовлетворяет условию (1.17).*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\varphi} \equiv \varphi - Q(S_0 W + S_2 f_2 + S_3\sigma)$, тогда из Леммы 3.1 и Теоремы 3.1 следует, что $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{W}_1^1(0,T)$. Таким образом, по Лемме 3.3 функция $f_0 = \Gamma\widetilde{\varphi}$ является искомой. В частности, если $u = S(u_0, \mu, \nu, \theta, h,\ \sigma, f_0 g, f_2)$, тогда

$$u = S_0 W + (S_1 \circ G \circ \Gamma)(\varphi - Q(S_0 W + S_2 f_2 + S_3\sigma)) + S_2 f_2 + S_3\sigma. \tag{3.35}$$

Единственность функции f_0 следует из предыдущей леммы. $\square$

Доказательство Теоремы 1.5. В условиях Теоремы 3.3, положим $f_2 \equiv F(v)$, где $v \in X(Q_T)$.

В пространстве $X(Q_T)$ рассмотрим отображение

$$\begin{gathered} u = \Theta v \equiv S_0 W + (S_1 \circ G \circ \Gamma) \\ (\varphi - Q(S_0 W - S_2(F(v)) + S_3\sigma)) - S_2(F(v)) + S_3\sigma. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Далее, доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 1.4: применим Теорему 3.1, Лемму 3.1, Теорему 3.2 и выражения (3.19)–(3.21) и получим

$$\begin{gathered} \|b'\|_{L_1(0,T)} \leq c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} \\ +\|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|\sigma\|_{L_2(Q_T)} + \|F(v)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))}). \end{gathered} \tag{3.37}$$

Из Теоремы 3.3 и Леммы 3.3 и (3.20)–(3.22) имеем

$$\begin{gathered} \|\Theta v\|_{X(Q_T)} = \|S_0 W + S_1 f - S_2(F(v)) + (S_3 \circ \Gamma)(\varphi - b)\|_{X(Q_T)} \\ \leq c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|F(v)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)} + \|b'\|_{L_1(0,T)}) \\ \leq c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,R)} + \|\mu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|\nu\|_{H^{2/5}(0,T)} + \|h\|_{H^{1/5}(0,T)} + \|\theta\|_{H^{1/5}(0,T)} \\ +\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi'\|_{L_1(0,T)}) \\ \leq c(T)\Big[c_0 + (T^{\frac{5-p}{8}} + T^{3/4})\|v\|_{X(Q_T)}^p\Big] \end{gathered}$$

где c_0 определена формулой (1.26). Далее, если $v_1, v_2 \in X(Q_T)$, то $\theta \in (0,1)$, используем оценки из Теоремы 1.4:

$$|F(v_1) - F(v_2)| = |F'(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)(v_1 - v_2))| \le c(|v_1|^p + |v_2|^p)|v_1 - v_2|,$$

$$\||v_j|^p(v_1 - v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} = (\int_0^T (\int_0^R v_j^{2p}(v_1 - v_2)^2 dx)^{2/3} dt)^{3/4}$$
$$\le (\int_0^T \sup_{x\in(0,R)} |v_j|^{\frac{4p}{3}} (\int_0^R (v_1 - v_2)^2 dx)^{2/3} dt)^{3/4}$$
$$\le c_1[\sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|^{\frac{3p}{4}}_{L_2(0,R)} T^{\frac{6-p}{8}} \|v_{jxx}\|^{\frac{p}{4}}_{L_2(Q_T)} + \sup_{t\in(0,T)} \|v_j\|^p_{L_2(0,R)} T^{3/4}] \|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}$$
$$\le c_2(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4}) \|v_j\|^p_{X(Q_T)} \|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}.$$

Используем оценки из Теоремы 1.4:

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} \le c(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4})(\|v_1\|^p_{X(Q_T)} + \|v_2\|^p_{X(Q_T)})\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}$$

Заметим, что

$$\Theta v_1 - \Theta v_2 = -S_2(F(v_1) - F(v_2)) + (S_3 \circ \Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2)).$$

Тогда так как

$$\|S_2(F(v_1) - F(v_2))\|_{X(Q_T} \le c(T)\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))},$$

$$\|(S_3 \circ \Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{X(Q_T)} \le c(T)\|(\Gamma \circ Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{L_2(0,T)}$$
$$\le c_1\|(Q \circ S_2)(F(v_1) - F(v_2))\|_{\widetilde{W}_2^1(0,T)}$$
$$\le c_2(T)[\|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_{4/3}(0,T;L_2(0,R))} + \|F(v_1) - F(v_2)\|_{L_2(0,T;L_1(0,R))}],$$

то

$$\|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{X(Q_T)} \le C(T)(T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4})(\|v_1\|^p_{X(Q_T)} + \|v_2\|^p_{X(Q_T)})\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}, \tag{3.38}$$

Константа $c(T)$ не убывает с ростом T в (3.24)–(3.26). Далее, пусть $M(T) = T^{\frac{6-p}{8}} + T^{3/4}$.

1). Предположим сначала, что число $\delta > 0$ фиксировано. Выбираем $T_0 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$4c(T_0)M(T_0)(2c(T_0)\delta)^p \le 1$$

(это возможно поскольку $c(T)$ не возрастает с убыванием T и $M(T) \to 0$ при $T \to +0$). Теперь для любого $T \in (0, T_0]$ выберем произвольное

$$r \in [2c(T)\delta, \frac{1}{(4c(T)M(T))^{\frac{1}{p}}}]$$

(это возможно, поскольку в силу предыдущего неравенства этот отрезок непуст).

2) Теперь предположим, что число $T > 0$ фиксировано. Положим

$$r = \frac{1}{(4c(T)M(T))^{1/p}}, \quad \delta = \frac{1}{(4c(T)M(T))^{1/p}(2c(T))}.$$

В обоих случаях (то есть при фиксированном δ или фиксированном T) если $c_0 \leq \delta$, то

$$c(T)c_0 \leq r/2 \quad r^p 4c(T)M(T) \leq 1.$$

Пусть $\|v\|_{X(Q_T)} \leq r$. Тогда в силу (3.25)

$$\|\theta v\|_{X(Q_T)} \leq \frac{r}{2} + c(T)M(T)\frac{r}{4c(T)M(T)} \leq r,$$

а если $\|v_1\|_{X(Q_T)}, \|v_2\|_{X(Q_T)} \leq r$, то в силу (3.25)

$$\|\theta v_1 - \theta v_2\|_{X(Q_T)} \leq c(T)M(T)2r^p\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)} \leq \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{X(Q_T)}.$$

Следовательно, отображение Θ является сжимающим на замкнутом шаре радиуса r с центром в нуле пространства $X(Q_T)$. Единственная неподвижная точка отображения $u = \Theta u$ удовлетворяет условиям (1.13)–(1.15) и (1.17) для $\sigma = \Gamma(\varphi - Q(S_0 W + S_1 f - S_2 F(v))) \in L_2(0,T)$.

Единственность решения следует из того, что решение задачи (1.13)–(1.15) и (1.17) $u \in X(Q_{T_0}))$ при достаточно малом T_0 и достаточно большом r является фиксированной точкой отображения Θ, которое является сжимающим в шаре радиуса r в пространстве $X(Q_{T_0})$ (более подробно эти рассуждения приведены в доказательстве Теоремы 1.1 в Главе 1). $\square$

4 Глава 3

4.1 Вспомогательные результаты

В этом разделе мы приведем некоторые вспомогательные результаты. Для начала напомним, что через $\eta(x)$ мы обозначили функцию среза, то есть бесконечно гладкую неубывающую функцию заданную на $\mathbb{R}$, при этом $\eta(x) = 0$ для $x \leq 0$ и $\eta(x) = 1$ для $x \geq 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$. Для мультииндекса $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ положим $\partial^\nu = \partial_x^{\nu_1}\partial_y^{\nu_2}$.

Упростим в этой главе некоторые обозначения, использованные ранее во Введении. Положим $\Pi_T^+ = \Pi_{T,L}^+$. Далее, положим $L_{q,+} = L_q(\Sigma_+)$, $L_{2,+}^{\psi(x)} = L_2^{\psi(x)}(\Sigma_+)$, $H_+^k = H^k(\Sigma_+)$, $\widetilde{H}_+^k = \widetilde{H}^k(\Sigma_+)$, $\widetilde{H}_+^{k,\psi(x)} = \widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+)$.

Наряду с пространством $X_w^{k,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ будем использовать пространство $X^{k,\psi(x)}(\Pi_T^+)$, состоящее из функций $u(t,x,y)$ таких, что

$$u \in C([0,T]; \widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_+)) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{k+2,\psi'(x)}(\Sigma_+)).$$

Пусть $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$- пространство бесконечно-гладких на $\overline{\Sigma}_+$ функций $\varphi(x,y)$ таких, что $(1+x)^n|\partial^\alpha\varphi(x,y)| \leq c(n,\alpha)$ для любых значений n, мультииндекса α, $(x,y) \in \overline{\Sigma}_+$ и $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ для случая a) и $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ для случая b) для любого m.

Пусть $S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$- пространство бесконечно гладких функций $\varphi(x,y)$ on $\overline{\Sigma}_+$, таких, что $e^{nx}|\partial^\nu\varphi(x,y)| \leq c(n,\nu)$ для любых n, мульти-индексов ν, $(x,y) \in \overline{\Sigma}_+$.

Положим $\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$ - подпространство $S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$, состоящее из функций, которые на границах $y = 0$ и $y = L$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции из пространства $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$. Это пространство плотно в $\widetilde{H}_+^k$.

Результаты о существовании решений основаны на оценках, которые аналогичны законам сохранения для задачи Коши:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u^2\,dxdy = const, \quad \iint_{\mathbb{R}^2} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2F^*(u))\,dxdy = const, \quad (4.1)$$

где, $F^*(u)$ определено формулой (2.1).

Теперь, введем понятие слабых решений рассматриваемых задач.

Определение 4.1. *Пусть* $u_0 \in L_{2,+}$, $f \in L_1(0,T; L_{2,+})$. *Функция* $u \in L_\infty(0,T; L_{2,+})$ *называется слабым решением задачи (1.27)-(1.30), если для любой функции* $\phi \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma_+}))$ *такой, что* $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} \equiv 0$, *функция*

$F(u(t,x,y))\phi_x \in L_1(\Pi_T^+)$ *и выполнено следующее равенство:*

$$\iiint_{\Pi_T^+} (u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - u\phi_{yyyyx} + bu\phi_{xxx} \\ +bu\phi_{yyx} + au\phi_x + F(u)\phi_x + f\phi)dtdxdy \\ + \iint_{\Sigma_+} u_0\phi\big|_{t=0} dxdy = 0. \tag{4.2}$$

В дальнейшем, мы опустим пределы интегрирования в интегралах по x и y на полуполосе Σ_+ и по x на $\mathbb{R}_+$.

Далее, мы приведем интерполяционные неравенства. Они очень важны для наших дальнейших рассуждений.

Лемма 4.1. *Пусть* $\psi_1(x)$,$\psi_2(x)$ *– допустимые весовые функции,* $q \in [2, +\infty]$

$$s = s_0(q) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2q}, \tag{4.3}$$

тогда для всех функций, которые удовлетворяют условиям:

$$(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\psi_1^{1/2}(x) \in L_{2,+},$$

$$\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_{2,+},$$
$$\varphi(0,y) \equiv 0,$$
$$\varphi(x,0)\varphi_y(x,0) = \varphi(x,L)\varphi_y(x,L) \equiv 0,$$

имеет место следующее неравенство:

$$\|\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} \le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\varphi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s}\|\varphi\psi_2\|_{L_{2,+}}^{1-2s}, \tag{4.4}$$

где константа c зависит от L, q *и от свойств функции* ψ_i*; дополнительно, если* $\varphi\big|_{y=0} = 0$ *или* $\varphi\big|_{y=L} = 0$*, тогда эта константа равномерна по* L.

Доказательство. Без ограничения общности, предположим, что функция φ гладкая и затухает на $+\infty$ (на пример, $\varphi \in S_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$).

Сначала, покажем, что равномерно по L

$$\iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2} dxdy \le c(\iint (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + \varphi^2)\psi_1 dxdy)^{1/2} \\ (\iint \varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/2}. \tag{4.5}$$

Заметим, что из граничных условий наложенных на функцию φ следует, что

$$\begin{aligned}\iint(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy = -\iint(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\psi_1^{1/2}\varphi\psi_2^{1/2}dxdy \\ -\iint\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'dxdy.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Так как функция ψ_i, по условию, допустимая весовая, то

$$\begin{aligned}\iint(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le 2(\iint(\varphi_{xx}^2+\varphi_{yy}^2)\psi_1dxdy)^{1/2}(\iint\varphi^2\psi_2dxdy)^{1/2} \\ +c(\iint\varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint\varphi^2\psi_1dxdy)^{1/4}(\iint\varphi^2\psi_2dxdy)^{1/4},\end{aligned} \tag{4.7}$$

откуда следует неравенство (4.5).

Далее, для области $\Omega=\Sigma_+$ используем интерполяционное неравенство из [13]:

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \le c(\|f_{xx}\|_{L_1(\Omega)}+\|f_{yy}\|_{L_1(\Omega)}+\|f\|_{L_1(\Omega)}), \tag{4.8}$$

и применим его к функции $f\equiv\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}$, тогда

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi_1^{1/4}\psi_2^{1/4}\|^2_{L_\infty(\Sigma_+)} \le c\iint[|(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{xx}|+|(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{yy}| \\ +\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}]dxdy.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Где,

$$(\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})_{xx} = 2(\varphi\varphi_{xx}+\varphi_x^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}+4\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'+\varphi^2(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'',$$

$$\iint|\varphi\varphi_{xx}|\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le (\iint\varphi_{xx}^2\psi_1dxdy)^{1/2}(\iint\varphi^2\psi_2dxdy)^{1/2},$$

и так как, по условию, ψ_i - допустимая весовая функция, тогда

$$\iint|\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'|dxdy \le c(\iint\varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint\varphi^2\psi_1dxdy)^{1/4}$$

$$(\iint\varphi^2\psi_2dxdy)^{1/4},$$

$$\iint\varphi^2|(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})''|dxdy \le c\iint\varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}dxdy \le c(\iint\varphi^2\psi_1dxdy)^{1/2}$$

$$(\iint\varphi^2\psi_2dxdy)^{1/2}.$$

Остальные слагаемые правой части неравенства (4.9) оцениваются аналогично и используя неравенство (4.5) мы получаем (4.4) для $q=+\infty$.

Если $q \in (2, +\infty)$, тогда используя (4.4) при $q = +\infty$, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} &= (\iint |\varphi|^{q-2}\psi_1^{\frac{q-2}{4}}\psi_2^{\frac{q-2}{4}}\varphi^2\psi_2 dxdy)^{1/q} \\ &\le \|\varphi\psi_1^{1/4}\psi_2^{1/4}\|_{L_\infty}^{(q-2)/q}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2/q} \\ &\le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}| + |\varphi|)\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$qs = \frac{q-2}{4}, \quad q(\frac{1}{2} - 2) = \frac{q+2}{4} = \frac{q-2}{4} + 1.$$

Наконец, если, например, $\varphi\big|_{y=L} = 0$, продолжим функцию φ нулем до четверти полосы $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и проведем те же рассуждения с использованием (4.8) для $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и (4.5) для $L = +\infty$, тогда оценка (4.4) будет равномерна по L.

□

В дальнейшем, мы будем также использовать интерполяционное неравенство в следующем виде ([29]).

Лемма 4.2. *Пусть $\psi_1(x)$,$\psi_2(x)$ - две допустимые весовые функции такие, что $\psi_1(x) \le c_0\psi_2(x)$ $\forall x \ge 0$ для некоторой константы $c_0 > 0$, $q \in [2, +\infty)$*

$$s = s_1(q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}, \tag{4.11}$$

тогда существует константа $c > 0$ такая, что для любой функции $\varphi(x, y)$ такой, что $\varphi_{xx}\psi_1^{1/2}(x)$, $\varphi_{yy}\psi_1^{1/2}(x) \in L_2(\Sigma_+)$, $\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_2(\Sigma_+)$, если $|\nu| = 1$, то имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\partial^\nu\varphi\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\|_{L_{2,+}} &\le c\|(|\varphi_{xx}| + |\varphi_{yy}|)\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{2s} \\ &\times\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1-2s} + c\|\varphi\psi_2^{1/2}\|_{L_{2,+}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Далее, используем лемму из [36].

