

## Отзыв на автореферат диссертации Жуйкова Константина Николаевича

### «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов»

Диссертация посвящена исследованию проблемы индекса нелокальных эллиптических операторов для некоторых некомпактных многообразий и её тематика соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика. Особый интерес к проблеме индекса обусловлен тем, что индекс является топологическим инвариантом. Для классических эллиптических операторов выражение индекса через построенные по символу известные ранее топологические инварианты было получено М. Атьей и И. Зингером. Этот результат оказался одним из заметных математических событий, так как в нём были выявлены связи между дифференциальными уравнениями и алгебраической топологией — ветвями математики, ранее развивавшимися практически независимо. В случае компактных многообразий аналоги этих результатов были получены для нелокальных операторов, которые возникают в ряде приложений и являлись предметом многих исследований. При рассмотрении операторов на некомпактных многообразиях появляется зависимость свойств оператора и его индекса от поведения коэффициентов на бесконечности, в связи с чем, в качестве первого шага в исследовании, возникает необходимость новых топологических инвариантов. Объектом исследования в диссертации К.Н. Жуйкова являются нелокальные эллиптические операторы, порожденные сдвигами на модельных некомпактных многообразиях (прямая, бесконечный цилиндр,  $\mathbb{R}^n$ ), при их исследовании проявляются сложности, связанные с нелокальностью, так и связанные с некомпактностью.

В главе 1 дано обобщение эта-инварианта Атьи-Патоуди-Зингера на случай операторов, отвечающих операторам со сдвигами. Эта-инвариант является регуляризацией числа вращения. Устанавливаются свойства эта-инварианта. Затем в главе 2 построенные эта-инварианты применяются для построения топологического индекса эллиптического оператора со сдвигами на бесконечном цилиндре и доказывается формула индекса.

В главе 3 получена формула индекса эллиптических операторов на прямой, коэффициенты которых являются периодическими на бесконечности. Данная формула индекса также содержит эта-инвариант, который определяется и исследуется методами, близкими к развитым в главе 1. В качестве следствия формул индекса дано выражение эта-инварианта дифференциального оператора с периодическими коэффициентами в терминах соответствующей матрицы монодромии.

Наконец, в главе 4 исследуются нелокальные эллиптические операторы в  $\mathbb{R}^n$ , ассоциированные с операторами из метаплектической группы (обобщение операторов сдвига). Для двучленных операторов получены явные условия фредгольмовости операторов в зависимости от показателя гладкости пространств Соболева, в которых рассматривается оператор.

В целом, считаю, что в диссертации Жуйкова К.Н. «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов» посвящена актуальной тематике, в ней получены существенные новые интересные результаты по теории индекса нелокальных эллиптических операторов на некомпактных многообразиях, диссертация удовлетворяет всем требованиям к кандидатским диссертациям по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а ее автор Жуйков Константин Николаевич заслуживает присуждения ему искомой степени.

Профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики  
Белорусского государственного университета,  
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02 –  
дифференциальные уравнения),  
профессор Антоневиц Анатолий Борисович

Подпись проф. Антоневица А.Б. заверяю

Конт.тел. (8 017) 209-53-68

Email: [antonevich@bsu.by](mailto:antonevich@bsu.by)

Проспект Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь



## Отзыв

на автореферат диссертации «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов» аспиранта Математического института им. С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования Жуйкова Константина Николаевича, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Одна из основных задач, которую решает автор данной работы, состоит в получении формул индекса для эллиптических дифференциально-разностных операторов на бесконечном цилиндре (главы 1 и 2). Проблема индекса в этой ситуации является актуальной, поскольку ранее индекс задач такого типа исследовался преимущественно в случае компактных многообразий, а в данном исследовании рассматривается некомпактный случай. Условие эллиптичности состоит в требовании обратимости символа оператора, который в данной ситуации имеет две компоненты: 1) одна компонента – внутренний символ – является элементом существенно некоммутативной алгебры типа скрещенного произведения алгебры Фреше гладких функций и группы сдвигов, естественно действующей на алгебре Фреше; 2) вторая компонента – символ на бесконечности – также является элементом алгебры Фреше, порождённой семействами псевдодифференциальных операторов с параметром и периодическими коэффициентами. Указанная алгебра символов является довольно сложной, поэтому значительная часть работы диссертанта состоит в построении гомотопических инвариантов обратимых элементов из этой алгебры и использовании этих инвариантов для получения формулы индекса.

