Отзыв официального оппонента

на диссертацию Белова Александра Александровича «*Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении*», представленную к защите ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Актуальность темы диссертационной работы.

В физике и технике возникают новые все более сложные задачи, предъявляющие чрезвычайно требования к точности и надежности расчета. Они включают процессы с сильно различающимися масштабами. Типичными примерами являются задачи с одним или несколькими пограничными слоями и сингулярностями. Такие задачи встречаются во многих приложениях: распространение электромагнитных волн через слоистые среды, кинетика химических реакций, пробой в газах, кумуляция и взрыв, зажигание термоядерных мишеней, модели нелинейной оптики и др. Расчет жестких задач крайне трудоемок, так как в пограничных слоях шаг должен быть чрезвычайно мелким. Особенную трудность представляют начальные участки пограничных слоев, в которых стремительно увеличиваются ошибки округления. Это сильно ограничивает точность.

Применение метода конечных разностей (МКР) к таким задачам требует разработки новых алгоритмов, повышающих точность и надежность этого метода. Метод конечных разностей – это динамично развивающаяся область вычислительной математики. В последнее время в рамках этого подхода разработано большое количество различных алгоритмов, которые реализованы в широко известных прикладных пакетах. Однако, несмотря на достигнутые успехи, ряд задач по-прежнему не удается решить в рамках существующих реализаций МКР. Общим свойством этих задач является наличие принципиальных трудностей, связанных с наличием особенностей в решении: пограничных слоев (которые в пределе при уменьшении ширины стремятся к разрывам), сингулярностей (в которых решение или его производные обращаются в бесконечность), разрывов на границах раздела сред. Поэтому разработка новых подходов, позволяющих решать данные задачи в рамках МКР, является актуальной.

Характеристика содержания диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является обобщение метода конечных разностей на задачи с вычислительными особенностями, такими как контрастные структуры, подвижные особые точки, разрывы коэффициентов.

Диссертация содержит введение, 8 глав, заключение, список литературы из 531 источника – всего 383 стр.

Введение содержит общую характеристику работы. Обоснована актуальность исследований, новизна и практическая ценность полученных результатов, сформулированы положения, выносимые на защиту.

Первая глава содержит обзор методов конечных разностей.

Во **второй главе** для интегрирования жестких задач Коши предложены геометрически адаптивные сетки, в которых шаг выбирается по кривизне интегральной кривой. Доказана оптимальность этого алгоритма в смысле метрики Хаусдорфа. Отдельно рассмотрена реализация этого метода для явных и неявных схем. Построена специальная процедура сгущения сеток и расчета апостериорных оценок погрешности.

Проведена апробация предложенных методов на представительных тестовых задачах. Показано, что явные схемы на геометрически-адаптивных сетках не уступают неявным схемам в надежности и точности, но кардинально превосходят их в экономичности. Проведены расчеты тех же тестовых задач по стандартным программам Гира и Дормана-Принса. Эти расчеты показали, что фактическая точность этих программ на много порядков отличается от заданной.

В **третьей главе** В данном цикле работ предложена специализированная явная схема, имеющая достаточную надежность и отличающаяся очень малой трудоемкостью. Показано, что эта схема превосходит известные схемы по точности и надежности другие схемы первого и второго порядка точности (специализированная схема Калиткина-Гольдина и общие схемы Эйлера и Розенброка).

Проведены расчеты задачи кинетики химических реакций на примере водород-кислородного горения. Показано, что явные схемы Рунге-Кутты на геометрически-адаптивных сетках успешно справляются с этими задачами. В то же время традиционные программы Гира и Дормана-Принса теряют надежность, не обеспечивают заданную точность, а в ряде случаев и вовсе не позволяют провести расчет.

В **четвертой главе** для задач Коши с разрушением решения предложен новый способ численного обнаружения и исследования особенностей, основанный на использовании длины дуги интегральной кривой в качестве аргумента. Конкретные формулы метода получены для полюсов степенного и логарифмического типов, а также для произведения степени на логарифм.

Для численного решения задач Коши со множественными сингулярностями решения предложен метод инверсной функции. Он позволяет продолжать решение за полюса, определяя само решение и положение полюсов с хорошей точностью. При этом можно использовать традиционные явные и неявные схемы.

В **пятой главе** для системы одномерных уравнений Максвелла построены разностные схемы, сходящиеся на сильных разрывах. Это бикомпактные консервативные схемы. Они двухточечные, причем границы слоев берутся узлами сетки. Предложен принципиально новый способ учета частотной дисперсии среды. Все это обеспечивает второй порядок точности даже на разрывных решениях.

В **шестой главе** проведено тестирование бикомпактных схем для системы одномерных уравнений Максвелла в стационарном и нестационарном случаях. Выполнены расчеты ряда представительных тестовых задач с обобщенными точными решениями. Некоторые из этих задач рассмотрены впервые. Проведено сравнение с наиболее популярными известными подходами: методом конечных разностей во временной области и методом конечных элементов. Эти расчеты убедительно показывают преимущества бикомпактных схем в задачах со слоистыми средами.

