На правах рукописи

Каспирович Иван Евгеньевич

Использование модификаций метода стабилизаций связей для решения задач динамики физических систем

Специальность 1.1.7.
Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2023 г

Работа выполнена в Институте физических исследований и технологий Факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»(РУДН).

Научный руководитель **Мухарлямов Роберт Гарабшевич**

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор Института
физических исследований и технологий
Факультета физико-математических
и естественных наук РУДН

Официальные оппоненты: **Гутник Сергей Александрович**

Доктор физико-математических наук, профессор
доцент кафедры математики, эконометрики и
информационных технологий
Московского государственного института
международных отношений

Холостова Ольга Владимировна

Доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры мехатроники и
теоретической механики
Московского авиационного института

Кончина Лариса Владимировна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Технологические машины и
оборудования»
филиала МЭИ в г. Смоленск

Защита диссертации состоится «26» октября 2023 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.007 при ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке) ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.

Объявление о защите размещено на сайтах ВАК и РУДН: https://vak.minobrnauki.gov.ru, https://www.rudn.ru/science/dissovet

Автореферат разослан «___» ________ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета ПДС 0200.007 Будочкина С.А.

I Общая характеристика работы

Актуальность темы

Описание динамики системы с использованием формализмов Гамильтона или Лагранжа предполагает решение дифференциальных уравнений или качественное исследование их свойств. Далеко не всегда удается аналитически получить решение систем дифференциальных уравнений. Поэтому приходится прибегать к методам численного интегрирования или к методам исследований свойств решений с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Использование численных методов решения дифференциальных уравнений связано с неизбежным накоплением ошибок численного интегрирования. Поэтому результат численного интегрирования отражает реальную картину лишь с некоторой степенью точности так как реализация той или иной разностной схемы предполагает неизбежные погрешности метода приближенного решения и накопление ошибок округления. Повышению точности приближенного решения системы дифференциальных уравнений способствует использование известной информации о свойствах решений. Уравнения движения несвободных механических систем допускают частные интегралы, определяемые уравнениями связей. Обычно для определения реакций связей используют производные от уравнений связей, что приводит к возрастанию отклонений от уравнений связей при задании начальных условий, не согласованных с уравнениями связей.

Баумгарт показал, что классический метод определения реакций контактных связей, используемый в механике, приводит к неизбежному накоплению ошибок численного интегрирования, связанному с ростом величин отклонений от уравнений связей, вызванных погрешностями в задании начальных условий. Для уменьшения этих отклонений было предложено использовать линейные комбинации уравнений связей вместе с их производными. Равенства, устанавливающие соотношения между отклонениями от уравнений связей и их производными, составляют уравнения возмущений связей.

По существу, метод Баумгарта сводится к замене уравнений связей уравнениями сервосвязей. Предложенный им метод оказался популярным и стал причиной возникновения различных модификаций. Так Ю. Ашер предложил метод стабилизации связей систем дифференциально-алгебраических уравнений более высокого порядка. Однако, сам метод, предложенный Баумгарт, и последующие его модификации ограничиваются линейными уравнениями возмущений связей и сводятся в основном к подбору постоянных коэффициентов уравнений возмущений связей.

Задача управления движением системы при отклонениях от уравнений связей приводит к дополнительным условиям, которые накладываются на реакции связей. Для определения соответствующих реакций вводятся понятия уравнений программных связей и уравнений возмущений связей. Таким образом, актуальность работы подкрепляется необходимостью обеспечения устойчивости численного решения уравнений динамики по крайней мере относительно уравнений связей.

Степень разработанности темы

Истоками исследований следует считать работы Й. Баумгарта и Ю. Ашера по стабилизации связей уравнений динамики механических систем и частных интегралов систем дифференциально-алгебраических уравнений высшего порядка. Изложенные в диссертационной работе исследования были проведены под руководством Мухарлямова Р.Г. и являются логическим продолжением исследований научной школы кафедры теоретической механики РУДН. В работах Мухарлямова Р.Г. исследуются свойства динамики систем с программными связями. Галиулиным А.С. были изложены основные методы построения систем уравнений динамики с программными связями.

Цели и задачи

Цель данной работы состоит в разработке нового подхода к построению уравнений движений механических систем и модификаций методов стабилизации связей с использованием результатов исследований для решения некоторых задач динамики. Исследования в этом направлении позволят получить новые способы численного решения уравнений динамики с заданными пределами отклонений от уравнений связей, способствующие рационализации процесса вычислений.