Лемма 4.3. *Пусть $\psi(x)$ допустимая весовая функция, тогда найдется константа c, зависящая от свойств функции ψ, такая, что для любой функции $\varphi(x, y)$ такой, что $\varphi_{xx}, \varphi \in L_{2,+}^{\psi(x)}$ имеет место следующая оценка:*

$$\iint \varphi_x^2\psi dxdy \le c\big[\iint \varphi_{xx}^2\psi dxdy\big]^{1/2}\big[\iint \varphi^2\psi dxdy\big]^{1/2} + c\iint \varphi^2\psi dxdy, \tag{4.13}$$

$$\int_0^L \varphi_x^2\big|_{x=0} dxdy \le c\big[\iint \varphi_{xx}^2\psi dxdy\big]^{3/4}\big[\iint \varphi^2\psi dxdy\big]^{1/4} + c\iint \varphi^2\psi dxdy. \tag{4.14}$$

Теперь, введем анизотропные пространства Соболева со свойствами гладкости только по x. Пусть $H_+^{(k,0)}$- пространство, состоящее из функций $\varphi(x,y) \in L_{2,+}$ таких, что $\partial_x^j \varphi \in L_{2,+}$ для $j \le k$, наделенное нормой $\|\varphi\|_{H_+^{(k,0)}} = (\sum_{j=0}^k \|\partial_x^j \varphi\|_{L_{2,+}}^2)^{1/2}$. Пусть $H_+^{(-m,0)} = \{\varphi(x,y) = \sum_{j=0}^m \varphi_j(x,y) : \forall \varphi_j \in L_{2,+}\}$, наделенное нормой $\|\varphi\|_{H_+^{(-m,0)}} = (\sum_{j=0}^m \|\varphi_j\|_{L_{2,+}}^2)^{1/2}$.

Лемма 4.4. *Если $\varphi \in H_+^{(k,0)}$, $\partial_x^n \varphi \in H_+^{(-m,0)}$ для $n \ge k+m$, то $\partial_x^{k+1}\varphi \in L_{2,+}$ и для некоторой константы $c = c(k,m,n)$*

$$\|\partial_x^{k+1}\varphi\|_{L_{2,+}} \le c(\|\partial_x^n \varphi\|_{H_+^{(-m,0)}} + \|\varphi\|_{H_+^{(k,0)}}). \tag{4.15}$$

Доказательство. Эта лемма была доказана в статье [36]. □

Чтобы установить результаты о затухании решений на бесконечности нам пригодиться неравенство Стеклова в следующем виде:

$$\int_0^L f^2(y)dy \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (f'(y))^2 dy. \tag{4.16}$$

где $f \in H_0^1(0,L)$.

Пусть $\psi_l(y)$, $l \in \mathbb{N}$- ортонормированная в $L_2(0,L)$ система собственных функций оператора $(-\psi'')$ на отрезке $[0,L]$ с соответствующими граничными условиями $\psi(0) = \psi(L) = 0$ в случае (a) и $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ в случае (b), λ_l соответствующие собственные значения. Такие системы хорошо известны и могут быть записаны в виде тригонометрических функций.

Помимо уравнения (1.27), мы рассмотрим его линейный аналог:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = f(t,x,y), \tag{4.17}$$

с начальными и граничными условиями (1.28)-(1.30). Слабое решение данной задачи понимается в смысле Определения 4.1 (где $F(u) \equiv 0$).

Лемма 4.5. *Пусть $u_0 \in \widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+)$, $f \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$. Положим $\widetilde{\Phi}_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$ и для $j \ge 1$*

$$\widetilde{\Phi}_j(x,y) \equiv \partial_t^{j-1} f(0,x,y) + (\partial_x^5 + \partial_x\partial_y^4 - b\partial_x^3 - b\partial_x\partial_y^2 - a\partial_x)\widetilde{\Phi}_{j-1}(x,y), \tag{4.18}$$

и пусть $\widetilde{\Phi}_j(0,y) = \widetilde{\Phi}_{jx}(0,y) \equiv 0$ для всех j. Тогда существует единственное решение линейной задачи (4.17), (1.28)-(1.30) $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (4.17), (1.28)-(1.30). Рассмотрим $\Sigma = \mathbb{R} \times (0,L)$ и $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$ – пространство, состоящее из бесконечно гладких на $\overline{\Sigma}$ функций $\phi(x,y)$ таких, что $(1+|x|)^n|\partial^\alpha \varphi(x,y)| \le c(n,\alpha)$ для некоторых n и мульти-индекса

$\alpha, (x,y) \in \overline{\Sigma}$ и на границах $y = 0, y = L$ эти функции удовлетворяют тем же условиям что и в определении пространства $\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+)$. Продолжим функции u_0 и f на всю полосу так, чтобы $u_0 \in \widetilde{S}(\overline{\Sigma})$, $f \in C([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$ и рассмотрим (4.17) (в $\Pi_T = (0,T) \times \Sigma$), (1.28) (в Σ), (1.30) (в $\Omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}$). Таким образом мы рассматриваем задачу:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = f(t,x,y) \tag{4.19}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in \Sigma, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &a)\ u(t,x,0) = u(t,x,L) = u_{yy}(t,x,0) = u_{yy}(t,x,L) = 0, \quad x,t \in \Omega_T \\ &b)\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,L) = u_{yyy}(t,x,0) = u_{yyy}(t,x,L) = 0, \quad x,t \in \Omega_T \end{aligned} \tag{4.21}$$

Тогда с помощью преобразования Фурье по переменной x и разложения в ряд Фурье по переменной y, решение задачи (4.19)-(4.21) может быть записано следующим образом:

$$u(t,x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{i\xi x} \psi_l(y) \hat{u}(t,\xi,l) d\xi,$$

где

$$\begin{gathered} \hat{u}(t,\xi,l) = \hat{u_0}(\xi,l) e^{i(\xi^5 + \xi\lambda_l^2 + b\xi^3 + b\xi\lambda_l - a\xi)t} + \int_0^t \hat{f}(\tau,\xi,l) e^{i(\xi^5 + \xi\lambda_l^2 + b\xi^3 + b\xi\lambda_l - a\xi)(t-\tau)} d\tau, \\ \hat{u_0}(\xi,l) \equiv \iint_\Sigma e^{-i\xi x} \psi_l(y) u_0(x,y) dxdy, \\ \hat{f}(t,\xi,l) \equiv \iint_\Sigma e^{-i\xi x} \psi_l(y) f(t,x,y) dxdy. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Согласно свойствам функций u_0 и f это решение $u \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}(\overline{\Sigma}))$.

Далее, пусть $v \equiv \partial_x^k \partial_y^l u$ для некоторых k, l. Тогда функция v удовлетворяет уравнению типа (4.17), где f заменяется на $\partial_x^k \partial_y^l f$. Пусть $m \geq 5$, $\psi(x) \equiv x^m$ (заметим, что эта функция не является допустимой весовой функцией). Умножим это уравнение на $2v(t,x,y)\psi(x)$ и интегрируя на Σ_+, мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int v^2 \psi dxdy + \iint (5v_{xx}^2 + v_{yy}^2) \psi' dxdy + b \iint (3v_x^2 + v_y^2) \psi' dxdy \\ &= \iint 5v_x^2 \psi''' dxdy + \iint (-\psi^{(5)} + b\psi''' + a\psi') v^2 dxdy + 2 \iint \partial_x^k \partial_y^l f v \psi dxdy, \end{aligned} \tag{4.23}$$

где

$$\iint v_x^2 \psi' dxdy = -\iint v_{xx} v \psi' dxdy + \frac{1}{2} \iint v^2 \psi''' dxdy,$$

$$\iint v_y^2\psi' dxdy = -\iint v_{yy} v\psi' dxdy,$$

$$\iint v_x^2\psi''' dxdy = -\iint v_{xx} v\psi''' dxdy - \iint v_x v\psi^{(4)} dxdy$$
$$= -\iint v_{xx} v\psi''' dxdy - \frac{1}{2}\int v^2\psi^{(4)}\Big|_{x=0}^{x=R} dy + \frac{1}{2}\iint v^2\psi^{(5)} dxdy$$
$$= -\iint v_{xx} v\psi''' dxdy + \frac{1}{2}\iint v^2\psi^{(5)} dxdy$$

Докажем, что

$$\psi''' \leq \sqrt{6\psi'\psi^{(5)}}.$$

Сравним

$$\sqrt{6\psi'\psi^{(5)}} = \sqrt{6mx^{m-1}m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)v^{m-5}}$$
$$= x^{m-3}m\sqrt{6(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)},$$

и

$$\psi''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Тогда исходное неравенство эквивалентно неравенству,

$$\sqrt{6(m-3)(m-4)} \geq \sqrt{(m-1)(m-2)}.$$

которое превращается в равенство при $m = 5$. Далее возведем в квадрат обе части последнего неравенства

$$6m^2 - 42m + 84 \geq m^2 - 3m + 2,$$

и вычислим производные правой и левой части:

$$12m - 42 \geq 2m - 3.$$

Ч то выполнено при $m \geq 5$ и, следовательно, искомое неравенствонеравенство выполнено при $m \geq 5$.

Из предыдущих равенств, мы получаем

$$-3b\iint v_x^2\psi' dxdy \leq \iint v_{xx}^2\psi' dxdy + \frac{9b^2}{4}\iint v^2\psi' dxdy + \frac{3b}{2}\iint v^2\psi''' dxdy,$$

$$-b\iint v_y^2\psi' dxdy \leq \iint v_{yy}^2\psi' dxdy + \frac{b^2}{4}\iint v^2\psi' dxdy,$$
$$\iint v_x^2\psi''' dxdy \leq \iint v_{xx}^2\psi' dxdy + 8\iint v^2\psi^{(5)} dxdy.$$

Из равенства (4.23) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int v^2\psi dxdy \le c(a,b)\iint(\psi^{(5)}+\psi'''+\psi')v^2dxdy + 2\iint \partial_x^k\partial_y^l f v\psi dxdy. \quad (4.24)$$

Зафиксируем $\alpha > 0$ и пусть $n \ge 5$. Для некоторого $m \in [5, n]$ умножим неравенство (4.24) на $(2\alpha)^m/(m!)$ и просуммируем по m. Таким образом для

$$z_n(t) \equiv \iint \sum_{m=0}^{n} \frac{(2\alpha x)^m}{m!} v^2(t,x,y)dxdy,$$

благодаря особому выбору функции ψ, мы получаем неравенство

$$z_n'(t) \le cz_n(t) + c, \quad z_n(0) \le c,$$

которое выполняются равномерно по n, откуда следует, что

$$\sup_{t\in[0,T]}\iint e^{2\alpha x}v^2dxdy < \infty.$$

Таким образом, $u \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$. Используем следующее обозначение $\omega(t,x,y)$ для построенного решения начальной задачи.

Пусть $\mu_0(t,y) \equiv -\omega(t,0,y)$, $\mu_1(t,y) \equiv -\omega_x(t,0,y)$. Заметим, что функции $\mu_j \in C^\infty(\overline{B}_T)$ и удовлетворяет граничными условиями (1.30), и условия совместности из условия леммы гарантируют, что $\partial_t^l\mu_j(0,y) \equiv 0$, $\forall l$. В Π_T^+ рассмотрим начально-краевую задачу:

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = 0, \quad (4.25)$$

$$u\big|_{t=0} = 0, u\big|_{x=0} = \mu_0(t,y), u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t,y), \quad (4.26)$$

с граничными условиями (1.30).

Пусть $\Psi(t,x,y) \equiv \mu_1(t,y)\eta(1-x) + \mu_1(t,y)x\eta(1-x)$, $F(t,x) \equiv= -\Psi_t + (\Psi_{xxxx} + \Psi_{yyyy})_x - b(\Psi_{xx} + \Psi_{yy})_x - a\Psi_x$, $U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - \Psi(t,x,y)$, тогда задача (4.25), (4.26), (1.30) эквивалентна задаче , (4.17), (1.28)-(1.30) для функции $U, u_0 \equiv 0$, $f \equiv F$, а именно задаче

$$U_t - (U_{xxxx} + U_{yyyy})_x + b(U_{xx} + U_{yy})_x + aU_x = F, \quad (4.27)$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad U(t,0,y) = U_x(t,0,y) = 0, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} &a)\ U(t,x,0) = U(t,x,L) = U_{yy}(t,x,0) = U_{yy}(t,x,L) = 0,\\ &b)\ U_y(t,x,0) = U_y(t,x,L) = U_{yyy}(t,x,0) = U_{yyy}(t,x,L) = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Очевидно, что $F \in C^\infty([0,T]; \widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$ и $\partial_t^l F(0,x,y) \equiv 0 \quad \forall l$.

Далее используем метод Галеркина. Пусть $\{\varphi_j(x) : j = 1, 2, 3...\}$- система линейно независимых функций, полная в пространстве $\{\varphi \in H^5(\mathbb{R}_+) : \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0\}$. Мы будем искать приближенное решение задачи (4.27)-(4.29) в виде

$$U_k(t,x,y) = \sum_{j,l=1}^{k} c_{kjl}(t)\varphi_j(x)\psi_l(y), \tag{4.30}$$

исходя из условий $(\varphi_i = \varphi_i(x), \psi_m = \psi_m(y))$

$$\begin{gathered}\iint [U_{kt}\varphi_i\psi_m - U_k(-(\varphi_i^{(5)}\psi_m + \varphi_i'\psi^{(4)})) + b(\varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\psi_m'') + a\varepsilon_i'\psi_m]dxdy \\ - \iint G\varphi_i\psi_m dxdy = 0. \quad i,m = 1,...,k, \quad t \in [0,T],\end{gathered} \tag{4.31}$$

$$c_{kjl}(0) = 0. \tag{4.32}$$

Умножим равенство (4.31) на $2c_{kim}(t)$, просуммировав по i, m, получим. что

$$\begin{gathered}2\iint [U_{kt}U_k - U_k(-(U_{kxxxx} + U_{kyyyy}))_x + b(U_{kxx} + U_{kyy})_x + aU_kU_{kx}]dxdy \\ = 2\int FU_k dxdy\end{gathered} \tag{4.33}$$

откуда после интегрирования по частям, в силу $U_k\big|_{x=0} = U_{kx}\big|_{x=0} = U_{kxx}\big|_{x=0} = 0$, находим, что

$$\frac{d}{dt}\iint U_k^2 dxdy = 2\iint FU_k dxdy. \tag{4.34}$$

Так как согласно (4.27) $U_k\big|_{t=0}$ из равенства (4.34) следует, что

$$\|U_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})} \tag{4.35}$$

Положим в (4.31) $t = 0$, умножим получившееся равенство на c'_{kim} и просуммируем по i, m, тогда получаем, что $U_{kt}\big|_{t=0} = 0$. Теперь продифференцируем равенство (4.31) по t, умножим на $3c_{kim}(t)$ и просуммируем по i, m, тогда аналогично (4.33)-(4.35) получаем, что

$$\|U_{kt\|_{L_\infty(0,T'L_{2,+})}} \leq \|F_t\|_{L-1(0,T;L_{2,+})}. \tag{4.36}$$

Далее, так как $\psi_m^{(2n)}(y) = (-\lambda)^n\psi_m(y)$, то умножив равенство (4.31) на $(-\lambda_m)^n$ для произвольного натурального n, находим, что

$$\begin{gathered}\iint [U_{kt}\varphi_i\psi_m^{(2n)} - U_k(-(\varphi_i^{(5)}\psi_m^{(2n)} + \varphi_i'\psi^{(2n+4)})) + b(\varphi_i'''\psi_m^{(2n)} + \varphi_i'\psi_m^{(2n+2)}) \\ +a\varphi_i'\psi_m^{(2n)}]dxdy - \iint F\varphi_i\psi_m^{(2n)}dxdy = 0,\end{gathered} \tag{4.37}$$