В **седьмой главе** предложен метод интегрирования уравнений Максвелла вдоль направления распространения луча. В результате исходная двумерная задача сводится к одномерной, и для ее решения применяются недавно предложенные одномерные бикомпактные схемы. Это позволяет существенно снизить вычислительные затраты по сравнению с традиционными двумерными методами типа конечных разностей и конечных элементов. Для верификации предложенного метода проведены расчеты тестовых задач с известными точными решениями.

Проведены расчеты спектров отражения реальных фотонных кристаллов, и выполнено сравнение результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

Проведены расчеты задачи о формировании поверхностной волны Блоха в одномерном диэлектрическом фотонном кристалле. Исследована зависимость времени жизни волны от толщин слоев фотонного кристалла.

В восьмой главе рассмотрены некоторые задачи, которые были решены диссертантом, но выходят за рамки данной работы.

В Заключении сформулированы основные результаты работы.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность. Все предложенные методы имеют строгое обоснование. Важным инструментом верификации были расчеты тестовых задач с известным точным решением. Эти расчеты проводились на сгущающихся сетках. Погрешность вычислялась двумя способами: как разность численного и точного решений (если последнее известно) и по методу Ричардсона. При этом непосредственно проверялась сходимость численного решения к точному и соответствие скорости убывания погрешности теоретическому порядку точности.

Результаты работы достаточно полно представлены в публикациях в авторитетных рецензируемых изданиях. Также они достаточно полно докладывались на профильных конференциях и на научных семинарах.

Теоретическая и практическая значимость исследований. Предложенные математические методы качественно превосходят по точности, надежности и экономичности ранее известные алгоритмы, расширяют область приложения метода конечных разностей и представляют интерес для широкого круга исследователей при решении прикладных задач. Они уже используются в практических вычислениях, рядом научных коллективов на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Недостатки работы.

1. Раздел 2.2.1. назван «Структура решения жесткой задачи», однако там речь идет только о пограничных слоях. Это далеко не единственная проблема, с которой можно столкнуться при исследовании «жестких» задач. Такой подход противоречит определению понятия жесткая система ОДУ, данному в разделе 1.5.1.

2. Задача отыскания наилучших узлов, которую ставит перед собой автор в разделе 2.2.3, требует более аккуратной формулировки. Дело в том, что для заданной функции и заданного интервала существует сетка, относительно которой любая квадратурная формула является точной.

3. Формула (2.5) не обязана выполняться точно на приближенном решении. Следовало внести в нее о-малое или какой-то его эквивалент. Более того, из текста не ясно, кривизну какой интегральной кривой соискатель предлагает в ней использовать: той, что определяется начальными условиями, то, что проходит через n-ую точку или какую-то еще. В известной книге Хайрера справедливо указано, что строгие доказательства теоремы о сходимости разностных методов отличаются именно этим выбором.

4. Из текста диссертации невозможно понять, считает ли автор предложенный им метод оптических путей точным или приближенным. Во всяком случае, ошибка, вносимая модельным представлением о луче, превращающая многомерную задачу в одномерную, никак не оценена.

Заключение. Диссертационное исследование соответствует паспорту специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно:

п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» в части разработки новых математических методов моделирования объектов и явлений – экономичных методов моделирования задач кинетики реакций, процессов нелинейного горения, задач интегральной фотоники и ряда других;

п.2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» в части разработки, обоснования и тестирования новых эффективных вычислительных методов для задач с особенностями в решении – жестких задач Коши для ОДУ с контрастными структурами, задач Коши для ОДУ с сингулярностями, одномерных уравнений Максвелла в слоистых диспергирующих средах – с применением современных компьютерных технологий;

п.3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» в части реализованы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента;

п. 8 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» в части проведения комплексных исследований научных проблем с применением новейших методов математического моделирования и вычислительного эксперимента: моделирование кинетики реакций водород-кислородного горения, расчеты спектров реальных фотонных кристаллов, формирование и динамика поверхностных волн Блоха в диэлектрическом фотонном кристалле.

Полученные автором результаты достоверны, основные выводы и заключения обоснованы. Автореферат корректно отражает результаты диссертационного исследования. Основные результаты диссертации достаточно полно изложены в 32 работах, из которых 32 изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 22 – в периодических научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Обобщение метода конечных разностей на задачи с особенностями в решении» полностью соответствует требованием п.2.1 разделы II Положения о присуждении ученых степеней в ФГАУ ВО Российский университет дружбы народов, утвержденного Ученым советом РУДН, протокол №12 от 23 сентября 2019 года, предъявляемых к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а ее автор - Белов Александр Александрович – степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук (специальность 05.13.18— «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»), доцент, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Блинков Юрий Анатольевич

Адрес места работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83; e-mail: blinkovua@info.sgu.ru; тел.: +79033288638

Подпись Ю.А. Блинкова удостоверяю
Ученый секретарь доцент И.В. Федусенко
"06" 06 2023 г.