Также в работе исследована проблема индекса дифференциальных операторов на прямой, коэффициенты которых вне некоторого интервала являются периодическими (глава 3), и предъявлены условия эллиптичности операторов в  $\mathbf{R}^N$ , содержащих вместо операторов сдвига более общие метаплектические операторы (глава 4).

В целом, считаю, что в диссертации Жуйкова К.Н. получены существенные новые результаты по теории индекса эллиптических дифференциально-разностных операторов.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты опубликованы в 10 работах, их которых 4 – статьи в центральных математических журналах, индексируемых в MathSciNet и в Scopus.

Работа «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов» соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п.2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов», утвержденного Ученым советом РУДН протокол № 12 от 23.09.2019г., а ее автор Жуйков Константин Николаевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Доцент факультета математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», кандидат физико-математических наук (специальность 01.01.01 – математический анализ),

доцент Пирковский Алексей Юльевич

Подпись доц.Пирковского А.Ю. заверяю



Телефон: +7 (495) 772-95-90 \*12749

Адрес: г. Москва, Усачёва ул., д. 6, каб. 308

E-mail: aupirkovskii@hse.ru

## ОТЗЫВ

**на автореферат диссертации Жуйкова Константина Николаевича  
«Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами  
сдвигов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических  
наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и  
математическая физика**

Диссертационная работа Жуйкова Константина Николаевича посвящена исследованию нелокальных эллиптических операторов на некомпактных пространствах. В работе даются условия эллиптичности, при выполнении которых операторы оказываются фредгольмовы и затем вычисляется их индекс. Формулы индекса включают так называемые эта-инварианты, которые в случае локальных (точнее, псевдодифференциальных) операторов исследовались Атьей-Патоди-Зингером и Мельроузом. Надо отметить, что проблема индекса нелокальных операторов на некомпактных пространствах изучена мало и поэтому результаты данной работы являются актуальными и новыми.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Во введении дается краткий обзор литературы, посвященной проблеме индекса, перечисляются открытые задачи, формулируются основные результаты диссертации.

Глава I посвящена построению эта-инварианта семейств операторов с параметром и периодическими коэффициентами. Эта-инвариант определяется как регуляризация числа вращения: для этого строятся регуляризации следа и интеграла. Упомянутые регуляризации основаны на том факте, что след рассматриваемых семейств имеет периодическую асимптотику на бесконечности. Также получены логарифмическое свойство эта-инварианта и формула производной эта-инварианта гладкой гомотопии обратимых семейств с параметром. Во второй главе исследуются дифференциально-разностные операторы на бесконечном цилиндре. Символ таких операторов на бесконечности представляет собой семейство с параметром, рассмотренное в первой главе. Предъявлена формула индекса, включающая аналог интеграла Атьи-Зингера, разность эта-инвариантов символов на бесконечности и еще одну компоненту, зависящую от символа на бесконечности. В третьей главе для периодических всюду псевдодифференциальных операторов построен эта-инвариант. Для

дифференциальных операторов с коэффициентами, периодическими на бесконечности, получены формулы индекса в терминах сигнатуры матриц монодромии на бесконечности и как разность эта-инвариантов. Наконец, в четвертой главе исследованы двучленные операторы, ассоциированные с метаплектической группой. Дана теорема конечности и явные условия фредгольмовости таких операторов в терминах симплектической матрицы, отвечающей метаплектическому оператору. Все представленные результаты являются новыми и интересными, а для их получения применяются современные методы.

Автореферат полно и корректно отражает основные результаты диссертационной работы. Результаты опубликованы в 4 статьях в журналах, индексируемых международными реферативными базами и системами цитирования.

Диссертация «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов» соответствует требованиям к кандидатским диссертациям по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а ее автор Жуйков Константин Николаевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.04.

Геометрия и топология, доцент, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Подпись Попеленского Ф.Ю. заверяю

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

119991, ГСП-1, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д.1

E-mail: [popelens@mech.math.msu.su](mailto:popelens@mech.math.msu.su)

Тел.: (495) 939-39-40