Основные задачи, соответствующие целям работы, формулируются следующим образом:

1. установление зависимости между максимальной величиной отклонения численного решения уравнений от коэффициентов линейной системы уравнений возмущений связей,
2. исследование свойств произвольной функции стабилизации,
3. применение метода стабилизации связей к решению задачи моделирования динамики управляемого мобильного робота и экзоскелета,
4. применение метода стабилизации частных интегралов уравнений движений к решению задачи оптимального управления полетом ракеты переменной массы,
5. использованием метода стабилизации связей для обхода сингулярных точек в задачах динамики с вырождением гессиана,
6. решение обратной задачи динамики с учетом стабилизации связей, проверка редуцируемости полученной системы к виду системы уравнений Лагранжа второго рода.

Научная новизна

В данной диссертационной работе были получены следующие новые результаты. Предложен алгоритм решения системы дифференциально-алгебраических уравнений динамики неголономных систем в форме уравнений Чаплыгина и уравнений Воронца с произвольной функцией стабилизации связей. Установлена возможность построения систем дифференциальных уравнений второго порядка, сводимых к виду уравнений Лагранжа с диссипативной функцией, по заданному набору связи с нелинейной функцией стабилизации. Предложен алгоритм по обходу точек нулевого гессиана методом стабилизации связей. Предложено решение задачи стабилизации интегралов уравнений оптимального движения ракеты в задаче Лоудена. Предложены алгоритмы решения задач управления динамикой систем твердых тел, моделирующих экзоскелеты, антропоморфные и робототехнические механизмы, и некоторые задачи неголономной механики.

Теоретическая и практическая ценность

Теоретическая и практическая значимость работы выражается следующими факторами: использование метода стабилизации связей в решении задач управления динамикой систем твердых тел, моделируемых разработанным Борисовым А.В. матричным методом составления систем уравнений движения, предложение использования метода стабилизации частных интегралов для получения устойчивого численного решения уравнений движения ракеты переменной массы и составления алгоритма обхода точек сингулярности с использованием стабилизации связей в задачах динамики.

Методы исследования

При проведении исследований, результаты которых представлены в диссертации, были использованы следующие методы:

- алгоритмы построения и решения систем дифференциально-алгебраических уравнений,
- методы модификации уравнений Лагранжа второго рода для учета неголономных связей и для приведения к форме уравнений Чаплыгина и уравнений Воронца,
- использование численных методов решения дифференциальных уравнений: метода Эйлера и метода Рунге – Кутты четвертого порядка для построения решений систем уравнений динамики,
- использование методов оценки отклонений численного решения уравнений динамики от аналитического решения при реализации разностной схемы Эйлера первого порядка и метода Рунге – Кутты 4 порядка
- применение матричного метода для составления систем уравнений динамики многозвенной системы,
- стабилизация интегралов системы уравнений оптимального движения в задаче Лоудена о движении ракеты переменной массы,
- применение методов решения обратной задачи динамики для составления систем дифференциальных уравнений второго порядка и приведения к заданной структуре с использованием обобщенных условий Гельмгольца для представления их в форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами.

Положения, выносимые на защиту

В данной диссертационной работе обосновываются и выносятся на защиту следующие положения:

1. Установлена функциональная зависимость между величиной максимального отклонения численного решения от уравнений связей и величинами коэффициентов линейной формы в функции стабилизации связей.
2. Предложен алгоритм по обходу точек сингулярности путем искусственного внедрения отклонений около сингулярной точки при численном интегрировании систем уравнений движения.

3. Установлена функциональная зависимость между функцией стабилизации связей и диссипативной функцией при решении обратной задачи динамики с учетом стабилизации связей.

Достоверность результатов

Результаты, полученные в работе, опираются на известные теоремы некоторых разделов математики и доказанные положения теоретической механики. Расчеты для построения графиков были проведены с использованием лицензионного пакета программ Matlab.

Апробация

Основные результаты диссертационной работы были изложены на конференциях:

- 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), 9-16 Сентября 2018, Сочи, Россия
- Четырнадцатая международная Казанская научная школа-конференция, 29-31 октября 2018, Казань, Россия;
- XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ 2019), 17-19 июня 2019, Москва, Россия;
- LI - LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, май 2015-2021 года, Москва, Россия;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 19-24 августа, 2019, Уфа, Россия;
- XI международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление», 14-18 июня, 2017г, Казань, Россия.
- Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики, посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского», декабрь 2019, 2020, Москва, Россия;
- Применение технологий виртуальной реальности и смежных информационных систем в междисциплинарных задачах FIT-M 2020/2021, декабрь, Москва, Россия

Публикации

По теме диссертации опубликованы 10 работ, 3 из которых входит в число статей в российских журналах из перечня ВАК, 10 работ индексируются в базе данных SCOPUS, 4 – Web of Science.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем рукописи составляет 107 страниц, включая 18 рисунков.

