О Т З Ы В

официального оппонента о диссертации Н.О. Иванова
"Регулярность решений краевых задач для
дифференциально-разностных уравнений на конечном интервале",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук по специальности
1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы исследования. Диссертационная работа Н.О.Иванова посвящена изучению гладкости обобщенных решений некоторых краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на конечном интервале.

Теория функционально-дифференциальных уравнений начала развиваться в середине прошлого столетия с работ А.Д. Мышкиса. Основы теории были заложены в работах А.А. Андронова, Р. Беллмана, Г.А. Каменского, Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Б.С. Разумихина, Н.Г. Чеботарева, Л.Э. Эльсгольца и др. Большой интерес математиков к дифференциально-разностным уравнениям в те годы был связан с необходимостью решения прикладных задач, в которых важную роль играл эффект запаздывания. В последующие годы уравнения такого типа возникали во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д. Появление различных прикладных задач привело также к необходимости изучения многомерных задач для функционально-дифференциальных уравнений. Поэтому в настоящее время имеется большое число работ, посвященных исследованиям различных краевых задач для уравнений такого типа в многомерных областях. В частности, в работах А.Л. Скубачевского заложены основы общей теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений.

Однако, несмотря на бурное развитие теории дифференциально-разностных уравнений, существует масса нерешенных естественных вопросов. Например, каким образом свойства правых частей уравнений влияют на регулярность решений? Ответ на этот вопрос совсем не тривиальный. Например, существуют дифференциально-разностные уравнения, имеющие негладкие решения даже в случаях, когда правые части являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

В настоящей диссертации дается исчерпывающий ответ на этот вопрос для некоторых краевых задач для одного класса одномерных дифференциально-разностных уравнений на конечном интервале. Поэтому актуальность темы проведенного Автором исследования не вызывает сомнений.

Основные результаты диссертации, их новизна. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе диссертации рассматривается первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q = (0, d), \tag{1}$$

$$u(0) = u(d) = 0, \tag{2}$$

где

$$Q = (0, d), \quad d = N + \theta, \quad 0 < \theta \leq 1,$$

$f \in L_2(Q)$. Оператор

$$R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$$

определяется формулой

$$R_Q = P_Q R I_Q, \tag{3}$$

где операторы

$$R : L_2(R) \to L_2(R), \quad I_Q : L_2(Q) \to L_2(R), \quad P_Q : L_2(R) \to L_2(Q)$$

определены следующим образом

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j(x) u(x+j), \quad a_j \in C^\infty(R),$$

$$(I_Q u)(x) = u(x), \quad x \in Q, \quad (I_Q u)(x) = 0, \quad x \notin Q,$$

$$(P_Q u)(x) = u(x), \quad x \in Q.$$

Эта глава посвящена изучению гладкости обобщенного решения краевой задачи (1), (2).

Как уже отмечалось, решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, вообще говоря, не являются гладкими в Q даже при $f \in C^\infty(Q)$. Поэтому возникает нетривиальная задача о нахождении условий на $f(x)$, при которых решение будет регулярным.

При решении этой задачи Автор выделяет класс уравнений и вводит определение сильной эллиптичности. Для таких уравнений ему удается изучить регулярность обобщенных решений задачи (1), (2) и доказать теоремы о гладкости решений на подынтервалах (теорема 1.4.1) и гладкости решений на всем интервале Q (теоремы 1.5.1, 1.6.1). В этих теоремах указаны условия на правую часть уравнения, при которых обобщенное решение задачи (1), (2) будет гладким.

Во второй главе диссертации рассматривается вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q = (0, d), \tag{4}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{5}$$

где оператор R_Q определен в (3). Эта глава посвящена изучению разрешимости и гладкости обобщенного решения краевой задачи (4), (5).