откуда после интегрирования n раз по частям по y выводим, что

$$\begin{gathered}\iint[\partial_y^n U_{kt}\varphi_i\psi_m^{(n)} - \partial_y^{(n)}U_k(-(\varphi_i^{(5)}\psi_m^{(n)} + \varphi_i'\psi^{(n+4)})) + b(\varphi_i'''\psi_m^{(n)} + \varphi_i'\psi_m^{(n+2)}) \\ +a\varphi_i'\psi_m^{(n)}]dxdy - \iint \partial_y^n F\varphi_i\psi_m^{(n)}dxdy.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Умножим получившееся равенство на $2c_{kim}(t)$ и просуммировав по i, m выводим аналогично (4.33)-(4.35), что

$$\|\partial_y^n U_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|\partial_y^n F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{4.39}$$

Более того, рассуждая аналогично (4.36), получаем, что для любых n и l

$$\|\partial_t^l\partial_y^n U_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} \leq \|\partial_t^l\partial_y^n F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{4.40}$$

Из неравенства (4.40) следует, что из последовательности k можно извлечь подпоследовательность k' такую, что для любых n и l при $k' \to \infty$

$$\partial_t^l\partial_y^n U_{k'} \to \partial_t^l\partial_y^n U \quad \text{слабо в } L_2(0,T;L_{2,+})$$

Заметим, что в силу произвольности в выборе l $\partial_t^l\partial_y^n U \in C([0,T];L_{2,+})$ для любых n и l. Более того, в силу слабой замкнутости линейных замкнутых подпространств $U\big|_{t=0}$ и в случае $a)$ $\partial_y^{2m}U\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}U\big|_{y=L} = 0$, а в случае $b)$ $\partial_y^{2m+1}U\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}U\big|_{y=L} = 0$ $\forall m$, поскольку эти свойства выполнены в допредельном случае. Далее, пусть $\kappa(t) \in C^\infty[0,T]$, $\kappa(T) = 0$. Умножив (4.31) на $\kappa(t)$ и проинтегрировав по t от 0 до T после интегрирования по частям выводим равенство

$$\begin{gathered}\iiint_{\Pi_T^+} U_k[\varphi_i\psi_m\kappa' + ((-\varphi_i^{(5)}\psi_m + \varphi_i'\psi^{(4)}) + b(\varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\psi_m)\kappa]dxdydt \\ + \iiint_{\Pi_T^+} F\varphi_i\psi_m\kappa dxdydt = 0. \quad i,m = 1,...,k.\end{gathered}$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $k = k' \to +\infty$, получим, что

$$\begin{gathered}\iiint_{\Pi_T^+} U[\varphi_i\psi_m\kappa' + ((-\varphi_i^{(5)}\psi_m + \varphi_i'\psi^{(4)}) + b(\varphi_i'''\psi_m + \varphi_i'\psi_m)\kappa]dxdydt \\ + \iiint_{\Pi_T^+} F\varphi_i\psi_m\kappa dxdydt = 0. \quad i,m = 1,...,k.\end{gathered}$$

а тогда для любой пробной функции ϕ, удовлетворяющей условиями Определения 4.1

$$\iiint_{\Pi_T^+}(U(\phi_t - \phi_{xxxxx} - \phi_{yyyyx} + b\phi_{xxx} + b\phi_{yyx} + a\phi_x) + F\phi)dxdydt = 0 \tag{4.41}$$

то есть функция U является слабым решением задачи (4.27)-(4.29). Из равенства (4.41) следует, что в пространстве обобщенных функций над областью Π_T^+

$$U_{xxxxx} = U_t - U_{yyyyx} + bU_{xxx} + bU_{yyx} + aU - x - F \tag{4.42}$$

Заметим, что в силу свойств функции U любая производная $\partial_t^l \partial_y^n$ каждого слагаемого из правой части этого равенства принадлежит пространству $C([0,T]; H_+^{(-3,0)})$, а это означает, что $\partial_t^l \partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T]; H_+^{(-3,0)})$, $\forall l, n$.

Применим неравенство (4.8) для $\psi \equiv \partial_t^l \partial_y^n U$, $k = 0$, $n = 5$, $m = 3$, тогда $\partial_t^l \partial_y^n U_x \in C(C[0,T]; L_{2,+})$ $\forall l, n$. Опять используя равенство (4.42), находим, что $\partial_t^l \partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T]; H_+^{(-2,0)})$, $\forall l, n$.

Теперь применим неравенство (4.8) для $\psi \equiv \partial_t^l \partial_y^n U_x$ $k = 1$, $n = 5$, $m = 2$, тогда $\partial_t^l \partial_y^n U_{xx} \in C(C[0,T]; L_{2,+})$ $\forall l, n$. Используя равенство (4.42), находим, что $\partial_t^l \partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T]; H_+^{(-1,0)})$, $\forall l, n$.

Наконец, применим неравенство (4.8) для $\psi \equiv \partial_t^l \partial_y^n U_{xx}$ $k = 2$, $n = 5$, $m = 1$, тогда $\partial_t^l \partial_y^n U_{xxx} \in C(C[0,T]; L_{2,+})$ $\forall l, n$. Используя равенство (4.42), находим, что $\partial_t^l \partial_y^n U_{xxxxx} \in C([0,T]; L_{2,+})$, $\forall l, n$.

Далее для любого $m \geq 2$ дифференцируя равенство (4.42) $5(m-1)$ раз по x и применяя индукцию по m аналогичными рассуждениями получаем, что $\partial_t^l \partial_y^n U \in C([0,T]; L_{2,+})$, $\forall l, n$. Это означает, что $\partial_t^l U \in C([0,T]; \widetilde{H}_+^k)$, $\forall l, k$. В частности, из равенства (4.41) следует, что функция U удовлетворяет (4.27) в Π_T^+.

Проинтегрируем равенство (4.41) по частям, перебросив все производные с пробной функции ϕ, тогда получим равенство

$$\iint_{B_T} (U\phi_{xxxx} - U_x \phi_{xxx})\big|_{x=0} dydt = 0. \tag{4.43}$$

Для произвольной функции $\omega(t,y) \in C_0^\infty(B_T)$ выбирая сначала функцию ϕ так, чтобы $\phi_{xxxx}\big|_{x=0} = \omega$, $\phi_{xxx}\big|_{x=0} = 0$ выводим из (4.43) равенство

$$\iint_{B_T} U\omega dydt = 0,$$

откуда следует, что $U(t,0,y) \equiv 0$. Потом выбирая функцию ϕ так, чтобы $\phi_{xxx}\big|_{x=0} = \omega$ аналогичным образом выводим из (4.43), что $U_x(t,0,y) \equiv 0$.

В итоге, построенное решение задачи (4.25), (4.26), (1.30) такое, что $\partial_t^l u \in C([0,T]; \widetilde{H}_+^k)$, $\forall l, k$. В дальнейшем для этой функции используем обозначение $v(t,x,y)$.

Положим $u(t,x,y) \equiv \omega(t,x,y) + v(t,x,y)$. Тогда $\partial_t^l u \in C^\infty([0,T]; \widetilde{H}_+^\infty)$, и эта функция является решением исходной задачи (4.17), (1.28)-(1.30).

Пусть $\widetilde{u}(t,x,y) \equiv u(t,x,y)\eta(x-1)$. Очевидно, что функция $\widetilde{u} \in C^\infty([0,T]; \widetilde{H}^\infty(\mathbb{R}))$ является в Π_T решением задачи типа (4.19)- (4.21), где u_0, f заменены функциями

$\widetilde{u}_0 \equiv u_0\eta(x-1)$.

$$\widetilde{f} \equiv f + 5u_{xxxx}\eta' + 10u_{xxx}\eta'' + 10u_{xx}\eta''' + 5u_x\eta^{(5)} + u_{yyyy}\eta'$$
$$-3bu_{xx}\eta' - 3bu_x\eta'' - bu\eta''' - au\eta'$$

(здесь для краткости опущен аргумент $(x-1)$ у функции η), из того же класса. Тогда из полученных в начале доказательства леммы результатов для задачи (4.19)-(4.21) и очевидной единственности решения в пространстве $C^\infty([0,T];\widetilde{H}^\infty(\Sigma))$ следует, что $\widetilde{u} \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$ и, следовательно $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}_{exp}(\overline{\Sigma}_+))$. Лемма доказана. $\square$

Теперь будем рассматривать слабые решения задачи (4.17), (1.28)-(1.30), которые понимаются в смысле следующего определения.

Определение 4.2. *Пусть $u_0 \in L_{2,+}$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+})$. Функция $u \in L_2(\Pi_T^+)$ называется слабым решением задачи (4.17), (1.28)-(1.30), если для любой функции $\phi \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma_+}))$ такой, что $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0} = 0$, выполнено следующее равенство:*

$$\iiint_{\Pi_T^+}(u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - u\phi_{yyyyx} + bu\phi_{xxx} + bu\phi_{yyx} + au\phi_x + f\phi)dtdxdy + \iint_{\Sigma_+} u_0\phi\big|_{t=0}dxdy = 0. \tag{4.44}$$

Лемма 4.6. *Слабое решение задачи (4.17), (1.28)-(1.30) единственно в пространстве $L_2(\Pi_T^+)$.*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать, что $u \equiv 0$, если $u_0 \equiv 0$ и $f \equiv 0$. В силу таких входных данных интегральное тождество (4.44) записывается в виде

$$\iiint_{\Pi_T^+}(u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - u\phi_{yyyyx} + bu\phi_{xxx} + bu\phi_{yyx} + au\phi_x + f\phi)dtdxdy = 0. \tag{4.45}$$

для произвольной функции $g \in C_0^\infty(\Pi_T^+)$ рассмотрим задачу

$$\phi_t - \phi_{xxxxx} - \phi_{yyyyx} + b\phi_{xxx} + b\phi_{yyx} + a\phi_x = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_T^+, \tag{4.46}$$

$$\phi(T,x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Sigma_+, \phi(tt,0,y) = \phi_x(t,0,y) = \phi_{xx}(t,0,y) = 0, \quad (t,y) \in B_T, \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} &a).\phi(t,x,0)=\phi(t,x,L)=\phi_{yy}(t,x,0)=\phi_{yy}(t,x,L)=0,\\ &b).\phi_y(t,x,0)=\phi_y(t,x,L)=\phi_{yyy}(t,x,0)=\phi_{yyy}(t,x,L)=0, \quad (t,x)\in\Omega_T^+. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Положим $\widetilde{\phi}(t,x,y)\equiv\phi(T-t,x,y)$, $\widetilde{g}(t,x,y)\equiv -g(T-t,x,y)$. Заметим, что $\widetilde{g}\in V_0^\infty(\Pi_T^+)$. Тогда задача (4.46)-(4.48) эквивалентная задаче

$$\widetilde{\phi}_t-\widetilde{\phi}_{xxxxx}-\widetilde{\phi}_{yyyyx}+b\widetilde{\phi}_{xxx}+b\widetilde{\phi}_{yyx}+a\widetilde{\phi}_x=g(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_T^+, \tag{4.49}$$

$$\widetilde{\phi}(T,x,y)=0, \quad (x,y)\in\Sigma_+, \widetilde{\phi}(tt,0,y)=\widetilde{\phi}_x(t,0,y)=\widetilde{\phi}_{xx}(t,0,y)=0, \quad (t,y)\in B_T, \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} &a)\ \widetilde{\phi}(t,x,0)=\widetilde{\phi}(t,x,L)=\widetilde{\phi}_{yy}(t,x,0)=\widetilde{\phi}_{yy}(t,x,L)=0,\\ &b)\ \widetilde{\phi}_y(t,x,0)=\widetilde{\phi}_y(t,x,L)=\widetilde{\phi}_{yyy}(t,x,0)=\widetilde{\phi}_{yyy}(t,x,L)=0, \quad (t,x)\in\Omega_T^+. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Согласно следующей лемме решение задачи (4.49)-(4.51) $\widetilde{\phi}\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ существует, а тогда существует решение $\phi\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ задачи (4.45)-(4.48). Тогда из равенства (4.44) следует, что для произвольной функции $g\in C_)^\infty(\Pi_T^+)$

$$\iiint_{\Pi_T^+} ugdxdydt=0,$$

а это означает, что $u(t,x,y)=0$ почти всюду в Π_T^+. □

Рассмотрим в Π_T^+ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения

$$u_t+(u_{xxxx}+u_{yyyy})_x-b(u_{xx}+u_{yy})_x-au_x=f(t,x,y), \tag{4.52}$$

с начальным условием (1.28), и с граничными условиями (1.30) и

$$u\big|_{x=0}=u_x\big|_{x=0}=u_{xx}\big|_{x=0}=0. \tag{4.53}$$

Лемма 4.7. *Пусть $u_0\equiv 0$, $f\in C_0^\infty(\Pi_T^+)$, тогда существует решение $u\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ задачи (4.52), (1.28), (4.53), (1.30).*

Доказательство. Схема доказательства во многом повторяет Лемму 4.5. Прежде всего, продолжив функцию u_0 и f нулем при $x<0$ рассмотрим в полосе Π_T начально-краевую задачу для уравнения (4.52) с нулевыми начальными условиями (1.28) при $(x,y)\in\Sigma$ и краевыми условиями (1.30) при $(t,x)\in\Omega_T$. Аналогично (4.17) решение этой задачи записывается в виде

$$u(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{i\xi x}\psi_l\hat{u}(t,\xi,l)d\xi,$$

где

$$\hat{u}(t,\xi,l)=\int_0^t \hat{f}(\tau,\xi,l)e^{-i(\xi^5+\xi\lambda_l^2+b\xi^3+b\xi\lambda_l-a\xi)(t-\tau)}d\tau$$

В силу свойств функции f это решение $u\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$. В дальнейшем это решение будем обозначать через $\omega(t,x,y)$.

Пусть $\mu_0(t,y)\equiv-\omega(t,0,y)$, $\mu_1\equiv-\omega_x(t,0,y)$, $\mu_2\equiv-\omega_{xx}(t,0,y)$. Заметим, что функции $\mu_j\in C^\infty(\overline{B}_T)$ и удовлетворяют граничным условиям (1.30). Кроме того, условия совместимости, составляющие условие леммы, гарантируют, что $\partial_t^l\mu_j(0,y)\equiv 0$, $\forall l$. В Π_T^+ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t+(u_{xxxx}+u_{yyyy})_x-b(u_{xx}+u_{yy})_x-au_x=0, \tag{4.54}$$

$$u\big|_{t=0}=0, u\big|_{x=0}=\mu_0(t,y), u_x\big|_{x=0}=\mu_1(t,y), u_{xx}\big|_{x=0}=\mu_2(t,y), \tag{4.55}$$

и с граничными условиями (1.30).

Пусть $\Psi(t,x,y)\equiv\mu_0(t,y)\eta(1-x)+\mu_1(t,y)x\eta(1-x)+\mu_2(t,y)x^2\eta(1-x)/2$, $F(t,x,y)\equiv-\Psi_{xxxxx}-\Psi_{xxxxy}+b\Psi_{xxx}+b\Psi_{xyy}+a\Psi_x-\Psi_t$, $U(t,x,y)\equiv u(t,x,y)-\Psi(t,x,y)$, тогда задача (4.54), (4.55), (1.30) с граничными условиями (1.30) эквивалентна задаче (4.52), (1.28), (4.53), (1.30) для функции U, $u_0\equiv 0$, $f\equiv F$:

$$U_t+(U_{xxxx}+U_{yyyy})_x-b(U_{xx}+U_{yy})_x-aU_x=f(t,x,y), \tag{4.56}$$

$$\begin{gathered} a)\ U(t,x,0)=U(t,x,L)=u_{yy}(t,x,0)=U_{yy}(t,x,L)=0,\\ b)\ U_y(t,x,0)=U_y(t,x,L)=U_{yyy}(t,x,0)=U_{yyy}(t,x,L)=0. \end{gathered} \tag{4.57}$$

$$U\big|_{x=0}=U_x\big|_{x=0}=U_{xx}\big|_{x=0}=0. \tag{4.58}$$

Очевидно, что $F\in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$ и $\partial_t^lF(0,x,y)\equiv 0$, $\forall l$.