II. Основные содержания работы

В первой главе излагаются методы построения дифференциальных уравнений движения с учетом стабилизации связей для голономных и неголономных систем. Уравнения динамики неголономных систем при этом записываются в виде уравнений Чаплыгина или уравнений Воронца.

В первом параграфе предлагается алгоритм решения систем дифференциально-алгебраических уравнений со стабилизацией голономных связей.

Система уравнений движений записывается в матричном виде:

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}, \tag{1}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ – обобщенная матрица Гесса:

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial q^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial q^n} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{O}$ – нулевая матрица ранга $m, H_{\boldsymbol{ij}} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{q}} \oplus \boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{q} = (q^1, \dots, q^n)$ - вектор обобщенных координат и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ - вектор произвольных множителей, $\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}' \oplus \boldsymbol{F_h}$, $\boldsymbol{Q}' = \langle Q'_1, \dots, Q'_n \rangle^{\boldsymbol{T}}$, $Q'_i = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i} + Q_i$, $F_{h,k} = -\frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial t}\dot{q}^i - \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2}$, $h_k(\boldsymbol{q}, t) = 0, k = 1, \dots m < n$ – уравнения голономных связей.

Если детерминант обобщенной матрицы Гесса отличен от нуля: $\det(\widetilde{\boldsymbol{H}}) \neq 0$, то вектор $\boldsymbol{a}$, составленный из обобщенных ускорений $\ddot{\boldsymbol{q}}$ и множителя $\boldsymbol{\lambda}$, может быть выражен через обобщенные координаты, скорости и время:

$$\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{H}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Q}}. \tag{2}$$

Далее вводится функция стабилизации связей для величин отклонений от уравнений связей $y_k = h_k$:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}^2 y_k}{\mathrm{d}t^2} = F_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m) \\ k = 1, \dots m, \end{gathered} \tag{3}$$

При этом составляющие вектора обобщенных сил $\boldsymbol{F_h}$ в (1) дополняется произвольными функциями F_k:

$$F_{h,k} = -\frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial t}\dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + F_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m).$$

Во втором параграфе данный алгоритм используется для стабилизации систем с неголономными связями. Пусть $h_k(\boldsymbol{q},t) = 0$ также голономные, $g_k(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \dot{h}_k(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = 0$ дифференциальные голономные и $f_k = 0$ – кинематические неголономные: $f_k = \alpha_{ki}(\boldsymbol{q},t)\dot{q}^i + \alpha_k(\boldsymbol{q},t)$. Вектор отклонений $\boldsymbol{y}$ тогда будет иметь вид:

$$\boldsymbol{y} = \left(h_1, \dots, h_{m_1}, g_1, \dots, g_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}\right).$$

Линейную функцию стабилизации можно задать в матричном виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{K}$ – матрицы, компоненты которой представляют собой функции от обобщенных координат и скоростей.

Вектор обобщённых сил $\widetilde{\boldsymbol{Q}}$ из уравнений (1) определяется аналогично случаю голономных связей с учетом всех дифференциальных связей. С учетом (4) вводятся следующие обозначения:

$$F_{h,s} = -\frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial t}\dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + A_{sr}h_r + B_{sr}g_r + C_{sk}f_k,$$

$$F_{f,k} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i\dot{q}^j - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t}\dot{q}^i - \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial a_k}{\partial q^i}\dot{q}^i + D_{ks}g_s + E_{kl}f_l.$$

Тогда вектор обобщенных сил будет являться тензорной суммой векторов: $\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}' \oplus \boldsymbol{F_h} \oplus \boldsymbol{F_f}$ Уравнения движения запишутся аналогично (1) в виде:

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{a} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}, \tag{5}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{G} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \boldsymbol{G}^T & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Также рассматривается решение систем дифференциально-алгебраических уравнений со стабилизацией связей, записанных в форме Чаплыгина и в третьем параграфе в форме Воронца. В четвертом параграфе предложенные методы применяются к примерам неголономного движения саней и скатывания двухколесной тележки.

Во второй главе исследуются оценки безопасного диапазона значений коэффициентов линейной формы функции стабилизации связей и определяются оценки максимально возможных отклонений численного решения от реального в зависимости от значений данных коэффициентов. Также предлагается методика самоопределения коэффициентов возмущений уравнений связей. Излагается метод обхода точек сингулярности при помощи стабилизации связей.