Автор изучает поставленную задачу для сильно эллиптических уравнений (4). Для таких уравнений он устанавливает необходимое и достаточное условие существования обобщенного решения и выделяет класс единственности (теорема 2.1.1). Ему также удается изучить регулярность обобщенных решений задачи (4), (5) и доказать теоремы о гладкости решений на подынтервалах (теорема 2.2.1) и гладкости решений на всем интервале Q (теоремы 2.3.1, 2.3.2, 2.4.1). В этих теоремах указаны условия на правую часть уравнения, при которых обобщенное решение задачи (4), (5) будет гладким.

В третьей главе диссертации рассматривается краевая задача для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями на конечном интервале

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q = (0, d), \tag{6}$$

$$u(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{7}$$

где оператор R_Q определен в (3). Эта глава посвящена изучению разрешимости и гладкости обобщенного решения краевой задачи (6), (7).

Как и в предыдущих главах, Автор изучает поставленную задачу для сильно эллиптических уравнений (6). Для таких уравнений он доказывает существование и единственность обобщенного решения (теоремы 3.1.1), и доказывает теоремы о гладкости решений на подынтервалах (теорема 3.2.1) и гладкости решений на всем интервале Q (теоремы 3.3.1, 3.4.1). В этих теоремах также, как в предыдущих главах, указаны условия на правую часть уравнения, при которых обобщенное решение задачи (6), (7) будет гладким.

Замечания по работе.

В диссертации имеются отдельные незначительные погрешности редакционного характера, в частности, на стр. 5, 18, 25, 72, 75, 78, 101, 102.

1. В формулировках теорем о регулярности обобщенных решений Автор использует термин "фредгольмов оператор", поясняя его на стр. 34, при этом не указывая никаких ссылок на литературу. Возникает естественный вопрос: а как Автор понимает термин "нетеров оператор"?

2. В диссертации доказаны теоремы, из которых вытекают условия на $f(x)$, гарантирующие регулярность обобщенных решений рассматриваемых краевых задач. Однако Автор не обсуждает вопрос как изменится регулярность решений при нарушении таких условий.

3. Еще один вопрос напрашивается о повышении гладкости обобщенных решений в случае, когда правые части уравнений принадлежат классам W_2^l. Можно ли утверждать, что обобщенное решение будет принадлежать W_2^m, $m > 2$?

Указанные недостатки не влияют на качество выполненной работы и положительную оценку. Отмеченные вопросы следует воспринимать, как пожелания Автору для дальнейшей работы в этом направлении.

Общая оценка работы. Тема диссертации актуальна и соответствует специальности 1.1.2 - Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Результаты работы являются новыми, получены Автором самостоятельно, имеют важное значение для развития теории дифференциально-разностных уравнений. Следует отметить, что Автором продемонстрирована высокая аналитическая техника при доказательстве теорем.

Все утверждения четко сформулированы и обоснованы полными доказательствами, обоснованность выносимых на защиту результатов не вызывает сомнений.

Материал диссертации изложен в строгой логической последовательности, комментарии, обсуждение полученных результатов, а также иллюстрирующие примеры удачно дополняют основное содержание. Текст диссертации тщательно отредактирован.

Основные результаты своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации опубликовано 5 статей, изданных в научных журналах, индексируемых в международных базах данных, и 6 тезисов докладов на международных конференциях.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Заключение. Диссертационное исследование Иванова Никиты Олеговича "Регулярность решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений на конечном интервале" является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится новое решение научной задачи о гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка на всем интервале конечной длины, имеющей важное значение для развития общей теории краевых задач для уравнений и систем такого типа. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п.2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы", утвержденного Ученым советом РУДН, протокол № УС-12 от 03.07.2023 г., а её автор, Иванов Никита Олегович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
главный научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН),
доктор физико-математических наук (01.01.01 - математический анализ), профессор
Демиденко Геннадий Владимирович

30 ноября 2023 г.

Адрес: 630090, Россия, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, д. 4

Тел.: +7(383)3297578, e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Подпись работника
Демиденко Г. В.
заверяю
Вед. делопроизводитель
отдела ДОУ
ИМ СО РАН Е. В. Зорина
30 ноября 2023 г.