Далее используем метод Галёркина. Пусть $\{\varphi_j(x):j=1,2,3...\}$- система линейно независимых функций, полная в пространстве $\{\varphi\in H^5(\mathbb{R}_+):\varphi(0)=\varphi'(0)=0\}$. Мы будем искать приближенные решения в виде

$$U_k(t,x,y)=\sum_{j,l=1}^k c_{kjl}(t)\varphi_j(x)\psi_l(y)$$

через условия

$$\begin{gathered} \iint[U_{tk}\varphi_i\psi_m-U_k(\varphi_i^{(5)}\psi_m+\varphi_i^{(4)}\psi_m'-b\varphi_i'''\psi_m-b\varphi_i''\psi_m'-a\varphi_i\psi_m])dxdy\\ -\iint F\varphi_i\psi_m dxdy=0, i,m=1,2,3,...,k, t\in[0,T], \end{gathered} \tag{4.59}$$

Умножим (4.59) на $2c_{kim}(t)$, просуммируем по i,m, и получим

$$2\iint[U_{tk}U_k+U_k(-(U_{kxxxx}+U_{kyyyy})_x+b(U_{kxx}+U_{kyy})_x+aU_kU_{kx})]dxdy \\ 2\iint FU_kdxdy \tag{4.60}$$

откуда после интегрирования по частям, в силу $U_k\big|_{x=0}=U_{kx}\big|_{x=0}=0$, находим, что

$$\frac{d}{dx}\iint U_k^2dxdy+\int_0^L U_{xx}^2\big|_{x=0}=2\iint FU_kdxdy. \tag{4.61}$$

Так как (4.32) $U_k\big|_{t=0}=0$, из равенства (4.61) следует неравенство (4.35). Далее по аналогии с Леммой 4.5 находим, что для любых n и l

$$\|\partial_t^l\partial_y^nU_k\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})}\le\|\partial_t^l\partial_y^nF\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}. \tag{4.62}$$

Из неравенства (4.62), в частности следует, что из последовательности k можно извлечь подпоследовательность k' такую, что для любых n и l при $k'\to+\infty$

$\partial_t^l\partial_y^nU_{k'}\to\partial_t^l\partial_y^nU$ слабо в $L_2(0,T;L_{2,+})$

Аналогично находим, что $\partial_t^l\partial_y^nU\in C([0,T];L_{2,+})$ для любых n и l, $U\big|_{t=0}=0$ и в случае a). $\partial_y^{2m}U\big|_{y=0}=\partial_y^{2m}U\big|_{y=L}=0$, а в случае b). $\partial_y^{2m+1}U\big|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}U\big|_{y=L}=0$, $\forall m$. Далее по аналогии находим, что для любой функции $\phi\in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^4)$, ϕ_t, ϕ_{xxxxx}, $\phi_{yyyyx}\in L_\infty(0,T;L_{2,+})$ $\phi\big|_{t=T}=\phi\big|_{x=0}=\phi_x\big|_{x=0}=0$ выполнено следующее равенство:

$$\iiint_{\Pi_T^+}(u\phi_t-u\phi_{xxxxx}-u\phi_{yyyyx}+bu\phi_{xxx} \\ +bu\phi_{yyx}+au\phi_x+F\phi)dtdxdy=0. \tag{4.63}$$

из (4.66) следует, что в пространстве обобщенных функций над областью Π_T^+

$$U_{xxxxx}=-U_t-U_{yyyyx}-bU_{xxx}-bU_{yyx}-U_x+F. \tag{4.64}$$

Используя неравенство (4.64) и неравенство (4.8) и рассуждая аналогично Лемме 4.5, выводим, что $\partial_t^l\in C([0,T];\widetilde{H}_+^k)$ $\forall l,k$. В частности, из равенства (4.63) следует, что функция U удовлетворяет уравнению (4.27) в Π_T^+.

Проинтегрируем равенство (4.66) по частям, перебросив все производные от пробной функции ϕ, в итоге получаем равенство

$$\iint_{B_T}(-U\phi_{xxxx}+U_x\phi_{xxx}-U_{xx}\phi_{xx}+bU\phi_{xx})\big|_{x=0}dydt=0. \tag{4.65}$$

Для произвольной функции $\omega(t,y)\in C_0^\infty(B_T)$ выбирая сначала функцию ϕ так, чтобы $\phi_{xxxx}\big|_{x=0}=\omega$, $\phi_{xxx}\big|_{x=0}=\phi_{xx}\big|_{x=0}=0$ выводим из (4.65), что $U_x(t,0,y)\equiv0$.

Наконец, выбирая функцию ϕ так, что бы $\phi_{xx}\big|_{x=0} = \omega$, выводим, что $U_{xx}(t,0,y) \equiv 0$.

В итоге, построено решение задачи (4.54), (4.55), (1.30) такое, что

$$\partial_t^l u \in C([0,T];\widetilde{H}_+^k), \quad \forall l,k.$$

В дальнейшем для этой функции используем обозначение $v(t,x,y)$.

Положим $u(t,x,y) \equiv \omega(t,x,y) + v(t,x,y)$. Тогда $\partial_t^l u \in C([0,T];\widetilde{H}_+^k)$, $\forall l,k,$ то есть $u \in C([0,T];\widetilde{H}_+^\infty)$, а эта функция является решением исходной задачи задачи (4.52), (1.28), (4.53), (1.30).

Введя функцию $\widetilde{u}(t,x,y) \equiv u(t,x,y)\eta(x-1)$, аналогично Лемме 4.5 получаем, что $u \in C^\infty([0,T];\widetilde{S}(\overline{\Sigma}_+))$. $\square$

Замечание 4.1. *В следующих леммах этого раздела мы сначала рассмотрим гладкие решения, построенные в Лемме 4.5, а затем, получим общий случай за счет предельного перехода на основе полученных ранее оценок.*

Лемма 4.8. *Пусть $\psi(x)$- допустимая весовая функция, такая, что ее производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией, $u_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, где $f_0 \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$, $f_1 \in L_{4/3}(0,T;L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}})$. Тогда существуют единственное слабое решение задачи (4.17), (1.28)-(1.30) принадлежащее пространству $X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ и функция $\mu_2 \in L_2(B_T)$ такие, что для любой функции $\phi \in L_\infty(0,T;\widetilde{H}_+^4)$, ϕ_t, ϕ_{xxxxx}, $\phi_{yyyyx} \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$ $\phi\big|_{t=T} = \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} \equiv 0$, выполнено следующее равенство:*

$$\begin{gathered}\iiint_{\Pi_T^+} (u\phi_t - u\phi_{xxxxx} - u\phi_{yyyyx} + bu\phi_{xxx} \\ + bu\phi_{yyx} + au\phi_x + f_0\phi - f_1\phi_x)dtdxdy \\ + \iint_{\Sigma_+} u_0\phi\big|_{t=0}dxdy - \iint_{B_T} \mu_2\phi_{xx}\big|_{x=0}dydt = 0.\end{gathered} \tag{4.66}$$

Кроме того, при $t \in (0;T]$

$$\|u\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_t^+)} + \|\mu_2\|_{L_2(B_t)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{L_{2,+}^{\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L_{2,+}^{\psi(x)})} + \|f_1\|_{L_{4/3}(0,t;L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}})}\big) \tag{4.67}$$

и для почти всех $t \in (0;T]$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy + \psi(0)\int_0^L \mu_2^2 dy \\
&+\iint [5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 3bu_x^2 + bu_y^2 - au^2]\psi' dxdy \\
&-\iint [5u_x^2 + bu^2]\psi^{(3)} dxdy + \iint u^2\psi^{(5)} dxdy \\
&= 2\iint f_0 u\psi dxdy - \iint 2f_1(u\psi)_x dxdy.
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

Если $f_1 \equiv 0$, *то тогда в равенстве (4.68) можно положить* $\psi \equiv 1$.

Доказательство. Умножим (4.17) на $2u(x,y,t)\psi(x)$, проинтегрируем по Σ_+

$$\iint 2uu_t\psi dxdy = \iint (u^2)_t\psi dxdy = \frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy,$$

$$\iint 2u_{xxxxx}u\psi dxdy = -\iint 5u_{xx}^2\psi' dxdy + \iint 5u_x^2\psi''' dxdy$$

$$-\iint u\psi^{(5)} dxdy - \int_0^t [\psi u_{xx}^2]\big|_{x=0} dy,$$

$$\iint 2u_{yyyyx}u\psi dxdy = -\iint u_{yy}^2\psi' dxdy$$

$$\iint 2u_{xxx}u\psi dxdy = \iint 3u_x^2\psi' dxdy - \iint u^2\psi''' dxdy,$$

$$\iint 2u_{xyy}u\psi dxdy = \iint u_y^2\psi' dxdy,$$

$$\iint 2u_x u\psi dxdy = -\iint u^2\psi' dxdy,$$

$$\iint 2fu\psi dxdy = \iint 2f_0 u\psi dxdy - \iint 2f_1(u\psi)_x dxdy.$$

В итоге, получим (4.68) где $\mu_2 \equiv u_{xx}\big|_{x=0}$. Из (4.79) следует, что (для произвольного $\varepsilon > 0$)

$$
\begin{aligned}
&|\iint f_1(u\psi)_x dxdy| \le c\|(|u_x| + |u|)(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|_{L_{2,+}}\|f_1\psi^{3/4}(\psi')^{-1/4}\|_{L_{2,+}} \\
&\le c_1\big[\|(|u_{xx} + u_{yy}|)(\psi')^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1/2}\|u\psi^{1/2}\|_{L_{2,+}}^{1/2} + \|u\psi^{1/2}\|_{L_{2,+}}\big]\|f_1\psi^{3/4}(\psi')^{-1/4}\|_{L_{2,+}} \\
&\le \varepsilon\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\|f_1\|^{4/3}_{L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}}}(\iint u^2\psi dxdy)^{1/3} \\
&+c_1\|f_1\|_{L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}}}(\iint u^2\psi dxdy)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

и, согласно (4.13),

$$\iint u_x^2(\psi' + |\psi'''|)dxdy \le \varepsilon \iint u_{xx}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u^2\psi dxdy. \tag{4.70}$$

Кроме того,

$$\iint u_y^2\psi' dxdy = -\iint uu_{yy}\psi' dxdy \le \varepsilon \iint u_{yy}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u^2\psi dxdy. \tag{4.71}$$

Из (4.68)-(4.70), следует, что для гладких решений при $t \in (0;T]$

$$\begin{gathered}\|u\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_t^+)} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(B_t)} \\ \le c\big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L_2^{\psi(x)})} + \|f_1\|_{L_1(0,t;L_2^{\psi(x)})}\big).\end{gathered} \tag{4.72}$$

В общем случае результаты этой леммы получаются за счет замыкания. $\square$

Лемма 4.9. *Пусть $\psi(x)$- допустимая весовая функция такая, что ее производная $\psi'(x)$ тоже является допустимой весовой функцией, $u_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \equiv f_0 + f_1$, где $f_0 \in L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})$, $f_1 \in L_2(0,T;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})$. Тогда существуют сильное решение $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ задачи (4.17), (1.28)-(1.30) и функция $\mu_4 \in L_2(B_T)$ такие, что для любого $t \in (0,T)$*

$$\begin{gathered}\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_t^+)} + \|\mu_4\|_{L_2(B_t)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_2(0,t;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})} \\ + \|f_1\|_{L_2(0,t;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})}\big)\end{gathered} \tag{4.73}$$

и для почти всех $t \in (0,T)$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2)\psi dxdy + \int_0^L (\mu_4^2\psi + 4\mu_4 u_{xxx}\psi' + 2\mu_4 u_{xx}\psi'' \\
-2b\mu_4 u_{xx}\psi - 3u_{xxx}^2\psi'' - 2u_{xxx}u_{xx}\psi''' + 4bu_{xxx}u_{xx}\psi' \\
+u_{xx}^2\psi^{(4)} - 4bu_{xx}^2\psi'' + (b^2+a)u_{xx}^2\psi)\big|_{x=0}dy \\
+\iint (5u_{xxxx}^2 + 6u_{xxyy}^2 + 8bu_{xxx}^2 + 6bu_{xxy}^2 \\
+u_{yyyy}^2 + 4bu_{xyy}^2 + 2bu_{yyy}^2 + \\
+(3b^2-a)u_{xx}^2 + 4b^2u_{xy}^2 - abu_x^2 + (b^2-a)u_{yy}^2)\psi' dxdy \\
+\iint (-5u_{xxx}^2 - 6bu_{xx}^2 - 5u_{xyy}^2 - bu_{yy}^2 - b^2u_x^2 - 5bu_{xy}^2 - b^2u_y^2)\psi''' dxdy \\
+\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2)\psi^{(5)} dxdy \\
= 2\iint (f_{0xx}u_{xx} + f_{0yy}u_{yy} + bf_{0x}u_x + bf_{0y}u_y)\psi dxdy \\
-2\int_0^L (f_0(u_{xx}\psi)_x - f_{0x}u_{xx}\psi)\big|_{x=0}dy \\
+2\iint (f_1[(u_{xx}\psi)_{xx} + u_{yyyy}\psi - b(u_x\psi)_x - bu_{yy}\psi])dxdy.
\end{gathered} \tag{4.74}$$

Если $f_1 \equiv 0$ *тогда в тождестве (4.74) можно считать* $\psi(x) = 1$.

Доказательство. Умножим (4.17) на $2(u_{xx}\rho(x))_{xx} + 2u_{yyyy}\rho(x) - 2b(u_x\rho(x))_x - 2bu_{yy}\rho(x)$, где либо $\rho \equiv \psi(x)$, либо $\rho(x) \equiv 1$ и проинтегрируем на Σ_+.

$$\begin{gathered}
\iint 2f_0(u_{xx}\rho)_{xx}dxdy = \iint 2f_0(u_{xxxx}\rho + 2u_{xxx}\rho' + u_{xx}\rho'')dxdy \\
= \iint f_{0xx}u_{xx}\rho dxdy - 2\int_0^L (f_0(u_{xx}\rho)_x - f_{0x}u_{xx}\rho)\big|_{x=0}dy; \\
\iint 2f_0 2u_{yyyy}\rho dxdy = \iint f_{0yy}u_{yy}dxdy,
\end{gathered}$$

$$-\iint 2bf_0(u_x\rho)_x dxdy = -\iint 2bf_0(u_{xx}\rho + u_x\rho')dxdy = -\iint 2bf_{0x}u_x dxdy,$$

$$-\iint 2bf_0u_{yy}\rho dxdy = \iint bf_{0y}u_y dxdy;$$

$$\iint (2f_1[(u_{xx}\rho)_{xx} + 2u_{yyyy}\rho - 2b(u_x\rho)_x - 2bu_{yy}\rho])dxdy;$$

$$\iint 2u_t(u_{xx}\rho)_{xx}dxdy = \frac{d}{dt}\iint u_{xx}^2\rho dxdy,$$
$$\iint 2u_t u_{yyyy}\rho dxdy = \frac{d}{dt}\iint u_{yy}^2\rho dxdy,$$
$$-\iint 2bu_t(u_x\rho)_x dxdy = \frac{d}{dt}\iint bu_x^2\rho dxdy,$$
$$-\iint 2bu_t u_{yy}\rho dxdy = \frac{d}{dt}\iint bu_y^2\rho dxdy;$$

$$\iint 2au_x[(u_{xx}\rho)_{xx} + 2u_{yyyy}\rho - 2b(u_x\rho)_x - 2bu_{yy}\rho]dxdy$$
$$= \int_0^L au_{xx}^2\rho\big|_{x=0}dy - a\iint [u_{xx}^2 + bu_x^2 - u_{yy}^2]\rho' dxdy$$
$$\iint 2u_{xxxxx}u_{xxxx}\rho dxdy = -\int_0^L (u_{xxxx}^2\rho)|_{x=0}dy - \iint u_{xxxx}^2\rho' dxdy,$$

$$\iint 4u_{xxxxx}u_{xxx}\rho' dxdy = \int_0^L [4u_{xxx}u_{xxxx} - 2u_{xxx}^2\rho']|_{x=0}dy + \iint [2u_{xxx}^2\rho' - 4u_{xxxx}^2\rho]dxdy,$$

$$\iint 2u_{xxxxx}u_{xx}\rho'' dxdy = \int_0^L [2u_{xxxx}u_{xx}\rho'' - u_{xxx}^2\rho'' - 2u_{xxx}u_{xx}]|_{x=0}dy$$
$$+ \iint u_{xxx}^2\rho''' dxdy + \iint 2u_{xxx}^2\rho''' dxdy + \iint u_{xx}^2\rho^{(4)} dxdy$$

$$\iint 2bu_{xxx}(u_{xx}\rho)_{xx}dxdy = \iint 2bu_{xxx}(u_{xxxx}\rho + 2u_{xxx}\rho' + u_{xx}\rho'')dxdy$$
$$= -b\int_0^L [u_{xxx}^2\rho + u_{xx}^2\rho'']|_{x=0}dy - \iint 2bu_{xxx}^2\rho' dxdy - \iint bu_{xx}^2\rho''' dxdy$$

$$\iint 2u_{yyyy}bu_{xxx}\rho dxdy = \iint 2u_{yy}bu_{xxxyy}\rho dxdy$$
$$= \iint 3bu_{yyx}^2\rho' dxdy - \iint bu_{yy}^2\rho''' dxdy$$

$$-\iint 2b^2u_{xxx}(u_x\rho)_x dxdy = -\iint 2b^2u_{xxx}(u_{xx}\rho + u_x\rho')dxdy$$
$$= -\iint b^2(u_{xx}^2)_x\rho dxdy - \iint 2b^2u_{xxx}u_x\rho dxdy$$
$$= \int_0^L b^2u_{xx}^2\big|_{x=0}dy\rho + \iint b^2u_{xx}^2\rho' dxdy + \int_0^L 2b^2u_{xx}u_x\rho\big|_{x=0}dy$$
$$+ \iint 2b^2u_{xx}^2\rho dxdy + \iint 2b^2u_{xx}u_x\rho' dxdy$$
$$= \int_0^L b^2u_{xx}^2\rho\big|_{x=0}dy + \iint b^2u_{xx}^2\rho' dxdy + \int_0^L 2b^2u_{xx}u_x\rho\big|_{x=0}dy$$
$$+ \iint 2b^2u_{xx}^2 dxdy - \int_0^L b^2u_x^2\rho'\big|_{x=0}dy - \iint b^2u_x^2\rho'' dxdy$$

$$-\iint 2b^2u_{xxx}u_{yy}\rho dxdy = \iint 2b^2u_{xxxy}u_y\rho dxdy$$
$$= -\int_0^L 2b^2u_{xxy}u_y\rho\big|_{x=0}dy - \iint b^2(u_{xy}^2)_x\rho dxdy - \iint 2b^2u_{xxy}u_y\rho dxdy$$
$$= -\int_0^L 2b^2u_{xxy}u_y\rho\big|_{x=0}dy + \int_0^L b^2u_{xy}^2\rho\big|_{x=0}dy + \iint b^2u_{xy}^2\rho' dxdy + \int_0^L 2b^2u_{xy}u_y\rho\big|_{x=0}dy$$
$$+ \iint 2b^2u_{xy}^2\rho dxdy - \int_0^L b^2u_y^2\rho'\big|_{x=0}dy - \iint b^2u_y^2\rho'' dxdy$$

$$\iint 2bu_{yyx}(u_{xxx}\rho + 2u_{xxx}\rho' + u_{xx}\rho'')dxdy$$
$$= -\iint 2bu_{yx}u_{xxxy}\rho dxdy - \iint 4bu_{yx}u_{xxxy}\rho' - \iint 2bu_{yx}u_{xxy}\rho'' dxdy$$
$$=$$

$$\iint 2bu_{yyx}u_{yyyy}\rho dxdy = -\iint 2bu_{yyyx}u_{yyy}\rho dxdy = -\iint 2b(u_{yyy}^2)_x\rho dxdy$$
$$= \int_0^L 2bu_{yyy}^2\rho\big|_{x=0}dy - \iint 2bu_{yyy}^2\rho' dxdy$$

$$-\iint 2b^2u_{yyx}(u_x\rho)_x dxdy = -\iint 2b^2u_{yyx}(u_{xx}\rho + u_x\rho')dxdy$$
$$= -\iint 2b^2u_{yx}(u_{xxy}\rho + u_y\rho')dxdy = -\iint b^2(u_{xy})_x^2\rho dxdy - \iint b^2(u_y^2)_x\rho' dxdy$$
$$= \iint b^2u_{xy}^2\rho' dxdy + \iint b^2u_y^2\rho'' dxdy$$

$$-\iint 4b^2 u_{yyx}u_{yy}\rho dxdy = -\iint 2b^2(u_{yy}^2)_x\rho dxdy = \iint 2b^2 u_{yy}^2\rho' dxdy$$

Таким образом мы получаем тождество (4.74) для $\mu_4 \equiv u_{xxxx}|_{x=0}$, где ψ заменено на ρ. Где, согласно (4.14) для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^L u_{xxx}^2\big|_{x=0}dy \le \varepsilon \iint u_{xxxx}^2\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint u_{xx}^2\psi dxdy, \tag{4.75}$$

Аналогично (4.70) и (4.71)

$$\begin{gathered}\iint (u_{xxx}^2 + u_{yyy}^2 + u_{xyy}^2 + u_{xxy}^2)\psi' dxdy \le \varepsilon \iint (u_{xxxx}^2 + u_{yyyy}^2 + u_{xxyy}^2)\psi' dxdy \\ +c(\varepsilon)\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi dxdy,\end{gathered} \tag{4.76}$$

и

$$\begin{gathered}|\iint f_1[(u_{xx}\psi)_{xx} + u_{yyyy}\psi]dxdy| \le \varepsilon \iint (u_{xxxx}^2 + u_{yyyy}^2 + u_{xx}^2)\psi' dxdy \\ +c(\varepsilon)\iint f_1^2\psi^2(\psi')^{-1}dxdy.\end{gathered} \tag{4.77}$$

Из неравенств (4.72), (4.75)-(4.77) и тождества (4.74) следует, что для гладкого решения при $t \in (0,T]$

$$\begin{gathered}\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_t^+)} + \|u_{xxxx}\big|_{x=0}\|_{L_2(B_t)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_2(0,t;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})} \\ +\|f_1\|_{L_2(0,t;L_{2,+}^{\psi^2(x)/\psi'(x)})}\big).\end{gathered} \tag{4.78}$$

$\square$

Лемма 4.10. *Пусть условие Леммы 4.9 выполнено при $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ и некоторого $\alpha > 0$. Пусть $F \in C^1(\mathbb{R}), F(0) = 0$. Рассмотрим сильное решение $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)$ задачи (4.17), (1.28)-(1.30). Тогда для почти всех $t \in (0,T)$*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint F^*(u)\rho dxdy + \iint F'(u)u_x(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\rho dxdy + \\ \iint F(u)(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\rho' dxdy \\ -a\iint F^*(u)\rho' dxdy = \iint F(u)f\rho dxdy.\end{gathered} \tag{4.79}$$

где либо $\rho(x) = 1$, либо $\rho(x)$ допустимая весовая функция такая, что $\rho(x) \le c\psi(x)$ $\forall x \ge 0$.

Доказательство. В гладком случае равенство (4.79) можно вывести умножая (4.17) на $F(u(t,x,y))\rho(x)$ и интегрируя.

$$\iint u_t F(u)\rho dxdy = \frac{d}{dt}\iint F^*(u)\rho dxdy,$$

$$\iint u_{xxxxx}F(u)\rho dxdy = -\iint (F(u))_x u_{xxxx}\rho dxdy - \iint F(u)u_{xxxx}\rho' dxdy$$

$$= -\iint F'(u)u_x u_{xxxx}dxdy - \iint F(u)u_{xxxx}\rho' dxdy,$$

$$\iint u_{yyyyx}F(u)\rho dxdy = -\iint (F(u))_x u_{yyyy}\rho dxdy - \iint F(u)u_{yyyy}\rho' dxdy$$

$$= -\iint F'(u)u_x u_{yyyy}\rho dxdy - \iint F(u)u_{yyyy}\rho' dxdy,$$

$$\iint u_{xxx}F(u)\rho dxdy = -\iint (F(u))_x u_{xx}\rho dxdy - \iint F(u)u_{xx}\rho' dxdy$$

$$= -\iint F'(u)u_x u_{xx}\rho dxdy - \iint F(u)u_{xx}\rho' dxdy,$$

$$\iint u_{yyx}F(u)\rho dxdy = -\iint (F(u))_x u_{yy}\rho dxdy - \iint F(u)u_{yy}\rho' dxdy$$

$$= -\iint F'(u)u_x u_{yy}\rho dxdy - \iint F(u)u_{yy}\rho' dxdy,$$

$$\iint u_x F(u)\rho dxdy = -\iint (F(u))_x u\rho dxdy - \iint F(u)u\rho' dxdy$$

$$= -\iint F'(u)u_x u\rho dxdy - \iint F(u)u\rho' dxdy.$$

В общем случае это тождество можно получить замыканием, что возможно, поскольку $X^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+) \subset L_\infty(\Pi_T^+)$ и $\psi \sim \psi'$. $\square$

4.2 Существование решений

В этом разделе будет доказано существование решений из первых двух теорем.

Лемма 4.11. *Пусть $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$. $|F'(u)| \le c \ \forall u \in \mathbb{R}$. $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ для некоторого $\alpha > 0$, $u_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f \in L_1(0,T; L_{2,+}^{\psi(x)})$. Тогда задача (1.27)-(1.30) имеет единственное решение $u \in X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$.*

Доказательство. Используем принцип сжимающих отображений. Для $t_0 \in (0,T]$ зададим отображение Λ на $X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ следующим образом: $u = \Lambda v \in X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ - это слабое решение линейной задачи

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x = f(t,x,y) - (F(v))_x, \qquad (4.80)$$

в $\Pi_{t_0}^+$ и граничные условия (1.28)-(1.30).

Заметим, что $\psi^{3/2}(\psi')^{-1/2} \le c\psi$, $|F(v)| \le c|v|$. Таким образом, из Леммы 4.8 следует, что существует отображение Λ. Кроме того, для функций $v, \widetilde{v} \in X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$ используя неравенство (4.67) можно получить:

$$
\begin{gathered}
\|\Lambda v\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)} \le c(T)\big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L_2^{\psi(x)})} + \|f_1\|_{L_{4/3}(0,T;L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}})} \\
\le c(T)\big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L_2^{\psi(x)})} + \|v\|_{L_{4/3}(0,T;L_{2,+}^{\psi^{3/2}(x)(\psi'(x))^{-1/2}})} \\
\le c(T)\big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}} + \|f_0\|_{L_1(0,t;L_2^{\psi(x)})} + (\int_0^t (\iint v^2\psi dxdy)^{4/6} d\tau)^{3/4} \qquad (4.81)\\
\le c(T)(\|u_0\|_{L_{2,+}^{\psi(x)}} + \|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})} + t_0^{3/4}\|v\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)}), \\
\|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)} \le c(T)t_0^{3/4}\|v - \widetilde{v}\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)}.
\end{gathered}
$$

откуда сначала удается получить локальный результат. Далее, поскольку постоянная в правой части приведенных выше неравенств равномерна относительно u_0 и f, можно стандартными рассуждениями распространить решение на весь отрезок времени $[0, T]$. □

Доказательство Теоремы 1.6. Для $h \in (0; 1]$ рассмотрим множество начально-краевых задач

$$u_t - (u_{xxxx} + u_{yyyy})_x + b(u_{xx} + u_{yy})_x + au_x + F_h'(u)u_x = f_h(t, x, y), \tag{4.82}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_{0h}(x), \tag{4.83}$$

с граничными условиями (1.29) и (1.30), где

$$f_h(t, x, y) \equiv f(t, x, y)\eta(1/h - x), \quad u_{0h}(x, y) \equiv u_0(x)\eta(1/h - x). \tag{4.84}$$

$$F_h'(u) \equiv F'(u)\eta(2 - h|u|), \quad F_h(u) \equiv \int_0^u F_h'(\theta)d\theta. \tag{4.85}$$

Заметим, что $F_h(u) = F(u)$ если $|u| \le 1/h$, $F_h'(u) = 0$ если $|u| \ge 2/h$, $|F_h'(u)| \le c(h)$ $\forall u$ и функция F_h удовлетворяет неравенству (1.34) равномерно по h.

Из Леммы 4.11 следует, что существует единственное решение рассматриваемой задачи $u_h \in X^{e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$ для любого $\alpha > 0$.

Далее, устанавливаем соответствующие оценки для функций u_h равномерно по h (для простоты опускаем нижний индекс h на промежуточных шагах). Сперва, заметим, что $F'(u)u_x \in L_1(0, T; L_{2,+}^{\psi(x)})$ и условие Леммы 4.8 выполнено (для $f_1 \equiv$

0). Тогда из равенства (4.68) следует, что для $\rho(x) \equiv 1$ и для $\rho(x) \equiv \psi$:

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\iint u^2\rho dxdy + \rho(0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy \\
+\iint [5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 3bu_x^2 + bu_y^2 - au^2]\rho' dxdy \\
-\iint [5u_x^2 + bu^2]\rho^{(3)}dxdy + \iint u^2\rho^{(5)}dxdy \\
= 2\iint fu\rho dxdy + \iint (F'(u)u)^*\rho' dxdy.
\end{gathered} \tag{4.86}
$$

Выбираем $\rho \equiv 1$ равномерно по h и L мы получаем

$$
\|u_h\|_{C([0,T];L_{2,+})} \le c. \tag{4.87}
$$

Пусть $\rho \equiv \psi$. Заметим, что равномерно по h

$$
|(F_h'(u)u)^*| \le c|u|^{p+2}. \tag{4.88}
$$

Пусть $q = p+2$, $s = s_0(q)$ из (4.11), $\psi_1(x) \equiv \psi'(x)$, $\psi_2(x) \equiv (\psi'(x))^{\frac{2(1-qs)}{q(1-2s)}}$ ($qs = p/4 < 1$). Применяя (4.12), мы получаем, что

$$
\begin{gathered}
\iint |u|^{p+2}\psi' dxdy = \iint |u|^q\psi_1^{qs}\psi_2^{q(1/2-s)}dxdy \\
\le c\big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\big)^{qs}\big(\iint u^2\psi_2 dxdy\big)^{q(1/2-s)} \\
= c\big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\big)^{qs}\big(\iint (u^2\psi')^{\frac{2(1-qs)}{q(1-2s)}}u^{\frac{2(q-2)}{q(1-2s)}}dxdy\big)^{q(1/2-s)} \\
\le c\big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi_1 dxdy\big)^{p/4}\big(\iint u^2\psi' dxdy\big)^{(4-p)/4}\big(\iint u^2 dxdy\big)^{p/2},
\end{gathered} \tag{4.89}
$$

где

$$
q(\frac{1}{2} - s)\frac{2(1-qs)}{q(1-2s)} = 1 - qs = \frac{p-4}{4}, \quad q(\frac{1}{2} - s)\frac{q-2}{q(1-2s)} = \frac{q-2}{2} = \frac{p}{2}.
$$

Так как оценка нормы функции u_h в пространстве $L_{2,+}$ уже получена в (4.87), то из (4.86), (4.88) и (4.89) следует, что (равномерно по h):

$$
\|u_h\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le c. \tag{4.90}
$$

Используем (4.86), где ρ заменено на $\rho_0(x-x_0)$ для любого $x_0 \geq 0$, то есть:

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\rho_0(x-x_0)dxdy + \rho_0(x-x_0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy$$
$$+\iint[5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 3bu_x^2 + bu_y^2 - au^2]\rho_0(x-x_0)'dxdy$$
$$-\iint[5u_x^2 + bu^2]\rho_0(x-x_0)^{(3)}dxdy + \iint u^2\rho_0(x-x_0)^{(5)}dxdy$$
$$= 2\iint fu\rho_0(x-x_0)dxdy + \iint(F'(u)u)^*\rho_0(x-x_0)'dxdy.$$

Тогда из (1.31) следует, что

$$\lambda^+(u_{hxx};T) + \lambda^+(u_{hyy};T) \leq c. \tag{4.91}$$

Пусть $\Sigma_n = (0,n)\times(0,L)$, $Q_n = (n,n+1)\times(0,L)$. Применим интерполяционное неравенство из книги [13] для области Q_n, и получаем, что:

$$\|f\|_{L_\infty(Q_n)} \leq c(L)(\iint_{Q_n}(f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + f^2)dxdy)^{1/4}(\iint_{Q_n} f^2dxdy)^{1/4},$$

тогда согласно (4.90) и (4.91), равномерно по h

$$\|u_h\|_{L_4(0,T;L_\infty(\Sigma_n))} \leq c(L)\|u_h\|^{1/2}_{C([0,T];L_{2,+})}\|u_h\|^{1/2}_{L_2(0,T;H^2(\Sigma_n))} \leq c(n,L), \tag{4.92}$$

и, следовательно, также равномерно по h

$$\begin{aligned}\|F_h(u_h)\|_{L_{4/p}(0,T;L_2(\Sigma_n))} &\leq c\||u_h|^{p+1}\|_{L_{4/p}(0,t;L_2(\Sigma_n))}\\ &\leq c\|u_h\|^p_{L_4(0,T;L_\infty(\Sigma_n))}\|u_h\|^p_{C([0,T];L_{2,+})} \leq c(n,L).\end{aligned} \tag{4.93}$$

Тогда из уравнения (1.27) следует, что (равномерно по h)

$$\|u_{ht}\|_{L_1(0,T;H^{-5}(\Sigma_n))} \leq c(n,L). \tag{4.94}$$

$u_h \to u$ *-слабо в $L_\infty(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$
$u_{hxx}, u_{hyy} \to u_{xx}, u_{yy}$ слабо в $L_2(0,T;L_{2,+}^{\psi'(x)})$
$u_h \to u$ сильно в $L_{max(2,4/(4-p))}(0,T;L_2(\Sigma_n))\ \forall n$

Пусть ϕ пробная функция удовлетворяет Определению (4.1) и имеет носитель $supp\phi \in \overline{\Sigma}_n$. Тогда, так как

$$|F_h(u_h) - F_h(u)| \leq c(|u_h|^p + |u|^p)|u_h - u|, \tag{4.95}$$

то используя (4.94), мы получаем, что

$$\int_0^T \iint_{\Sigma_n} |F_h(u_h) - F_h(u)|dxdydt \le c(n)\int_0^T (\|u_h\|^p_{L_\infty(\Sigma_n)} + \|u_h\|^p_{L_\infty(\Sigma_n)})\|u_h - u\|_{L_2(\Sigma_n)}dt$$
$$\le c(n)(\|u_h\|^p_{L_4(0,T;L_\infty(\Sigma_n))} + \|u\|^p_{L_4(0,T;L_\infty(\Sigma_n))})\|u_h - u\|_{L_{4/(4-p)}(0,T;L_2(\Sigma_n))} \to 0.$$

Кроме того,

$$\int_0^T \iint_{\Sigma_n} |F_h(u_h) - F_h(u)|dxdydt \to 0,$$

так как аналогично (4.93) $F_h(u)$, $F(u) \in L_1((0,T)\times\Sigma_n)$. Таким образом, предельная функция $u \in L_\infty(0,T;L^{\psi(x)}_{2,+})$, $u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi'(x)}_+)$, $\lambda^+(u_{xx};T)$.

Далее, заметим, что для любой пробной функции из Определения (4.1) имеет место $F(u)\phi_x \in L_\infty(0,T;L_{1,+})$ если $p \le 1$. В случае $p > 1$

$$\|F(u)\phi\|_{L_1(\Pi_T^+)} \le c\int_0^T \|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^p_{L_{\infty,+}} \iint |u\phi_x|(\psi')^{-p/4}\psi^{-p/4}dxdydt$$
$$\le c_1\int_0^T \Big[\Big(\iint (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi' dxdy\Big)^{p/4}\Big(\iint u^2\psi dxdy\Big)^{(p+2)/4} \tag{4.96}$$
$$\le \Big(\iint \phi_x^2(\psi')^{-p/2}\psi^{-(1+p)/2}dxdy\Big)^{1/2}\Big]dt < \infty.$$

так как $(\psi')^{-p/2}\psi^{-(1+p)/2} \le c(1+x)^{pn/4}$ в силу дополнительного свойства функции ψ. Приближая любую функцию из Определения (4.1) финитными функциями и переходя к пределу, получаем равенство (1.27) в общем случае.

Наконец, заметим, что аналогично (4.94) $u_t \in L_1(0,T;H^{-5}(\Sigma_n))$ $\forall n$. Так как $u \in L_\infty(0,T;L^{\psi(x)}_{2,+})$, то после изменения на множестве нулевой меры мы получаем, что $u \in C_\omega([0,T];L^{\psi(x)}_{2,+})$. В итоге, $u \in X^{\psi(x)}_\omega(\Pi_T^+)$. Теорема доказана. $\square$

Лемма 4.12. *Пусть* $F \in C^2(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$, $|F'(u)|, |F''(u)| \le c$ $\forall u \in \mathbb{R}$, $\psi(x) \equiv e^{2\alpha x}$ *для некоторых* $\alpha > 0$, $u_0 \in \widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $f \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+)$. *Тогда существует* $t_0 \in (0,T]$ *такое, что задача (1.27)-(1.30) имеет единственное сильное решение* $u \in X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$.

Доказательство. По аналогии с доказательством Леммы 4.11 построим решение как неподвижную точку отображения Λ заданного в пространстве $X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0}^+)$. Здесь $\psi^2/\psi' \sim \psi$ и Лемма 4.9 при $f_0 \equiv f$, $f_1 \equiv F'(v)v_x$ обеспечивает существование такого отображения. Кроме того, для функции $v, \in X^{2,\psi(x)}$ $(\Pi_{t_0}^+)$ согласно неравенству (4.74)

$$\|\Lambda v\|_{X^{2,\psi(x)}}$$
$$\le c(T)(\|u_0\|_{\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+} + \|f\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+)} + \|F'(v)v_x\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+))} \tag{4.97}$$
$$\le c(T)(\|u_0\|_{\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+} + \|f\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+)} + t_0^{1/2}\|v\|_{X^{2,\psi(x)}}),$$

и, так как $|F'(v)v_x - F'(\widetilde{v})\widetilde{v_x}| \le c(|v_x| + |\widetilde{v_x}|)|v - \widetilde{v}| + c|v_x - \widetilde{v_x}|$,

$$\|\Lambda v - \Lambda\widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}} \le c(T)t_0^{1/2}(\|v\|_{X^{2,\psi(x)}} + \|\widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}})\|v - \widetilde{v}\|_{X^{2,\psi(x)}}, \tag{4.98}$$

откуда следует утверждение леммы. □

Доказательство Теоремы 1.7. Докажем, что если $X^{2,e^{2\alpha x}}(\Pi_T^+)$, $\alpha > 0$ - решение задачи (1.27)-(1.30) для некоторого $T' \in (0,T]$, где функция $F \in C^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет (1.34), тогда для некоторой допустимой весовой функции $\psi(x)$ такой, что ее производная ψ' так же является допустимой весовой функцией и $\psi(x) \le ce^{2\alpha x}$, $\forall x \ge 0$,

$$\|u\|_{X^{2,\psi(x)}(\Pi_{T'}^+)} \le c(T, \|u_0\|_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}}, \|f\|_{L_2(0,T;\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)})}). \tag{4.99}$$

Используя(4.86), где $\mu_2 = u_{xx}|_{x=0}$ мы получим

$$\|u\|_{X^{\psi(x)}(\Pi_{T'}^+)} + \|u_{xx}|_{x=0}\|_{L_2(B_{T'})} \le c. \tag{4.100}$$

Далее, поскольку выполнены условия Леммы 4.9 и Леммы 4.10, выпишем соответствующие аналоги равенств (4.74) и (4.79) и вычтем из первого удвоенный второй:

$$\frac{d}{dt}\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+bu_x^2+bu_y^2)\rho dxdy+\int(u_{xxxx}^2\rho+4u_{xxxx}u_{xxx}\rho'+2u_{xxxx}u_{xx}\rho''$$

$$-2bu_{xxxx}u_{xx}\rho-3u_{xxx}^2\rho''-2u_{xxx}u_{xx}\rho'''+4bu_{xxx}u_{xx}\rho'$$

$$+u_{xx}^2\rho^{(4)}-4bu_{xx}^2\rho''+(b^2+a)u_{xx}^2\rho)\big|_{x=0}dy$$

$$+\iint(5u_{xxxx}^2+6u_{xxyy}^2+8bu_{xxx}^2+6bu_{xxy}^2$$

$$+u_{yyyy}^2+4bu_{xyy}^2+2bu_{yyy}^2+$$

$$+(3b^2-a)u_{xx}^2+4b^2u_{xy}^2-abu_x^2+(b^2-a)u_{yy}^2)\rho'dxdy$$

$$+\iint(-5u_{xxx}^2-6bu_{xx}^2-5u_{xyy}^2-bu_{yy}^2-b^2u_x^2-5bu_{xy}^2-b^2u_y^2)\rho'''dxdy$$

$$+\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+bu_x^2+bu_y^2)\rho^{(5)}dxdy$$

$$-\frac{d}{dt}\iint F^*(u)\rho dxdy-\iint F'(u)u_x(u_{xxxx}-bu_{xx}+u_{yyyy}-bu_{yy})\rho dxdy$$

$$-\iint F(u)(u_{xxxx}-bu_{xx}+u_{yyyy}-bu_{yy})\rho'dxdy$$

$$+a\iint F^*(u)\rho'dxdy)$$

$$=2\iint(f_{0xx}u_{xx}+f_{0yy}u_{yy}+bf_{0x}u_x+bf_{0y}u_y)\rho dxdy$$

$$-2\int(f_0(u_{xx}\rho)_x-f_{0x}u_{xx}\psi)\big|_{x=0}dy$$

$$+2\iint(f_1[(u_{xx}\rho)_{xx}+u_{yyyy}\rho-b(u_x\rho)_x-bu_{yy}\rho])dxdy-\iint F(u)f\rho dxdy,$$

тогда с помощью (4.75) и (4.76) для достаточно малых ε получаем

$$\frac{d}{dt}\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+bu_x^2+bu_y^2-2F^*(u))\rho dxdy+\int(u_{xxxx}^2\rho)\big|_{x=0}dy$$
$$+\iint(5u_{xxxx}^2+6u_{xxyy}^2+u_{yyyy}^2)\rho' dxdy$$
$$\leq\iint 2F(u)(u_{xxxx}-bu_{xx}+u_{yyyy}-bu_{yy})\rho' dxdy-2a\iint F^*(u)\rho' dxdy$$
$$+\varepsilon\int u_{xxxx}^2\big|_{x=0}dy+c(\varepsilon)\int u_{xx}^2\big|_{x=0}dy+\varepsilon\iint(u_{xxxx}^2+u_{xxyy}^2+u_{yyyy}^2)\rho' dxdy \quad (4.101)$$
$$+c(\varepsilon)\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)\rho dxdy+c\iint(f_{xx}^2+f_{yy}^2+f^2)\rho dxdy$$
$$+2\iint(F'(u)u_x[2u_{xxx}\rho'+u_{xx}\rho''-bu_x\rho'])dxdy-2\iint F(u)f\rho dxdy$$
$$-2\iint(F'(u)F(u))^*\rho' dxdy.$$

Выбираем $\rho\equiv 1$. Заметим, что из (1.34) и (4.100) следует

$$\iint|F^*(u)|dxdy\leq c\|u\|_{L_{\infty,+}}^p\|u\|_{L_{2,+}}\leq c_1(\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)dxdy)^{p/4}, \quad (4.102)$$

$$\iint F(u)fdxdy\leq c\|u\|_{L_{\infty,+}}^p\|u\|_{L_{2,+}}\|f\|_{L_{2,+}}. \quad (4.103)$$

Таким образом, из (4.101) следует, что

$$\|u_{xx}\|_{L_\infty(0,T';L_{2,+})}+\|u_{yy}\|_{L_\infty(0,T';L_{2,+})}\leq c. \quad (4.104)$$

В частности

$$\|u_{xx}\|_{L_\infty(\Pi_{T'}^+)}\leq c. \quad (4.105)$$

Теперь, в (4.101) выбираем $\rho(x)\equiv\psi(x)$. Из (4.105) следует, что $|F(u)|\leq c|u|$, и тога легко вытекает оценка (4.99).

Заметим, что из (4.101) (где $\rho(x)\equiv\rho_0(x-x_0)$ для любого $x_0\geq 0$) следует, что

$$\lambda^+(u_{xxxx};T')+\lambda^+(u_{xxyy};T')+\lambda^+(u_{yyyy};T')\leq c. \quad (4.106)$$

Для завершения доказательства рассмотрим множество начально-краевых задач (4.82), (4.83), (1.29), (1.30). Из Леммы 4.12 следует, что для любого $h\in(0,1]$ существует решение такой задачи $u_h\in X^{2,\psi(x)}(\Pi_{t_0(h)}^+)$ Затем с помощью оценки (4.99) продолжим это решение сначала на весь отрезок времени $[0,T]$, а затем, аналогично окончанию доказательства предыдущей теоремы, перейдем к пределу при $h\to+\infty$ и построим желаемое решение. Заметим, что согласно (4.105) $F(u)\phi_x\in L_1(\Pi_T^+)$ $\forall p$, без каких-либо дополнительных предположений о весовой функции ψ. $\square$

4.3 Единственность решений

В следующем разделе мы докажем единственность решений в первых двух теорем.

Теорема 4.1. *Пусть $F \in C^1(\mathbb{R})$ и неравенство (1.34) выполнено для $p \in [0,3]$, $\psi(x)$ - допустимая весовая функция такая, что ее производная $\psi'(x)$ тоже является допустимой весовой функцией и неравенство (1.35) выполнено. Тогда для любого $T > 0$ и $M > 0$ существует постоянная $c = c(T, M)$, такая, что для для любых двух слабых решений $u(t,x,y)$ и $\widetilde{u}(t,x,y)$ задачи (1.27)-(1.30), удовлетворяющих условию $\|u\|_{X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le M$ с входными данными $u_0, \widetilde{u}_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, f, $\widetilde{f} \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$, имеет место следующее неравенство:*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le c(\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{L_{2,+}^{\psi(x)}} + \|f - \widetilde{f}\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})}). \tag{4.107}$$

Доказательство. Пусть $\omega \equiv u - \widetilde{u}$, $\omega_0 \equiv u_0 - \widetilde{u}_0$, $F \equiv f - \widetilde{f}$. Для функции ω применим Лемму 4.8, где $f_1 \equiv 0$. Заметим, что из неравенства (1.35) следует, что

$$(\frac{\psi}{\psi'})^{1/4} \le c_0^{-\frac{1}{4}}(\frac{\psi}{\psi'})^{1/4}(\psi')^{\frac{p+1}{4}}\psi^{\frac{p-1}{4}} \le c(\psi')^{p/4}\psi^{p/4}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}(\iint |u|^{2p}u_x^2\psi dxdy)^{1/2} &\le \||u|^p(\psi/\psi')^{1/4}\|_{L_{\infty,+}}[\iint u_x^2(\psi'\psi)^{1/2}dxdy]^{1/2} \\ &\le c\|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^p_{L_{\infty,+}}\|u(\psi')^{1/4}\psi^{1/4}\|^2_{L_{2,+}} \\ &\le c_1(\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u^2)\psi' dxdy)^{p/4+1/4}(\iint u^2\psi dxdy)^{p/4+1/4},\end{aligned} \tag{4.108}$$

и, следовательно, $F'(u)u_x \in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$ так как $p \le 3$. Таким образом, условия Леммы 4.8 выполнены.

В итоге, из (4.68) мы получаем, что при $t \in (0,T]$

$$\begin{gathered}\iint \omega^2\psi dxdy + \psi(0)\int_0^L \mu_2^2\big|_{x=0}dy \\ + \int_0^t \iint [5\omega_{xx}^2 + \omega_{yy}^2 + 3b\omega_x^2 + \omega_y^2 - a\omega^2]\psi' dxdyd\tau \le \iint \omega_0^2\psi dxdy \\ +c\int_0^t \iint \omega^2\psi dxdyd\tau + 2\int_0^t \iint (F - ((F(u))_x - (F(\widetilde{u}))_x))\omega\psi dxdtd\tau.\end{gathered} \tag{4.109}$$

Где

$$\begin{aligned}2|\int_0^t \iint (F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)\omega\psi dxdt| &= 2|\int_0^t \iint (F(u) - F(\widetilde{u})(\omega\psi)_x dxdt| \\ &\le c\iint (|u|^p + |\widetilde{u}|^p)|\omega(\omega\psi)_x|dxdy,\end{aligned} \tag{4.110}$$

где по аналогии с (4.108)

$$\iint |u|^p|\omega\omega_x|\psi dxdy \le \||u|^p(\psi/\psi')^{1/4}\|_{L_{\infty,+}}(\iint \omega_x^2(\psi')^{1/2}\psi^{1/2}dxdy)^{1/2}(\iint \omega^2\psi dxdy)^{1/2}$$
$$\le c(\iint (u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)\psi' dxdy)^{p/4}(\iint u^2\psi dxdy)^{p/4}$$
$$(\iint (\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+\omega^2)\psi' dxdy)^{1/4}(\iint \omega^2\psi dxdy)^{3/4}$$
$$\le \varepsilon \iint (\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+\omega^2)\psi' dxdy$$
$$+c(\varepsilon)(\iint (u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)\psi' dxdy)^{p/3}\iint \omega^2\psi dxdy, \tag{4.111}$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбран сколь угодно малым. Тогда из оценок (4.109), (4.111) следует искомый результат. □

Из следующей теоремы следует единственность решения в Теореме 1.7.

Теорема 4.2. *Пусть функция $F \in C^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1.36). Пусть $\psi(x)$ – допустимая весовая функция такая, что ее производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией и условие (1.37) выполнено. Тогда для любых $T > 0$ и $M > 0$ существует константа $c = c(T, M)$ такая, что для двух любых сильных решений $u(t, x, y)$ и $\widetilde{u}(t, x, y)$ задачи (1.27)-(1.30) таких, что $\|u\|_{X_\omega^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_\omega^{2,\psi(x)}(\Pi_T^+)} \le M$, с входными данными $u_0, \widetilde{u}_0 \in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f, \widetilde{f} \in L_1(0, T; L_{2,+}^{\psi(x)})$, выполнено неравенство (4.107).*

Доказательство. В значительной степени доказательство повторяет доказательство Теоремы 4.1. Заметим, что тут, очевидно, $F'(\widetilde{u})u_x$, $F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x \in L_\infty(0, T; L_{2,+}^{\psi(x)})$, таким образом имеет место тождество (4.109). Отличие связано только с нелинейным слагаемым. По сравнению с (4.110) мы оцениваем его следующим образом: поскольку

$$F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x = (F'(u) - F(\widetilde{u}))u_x + F'(\widetilde{u})\omega_x,$$
$$2|\iint (F'(u)u_x - F'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)\omega\psi dxdy| = |2\iint (F'(u)$$
$$-F'(\widetilde{u}))u_x\omega\psi dxdy - \iint F''(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\omega^2\psi dxdy - \iint F'(\widetilde{u})\omega^2\psi' dxd| \tag{4.112}$$
$$\le c\iint (|u|^q + |\widetilde{u}|^q)(|u_x| + |\widetilde{u}_x|)\omega^2\psi dxdy + c\iint \omega^2\psi dxdy.$$

Из (1.37) следует, что

$$\psi \le c\psi'^{\frac{r-2}{2r}}\psi^{\frac{qr+2}{2r}}\psi^{\frac{1}{r}} = c\psi^{(q+1)/2}(\psi')^{(r-2)/(2r)}\psi^{(r+2)/(2r)}.$$

Тогда получаем

$$
\begin{aligned}
\iint |u|^q|u_x|\omega^2\psi dxdy &\le c\iint |u|^q\psi^{q/2}|u_x|\psi^{1/2}\omega^2(\psi')^{2s_0}\psi^{1-2s_0}dxdy \\
&\le \|u\psi^{1/2}\|^q_{L_{\infty,+}}\|u_x\psi^{1/2}\|_{L_{\frac{r}{r-2},+}}\|\omega(\psi')^{s_0}\psi^{1/2-s_0}\|^2_{L_{r,+}} \\
&\le c\|u\|^{q+1}_{\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+}(\iint(\omega^2_{xx}+\omega^2_{yy}+\omega^2)\psi' dxdy)^{2s_0}(\iint \omega^2\psi dxdy)^{1-2s_0} \\
&\le \varepsilon\iint(\omega^2_{xx}+\omega^2_{yy}+\omega^2)\psi' dxdy + c(\varepsilon)\iint\omega^2\psi dxdy,
\end{aligned}
\tag{4.113}
$$

где $s_0(r)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2r}\le\frac{1}{2}$ и $2\le\frac{r}{r-2}<+\infty$. Искомый результат следует из (4.109), (4.112) и (4.113). $\square$

Теорема 4.3. *Пусть функция $g\in C^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (1.36). Пусть $\psi(x)$ – допустимая весовая функция такая, что ее производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией и для некоторой положительной константы c_0*

$$
\psi'(x)\psi^q(x)\ge c_0 \quad \forall x\ge 0. \tag{4.114}
$$

Тогда для любых $T>0$ и $M>0$ существует константа $c=c(T,M)$ такая, что для любых двух сильных решений $u(t,x,y)$ и $\widetilde{u}(t,x,y)$ задачи (1.27)-(1.30), удовлетворяющих условию $\|u\|_{X^{2,\psi(x)}_\omega},\|\widetilde{u}\|_{X^{2,\psi(x)}_\omega}\le M$, с соответствующими входными данными $u_0,\widetilde{u}_0\in H^{2,\psi(x)}_+$, $f,\widetilde{f}\in L_2(0,T;\widetilde{H}^{2,\psi(x)}_+)$, $u_0(0,y)=\widetilde{u}_0(0,y)=u_{0x}(0,y)=\widetilde{u}_{0x}(0,y)\equiv 0$, выполнено следующее неравенство:

$$
\|u-\widetilde{u}\|_{X^{2,\psi(x)}_\omega(\Pi^+_T)}\le c(\|u_0-\widetilde{u}_0\|_{H^{2,\psi(x)}_+}+\|f-\widetilde{f}\|_{L_2(0,T;H^{2,\psi(x)}_+)}). \tag{4.115}
$$

Доказательство. Для начала заметим, что условие Теоремы 4.2 выполнено и, следовательно, имеет место неравенство (4.107).

Пусть $F_1'(u)\equiv F'(u)-F'(0)$, тогда в соответствии с (1.36)

$$
|F_1'(u)|\le c|u|^{q+1}. \tag{4.116}
$$

Соединим слагаемое $F'(0)u_x$ с линейным членом au_x и рассмотрим уравнение типа (1.27), где F' заменено на F_1'. Из условие (4.114) следует, что

$$
\frac{\psi^2(x)}{\psi'(x)}\le c\frac{\psi^2(x)}{\psi'(x)}\psi'(x)\psi^q(x)\le c\psi^{q+2}(x). \tag{4.117}
$$

В частности, от сюда следует, что $F_1'(u)u_x$, $F_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\in L_\infty(0,T;L^{\psi^2/\psi'(x)}_{2,+})$. Запишем аналоги (4.74) при $\omega \equiv u - \widetilde{u}$ и $f_1 \equiv F_1'(u)u_x - F_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x$, отсюда

$$\begin{gathered}\iint(\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+b\omega_x^2+b\omega_y^2)\psi dxdy+\int_0^t\iint(5u_{xxxx}^2+6u_{xxyy}^2+u_{yyyy}^2)\psi' dxdyd\tau\\
\leq\iint(\omega_{0xx}^2+\omega_{0yy}^2+b\omega_{0x}^2+b\omega_{0y}^2)\psi dxdy+c\int_0^t\iint(F_1'(u)u_x-F_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)^2\frac{\psi^2}{\psi'}dxdyd\tau\\
+\varepsilon\int_0^t\iint(\omega_{xxxx}^2+\omega_{xxyy}^2+\omega_{yyyy}^2)\psi' dxdyd\tau+c(\varepsilon)\int_0^t\iint(\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+\omega^2)\psi dxdyd\tau\\
+c\int_0^t\iint(F_{xx}^2+F_{yy}^2+F^2)\psi dxdyd\tau,\end{gathered}\tag{4.118}$$

Для оценки интеграла с нелинейным слагаемым используем (4.116), (4.117) и соответствующий аналог (4.112):

$$\begin{gathered}\iint(F_1'(u)u_x-F_1'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x)^2\frac{\psi^2}{\psi'})dxdyd\leq c\iint(|u|^{2q}+|\widetilde{u}|^{2q})u_x^2\omega^2\psi^{q+2}dxdy\\
+c\iint|\widetilde{u}|^{2q+2}\omega_x^2\psi^{q+2}dxdy,\end{gathered}\tag{4.119}$$

где

$$\begin{gathered}\iint|u|^{2q}u_x^2\omega^2\psi^{q+2}dxdy\leq\|u\psi^{1/2}\|_{L_{\infty,+}}\|u_x\psi^{1/2}\|_{L_{6,+}}\|\omega\psi^{1/2}\|_{L_{3,+}}\\
\leq c\|u\|^{2q+2}_{\widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}}\iint(\omega_{xx}^2+\omega_{yy}^2+b\omega_x^2+b\omega_y^2)dxdy,\\
\iint|\widetilde{u}|^{2q+2}\omega_x^2\\
psi^{q+2}dxdy\leq\|u\psi^{1/2}\|^{2q+2}_{L_{\infty,+}}\iint\omega_x^2\psi dxdy.\end{gathered}\tag{4.120}$$

В итоге, формулировка теоремы следует из неравенства (4.118)-(4.120). □

4.4 Убывание решений при больших временах

Далее, мы приведем доказательство оставшихся двух теорем о затухании решений на бесконечности.

Доказательство Теоремы 1.8. Пусть $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$ для $\alpha\in(0,\alpha_0]$, где α будет задано позже, $u_0\in L_{2,+}^{\psi(x)}$, $f\equiv 0$. Рассмотрим единственное решение задачи (1.27)-(1.30) из пространства $X_\omega^{\psi(x)}(\Pi_T^+)$ $\forall T$.

Заметим, что согласно (4.108) $F'(u)u_x\in L_1(0,T;L_{2,+}^{\psi(x)})$.

Применим Лемму 4.8, где $f_0\equiv F'(u)u_x$, $f_1\equiv 0$, тогда из тождества (4.86) при $\rho\equiv 1$ следует, что

$$\|u(t,\cdot,\cdot)\|_{L_{2,+}}\leq\|u_0\|_{L_{2,+}}\quad\forall t\geq 0.\tag{4.121}$$

Из равенства (4.86) при $\rho = \psi$ вытекает

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy + \int_0^L \mu_2^2 dy$$
$$+2\alpha\iint[5u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + (3b+4\alpha^2)u_x^2 + bu_y^2 + (4\alpha^2 b + 16\alpha^4 - a)u^2]\psi dxdy \tag{4.122}$$
$$= 2\alpha\iint(F'(u)u)^*\psi dxdy.$$

Используя неравенства (4.88) и (4.89) мы получаем, равномерно по L, для некоторой константы c^* зависящей от свойств функции F,

$$2\iint(F'(u)u)^*\psi dxd \le c\Big(\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2+u^2)\psi dxdy\Big)^{p/4}\Big(\iint u^2\psi dxdy\Big)^{(4-p)/4}\|u_0\|_{L_{2,+}}^p$$
$$\le \frac{1}{4}\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)\psi dxdy + c^*(\|u_0\|_{L_{2,+}}^{(4p)/(4-p)} + \|u_0\|_{L_{2,+}}^p)\iint u^2\psi dxdy. \tag{4.123}$$

Из (4.16) следует, что

$$\iint u^2\psi dxdy \le \frac{L^2}{\pi^2}\iint u_y^2\psi dxdy \le \frac{L^2}{\pi^2}(\iint u^2\psi dxdy)^{1/2}(\iint u_{yy}^2\psi dxdy)^{1/2},$$

и тогда

$$\frac{\pi^4}{L^4}\iint u^2\psi dxdy \le \iint u_{yy}^2\psi dxdy. \tag{4.124}$$

В частности,

$$2\alpha\iint u_{yy}^2\psi dxdy \ge \frac{\pi^4\alpha}{4L^4}\iint u^2\psi dxdy + \frac{7\alpha}{4}\iint u_{yy}^2 dxdy. \tag{4.125}$$

Кроме того,

$$|3b+4\alpha^2|\iint u_x^2\psi dxdy \le \iint u_{xx}^2\psi dxdy + c(b,\alpha_0)\iint u^2\psi dxdy, \tag{4.126}$$

$$2|b|\iint u_y^2\psi dxdy \le \frac{1}{4}\iint u_{yy}^2\psi dxdy + c(b)\iint u^2\psi dxdt \tag{4.127}$$

Объединим (4.122)-(4.127) получаем, что

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy + \int_0^L \mu_2^2 dy$$
$$+\alpha\iint(u_{xx}^2+u_{yy}^2)\psi dxdy + \alpha[\frac{\pi^4}{4L^4} - c(b,a,\alpha_0) - c^*(\|u_0\|_{L_{2,+}}^{4p/(4-p)} + \|u_0\|_{L_{2,+}}^p)]$$
$$\iint u^2\psi dxdy \le 0. \tag{4.128}$$

Выбирая L_0, α_0 и ϵ_0 так, чтобы $\frac{\pi^4}{16L_0^4} \geq c^*(\epsilon_0^{4p/(4-p)} + \epsilon_0^p)$, $\frac{\pi^4}{16L_0^4} \geq c(b, a, \alpha_0)$. Тогда из (4.128) следует, что

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint u^2\psi dxdy + \int_0^L \mu_2^2 dy + \alpha\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2)dxdy \\ +\alpha\beta\iint u^2 dxdy \leq 0.\end{gathered} \tag{4.129}$$

где $\beta = \frac{\pi^4}{8L^4}$, откуда следует неравенство (1.38). □

Доказательство Теоремы 1.9. Пусть значения $L_0, \alpha_0, \epsilon_0, \beta$ такие же как и в предыдущей теореме, $\psi \equiv e^{2\alpha x}$ для некоторого $\alpha \in (0, \alpha_0)$, $u_0 \in \widetilde{H}_+^{2,\psi(x)}$, $u_0(0,y) = u_{0x}(0,y) \equiv 0$, $\|u_0\|_{L_{2,+}} \leq \epsilon_0$. Заметим, что выбранная функция ψ очевидно удовлетворяет условию (1.37) (для любого r). Тогда в силу Теоремы 1.7 существует единственное решение задачи (1.27)-(1.30) $F'(u)u_x \in L_\infty(0,T; K_{2,+}^{\psi(x)})$. Тогда можно дословно повторить оставшуюся часть доказательства предыдущей теоремы (условие $p \leq 3$ использовалось там только для установления свойства $F'(u)u_x \in L_1(0, T : L_{2,+}^{\psi(x)})$ и единственности решения) и получить неравенство (4.129). Помимо (1.38) из (4.129) следует, что (здесь $\mu_2 \equiv u_{xx}\big|_{x=0}$)

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha\beta\tau}[\int_0^L u_{xx}^2\big|_{x=0}dy + \alpha\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2)\psi dxdy]d\tau \leq \|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}}. \tag{4.130}$$

Кроме того, доказательство предыдущей теоремы можно провести также для $\alpha = \alpha_0$ и тогда в силу (1.38)

$$e^{\alpha_0\beta t}\|u(t,\cdot,\cdot)\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}} \leq \|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}}.$$

Следовательно, поскольку в настоящей теореме $\alpha < \alpha_0$, то

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha\beta\tau}\iint u^2\psi dxdyd\tau \leq \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-\alpha_0)\beta\tau}d\tau\|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}} = \frac{1}{(\alpha-\alpha_0)\beta}\|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}}. \tag{4.131}$$

Более того, применяя неравенство (4.5) (где $\psi_1 - \psi_2 \equiv \psi$), выводим из (4.130) и (4.131), что равномерно по L

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha\beta\tau}[\iint(u_x^2 + u_y^2)\psi dxdy]d\tau \leq (\alpha,\beta)\|u_0\|^2_{L_{2,+}^{\psi(x)}}. \tag{4.132}$$

Далее, по аналогии с (4.101) из (4.75) и (4.76) получаем, что (при $\psi \equiv 1$)

$$\frac{d}{dt}\iint(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + bu_x^2 + bu_y^2 - 2F^*(u))dxdy \leq \int_0^L u_{xx}^2\big|_{x=0}dy. \tag{4.133}$$

откуда с использованием (4.5), (4.121) и (4.132) следует, что равномерно по $t \geq 0$ и L

$$\|u_{xx}\|_{L_{L_{2,+}}} + \|u_{yy}\|_{L_{2,+}} \leq c(\|u_0\|_{\widetilde{H}^2_+})$$

и тогда равномерно по L

$$\|u\|_{L_\infty(\Pi^+_\infty)} \leq c(\|u_0\|_{\widetilde{H}^2_+}) \tag{4.134}$$

Теперь в (4.101) положим $\rho \equiv \psi$, тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\iint (u^2_{xx} + u^2_{yy} + bu^2_x + bu^2_y - 2F^*(u))\psi dxdy + \int (u^2_{xxxx})\big|_{x=0} dy \\
+2\alpha \iint (5u^2_{xxxx} + 6u^2_{xxyy} + u^2_{yyyy})\psi dxdy \\
\leq 2\alpha \iint 2F(u)(u_{xxxx} - bu_{xx} + u_{yyyy} - bu_{yy})\psi dxdy - 4a\alpha \iint F^*(u)\psi dxdy \\
+\varepsilon \int u^2_{xxxx}\big|_{x=0} dy + c(\varepsilon)\int u^2_{xx}\big|_{x=0} dy + 2\varepsilon\alpha \iint (u^2_{xxxx} + u^2_{xxyy} + u^2_{yyyy})\psi dxdy \\
+\alpha c(\varepsilon)\iint (u^2_{xx} + u^2_{yy})\psi dxdy \\
+2\iint (F'(u)u_x[4\alpha u_{xxx} + 4\alpha^2 u_{xx} - 2\alpha b u_x]\psi) dxdy - 4\alpha \iint (F'(u)F(u))^*\psi dxdy.
\end{gathered} \tag{4.135}$$

откуда получаем, что с учетом (4.133)

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\iint (u^2_{xx} + u^2_{yy} + bu^2_x + bu^2_y - 2F^*(u))\psi dxdy \\
\leq c\iint (u^2_{xx} + u^2_{yy} + u^2_x + u^2_y + u^2)\psi dxdy + c\int_0^t u^2_{xx}\big|_{x=0} dy.
\end{gathered}$$

Используя неравенства (4.130)-(4.135) выводим оценку (1.39). $\square$

5 Заключение

В диссертации были изучены свойства решений начально-краевых задач для различных модификаций уравнения Кавахары.

В работе были получены результаты о существование и единственность глобального решения для начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка. Была доказана разрешимость обратных задач с интегральным переопределением для обобщенного уравнения Кавахары и его линейного аналога.

Кроме того, были рассмотрены начально-краевые задачи для двухмерной модификации уравнения Кавахары с высокой нелинейностью на полу-полосе конечной ширины. Были получены результаты о существование и единственности сильных и слабых решений поставленных задач, и о затухании решений на бесконечности.

Использованные в диссертации методы могут быть применены для изучения различных задач для других модификаций уравнения Кавахары.

6 Список литературы

[1] Ильичев А. Т. О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией //Труды МИАН, 1989,т. 186, стр. 222–226.

[2] Марченко А. В. О длинных волнах в мелкой воде под ледяным покровом. // Прикл. матем. мех, 1988, т. 52, № (2), стр. 230–234.

[3] Кувшинов Р.В., Фаминский А.В. Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары // Дифф. уравн, 2009, т. 45, № 3, стр. 391–402.

[4] Опритова М.А., Фаминский А.В. О начально–краевой задаче в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Укр. мат. вісник, 2014, т. 11, № 3, стр. 312–339, 2014.

[5] Опритова М.А., Фаминский А.В. Об убывании при больших временах решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары. *Вестн. Тамб. гос. ун-та,* т. 20 №(5): стр. 1331–1337, 2015.

[6] Опритова М.А., Фаминский А.В. О задаче Коши для обоб- щенного уравнения Кавахары // Дифференциальные уравнения, 2016, т. 52, № 3, стр. 378–390.

[7] Сангаре К. Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций // Вестн. Рос. унта дружбы народов. Сер. мат, 2003, т. 10, № 1, стр. 91–107.

[8] Сангаре К., Фаминский А.В. Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // Матем. заметки, 2009, т. 85, № 1, стр. 98–109.

[9] Фаминский А.В., Опритова М.А. О задаче Коши для уравне- ния Кавахары // Современная математика. Фундаментальные направления, 2012, т. 45, стр. 132–150.

[10] Шананин Н.А. О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными // Матем. заметки, 2000, т. 68, № 4, стр. 608–619.

[11] Agarwal P., Abd-Allah Hyder, Zakarya M. Well-posedness of stochastic modified Kawahara equation // Advances in Difference Equations, 2020, vol. 18: pp. 1–20.

[12] Araruna F. D., Capisrano-Filho R. A., Doronin G. G. Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain // J. Math. Anal. Appl, 2012, vol. 385, No. 2, pp. 743–756.

[13] Besov O.V., Il'in V.P., Nikolskii S.M. Integral Representation of Functions and Embedding Theorems. New Jersey- Wiley, Hoboken, 1978.

[14] Biagioni H.A., Linares F. On the Benny–Lin and Kawahara equations // J. Math. Anal. Appl, 1997, vol. 211, No. 1, pp. 131–152.

[15] Boyd J. P. Weakly non-local solitons for capillary-gravity waves fifth degree Korteweg-de Vries equation // Phys. D, 1991 vol. 48, pp. 129–146.

[16] Capistrano-Filho R. A., de Sousa L. S. Control results with overdetermination condition for higher order dispersive system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, vol. 506, No. 1, pp.1–22.

[17] Capistrano-Filho R. A., de Sousa L. S., Gallego F. A. Control of Kawahara equation with overdetermination condition: The unbounded cases // Math. Meth. Appl. Sci., 2023, pp. 1–24.

[18] Capistrano-Filho R. A. , De S. Gomes M. Well-posedness and controllability of Kawahara equation in weighted Sobolev spaces // Nonlinear Analysis, 2021, vol. 207, pp. 1–24.

[19] Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Faminskii A., Natali F. Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation // Appl. Math. Optim., 2012 vol. 65, pp. 221–251.

[20] Cavalcante M., Kwak Ch. The initial-boundary value problem for the Kawahara equation on the half-line // Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2018, vol. 27, pp. 1–49.

[21] Chen M. Internal controllability of the Kawahara equation on a bounded domain // Nonlinear Analysis, 2019 vol. 185, pp. 356–373.

[22] Chen W. , Guo Z. Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg–de Vries equation // J. Anal. Math, 2011, vol. 114, No. 1, pp. 121–156.

[23] Cui S., Deng D., Tao S. Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equation with L2 initial data // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2006, vol. 22, No. 5, pp. 1457–1466.

[24] Cui S., Tao S. Stricharts estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation // J. Math. Anal. Appl., 2005, vol. 304, pp. 683–702.

[25] Doronin G.G., Larkin N.A. Quarter-plane problem for the Kawahara equation // Pacific J. Appl. Math., vol. 1, No. 3, pp. 151–176.

[26] Doronin G.G., Natali F. Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line // Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2016, vol. 30, pp. 59–72.

[27] Eidelman Y. The correctness of direct and inverse problems for differential equation in Hilbert space // Doklady of Academy of Sciences of Ukraine, 1993, vol. 12, pp. 17–21

[28] Elwakil S.A., El-Shewy E.K., Abdelwahed H.G. Solution of the perturbed Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation describing electron-acoustic solitary waves in a magnetized plasma // Chin. J. Phys., 2011, vol. 49, pp. 732–744.

[29] Faminskii A.V. An Initial-Boundary Value Problem in a Strip for Two-Dimensional Equations of Zakharov–Kuznetsov Type // Contemporary Mathematics, 2015, vol. 653, pp. 137–162.

[30] Faminskii A.V. Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation // Ann. Inst. H. Poincare (C) Anal. Non Lineaire, 2018, vol. 35, pp. 1235–1265.

[31] Faminskii A.V. Controllability Problems for the Korteweg-de Vries Equation with Integral Overdetermination // Differential Equations, 2019, vol. 55, No. 1, pp. 123–133.

[32] Faminskii A.V. Control Problems with an Integral Condition for Korteweg–de Vries Equation on Unbounded Domains // Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, vol. 180, No. 1, pp. 290–302.

[33] Faminskii A.V. On One Control Problem for Zakharov-Kuznetsov Equation //Trends in Mathematics (Analysis, Probability, Applications, and Computation; Proceedings of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden)), 2019, vol. 2017, pp. 305–313.

[34] Faminskii A.V. Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov–Kuznetsov equation // Nonlinear Anal. Real World Appl., 2020, vol. 51, No. 102959, pp. 1–21.

[35] Faminskii A.V. Initial-boundary value problems on a half-strip for the modified Zakharov–Kuznetsov equation // J. Evol. Equ., 2021, vol. 21, pp. 1263–1298.

[36] Faminskii A.V. Initial-boundary value problems on a half-strip for the generalized Kawahara–Zakharov–Kuznetsov equation // Z. Angew. Math. Phys. 2022, vol. 73, No. 93, pp. 1–27.

[37] Faminskii A.V., Larkin N. A. Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval // Electronic Journal of Differential Equations, 2010, vol. 2010, No. 1, pp. 1–20.

[38] Faminskii A.V., Martynov E.V. Large-time decay of solutions of the damped Kawahara equation on the half-line // In: Manuilov, V.M., et al. (eds.) Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics. Trends in Mathematics. Birkhauser, Basel, 2021, pp. 130–141.

[39] Faminskii A.V., Martynov E.V. On initial-boundary value problem on semiaxis for generalized Kawahara equation // Journal of Mathematical Sciences, 2022, vol. 265, No.5, pp. 849–864.

[40] Faminskii A.V., Opritova M.A. On the initial-boundary-value problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation // J. Math. Sci., 2015, vol. 206, pp. 17–38.

[41] Fan J., Jiang S. Well-posedness of an inverse problem of a time-dependent Ginzburg–Landau model for superconductivity // Commun. Math. Sci., 2005, vol. 3 No. 3, pp. 393–401.

[42] Fan J., Nakamura G. Local solvability of an inverse problem to the density-dependent Navier–Stokes equations // Appl. Anal., 2008, vol. 87 No. 10–11, pp. 1255–1265.

[43] Glass O., Guerrero S. On the controllability of the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Ann. I. H. Poincare – AN., 2009, vol. 26, pp. 2181–2209.

[44] Hunter J. K., Scheurle J. Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves // Physica D, 1988, vol. 32, pp. 253–268.

[45] Z. Huo The Cauchy Problem for the Fifth Order Shallow Water Equation // Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2005, vol. 21, No. 3, pp. 441–454.

[46] Kato T. Local well-posedness for Kawahara equation // Adv. Differential Equations, 2011, vol. 16, No. 3–4, pp. 257–287.

[47] Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan., 1972, vol. 180, pp. 260–264.

[48] Kenig C., Pilod D. Well-posedness for the fifth-order KdV equation in the energy space // Trans. Amer. Math. Soc., 2015, vol. 367, pp. 2551–2612.

[49] Kichenassamy S., Olver P.J. Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations // SIAM J. Math. Anal., 1992, vol. 23, No. 5, pp. 1141–1166.

[50] Khanal N., Wu J., Yuan J.M.The Kawahara equation in weighted Sobolev spaces // IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society, 2009, pp. 1489–1505.

[51] Kishimoto N. Local well–posedness for the Cauchy problem of the quadratic Schrodinger equation with nonlinearity u2 // Commun. Pure Appl. Anal., 2008, vol. 7, pp. 1123–1143.

[52] Larkin N.A. The 2D Kawahara equation on a half-strip // Appl. Math. Optim., 2014, vol. 70, pp. 443–468.

[53] Larkin N.A., Simoes M. The Kawahara equation on bounded intervals and on a half–line. // Nonlinear Anal., 2015, vol. 127, pp. 397–412.

[54] Larkin N.A., Simoes M.H. Global regular solutions for the 3D Kawahara equation posed on unbounded domains // Z. Angew. Math. Phys., 2016, vol. 67, pp. 1–21.

[55] Laurey C. The Cauchy problem for a third order nonlinear Schrodinger equation // Non- linear Anal. Theory Methods Appl., 1997, vol. 29, pp. 121—158.

[56] Levandosky J. L. Smoothing properties for a two-dimensional Kawahara equation. // Journal of Differential Equations, 2022, vol 316, pp. 158–196.

[57] Linares F., Pazoto A.F. Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane // J. Differential Equ., 2000, vol. 246, pp. 1342–1353.

[58] Lu S., Chen M., Lui Q. A nonlinear inverse problem of the Korteweg—de Vries equation // Bull. Math. Sci., vol. 9, No. 3, pp. 1–11.

[59] Martynov E.V. Inverse Problems for the Generalized Kawahara Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, vol. 43, No. 10, pp. 1–11.

[60] Martynov E.V. Initial-boundary value problems for two dimensional Kawahara equation // Прикладная Математика и Физика, 2023, vol. 55, No. 1, pp. 12–28.

[61] Naumkin P.I. Time decay estimates for solutions of the Cauchy problem for the modified Kawahara equation // Sbornik Math., 2019, vol. 210, pp. 693–730.

[62] Pazoto A.F., Rosier R. Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B., 2010, vol. 14, pp. 1511-–1535.

[63] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York- Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 2000.

[64] Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B. Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation // Physica D, 1988, vol. 31, pp. 127–134.

[65] Simon J. Compact sets in the space Lp(0, T ; B) / Ann. Mat. Pura Appl., 1987, vol. 146 pp. 65–96.

[66] Tao S.P., Cui S.B. Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation // Acta Math. Sinica, Engl. Ser., 2015, vol. 21, No. 5, pp. 1035–1044.

[67] Wang H., Cui S., Deng D. Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equations in Sobolev spaces of negative indices // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2007, vol. 22, No. 8, pp. 1435–1446.

[68] Zhang B.-Y., Zhao X. Control and stabilization of the Kawahara equation on a periodic domain // Communications in Information and Systems, 2012, vol. 12, No. 1, pp. 77–96.

[69] Zhang B.-Y., Zhao X. Global controllability and stabilizability of Kawahara equation on a periodic domain // Mathematical Control and Related Fields, 2015 vol. 5, No. 2, pp. 335–358.