Приводится алгоритм численного решения системы (5) методом Эйлера первого порядка:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}(t_{(\alpha)})}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_{(\alpha)},$$
$$\frac{\Delta \boldsymbol{q}(t_{(\alpha)})}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_{(\alpha)}, \tag{6}$$

где индекс в скобках означает значение функции в узле под номером α.

С учетом данной разностной схемы определяются условия, при которых величины отклонений при каждом шаге интегрирования не возрастают. То есть, если вектор $\boldsymbol{y}(t_{(\alpha)}) = \left(y_1(t_{(\alpha)}), \dots, y_m(t_{(\alpha)})\right)$ определяет величины отклонений от уравнений неголономных связей на шаге интегрирования с номером α, то условие невозрастания величин $\boldsymbol{y}(t_{(\alpha)})$ записывается следующим образом:

$$\left|y_k\left(t_{(\alpha+1)}\right)\right| \le \left|y_k(t_{(\alpha)})\right|, \quad \forall\alpha = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Для определения условий выполнения этого неравенства используется разложение $y_k\left(t_{(\alpha+1)}\right)$ по степеням шага интегрирования Δt и представление остаточного члена в форме Лагранжа с применением теоремы о среднем $R_k(\xi)$. Таким образом, с учетом функции стабилизации (4) условие (7) записывается в следующем виде:

$$|\delta_{kl} + \tau K_{kl}|\varepsilon_{max} + |R_k(\xi)| \le \varepsilon_{min}, \forall k, l = 1, \dots, m,$$

где δ_{kl} – дельта Кронекера, ε_{max} и ε_{min} максимальное и минимальное значение величин отклонений от уравнений связей. Данное неравенство можно представить через компоненты матрицы $\boldsymbol{K}$. Для этого остаточный член в форме Лагранжа переносится из левой части в правую часть и обе части уравнения делятся на ε_{max}:

$$-\frac{\delta_{kl}}{\tau} - \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\tau\varepsilon_{max}} \le K_{kl} \le \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\tau\varepsilon_{max}} - \frac{\delta_{kl}}{\tau} \tag{8}$$

Решение двойного неравенства (8) представляет собой безопасный диапазон значений компонент матрицы $\boldsymbol{K}$ в уравнениях возмущений связей, при котором решается задача стабилизации. Очевидно, что тривиальное решение уравнений возмущений связей должно быть асимптотически устойчиво. Аналогичные рассуждения проводятся и для метода Рунге-Кутты 4 порядка.

Во втором параграфе устанавливается функциональная зависимость между величиной отклонения численного решения от реального и функцией возмущений связей.

Величина с тильдой $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_{(\alpha)})$ обозначает значении функции реального решения в узле α. Вводится величина отклонения: $\tilde{\boldsymbol{x}}(t_{(\alpha)}) - \boldsymbol{x}_{(\alpha)} = \boldsymbol{\Delta}_{(\alpha)}$. Далее получены рекуррентные соотношения, установленные аналогично рассуждениям, проведенным в предыдущем параграфе. а именно, значение на $\alpha + 1$ шаге раскладывается по степеням шага τ и остаточный член записывается в форме Лагранжа:

$$\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha)} = \boldsymbol{\Delta}_{(\alpha-1)} + \tau\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, \boldsymbol{t}_{(\alpha-1)})(\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha-1)} - \aleph)\right) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\zeta), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{X}$ – вектор правой части системы $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}$, $\aleph$ обозначает слагаемые, содержащие компоненты матрицы K .

Далее вводится максимальная величина выражения: $\beth = \max\limits_{t \in [t_0, t_k]}\left(\frac{\tau}{2}\ddot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\zeta) - \aleph\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, \boldsymbol{t}_{(\alpha-1)})\right)$. С учетом неравенства треугольника, соотношение (9) примет рекуррентный вид:

$$|\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha)}| \le |\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha-1)}|\left|I_{2n} + \tau\,\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, \boldsymbol{t}_{(\alpha-1)})\right| + \tau\beth. \tag{10}$$

Под нормой вектора или матрицы по компонентам понимается максимальное значение модуля ее компонент: $|\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha)}| = \max\limits_{k=1,\dots,2n}|\Delta_{k(\alpha)}|$ При разрешении данного рекурсивного неравенства относительно первого элемента и применении формулы для суммы геометрической прогрессии выводится следующее условие:

$$|\boldsymbol{\Delta}_{(\alpha)}| \le |\boldsymbol{\Delta}_{(1)}|\left|\exp\left((t_k - t_0)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, t_\zeta)\right)\right| + \beth\frac{\left|\exp\left((t_k - t_0)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, t_\zeta)\right)\right| - 1}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_\zeta, t_\zeta)\right|}$$

Из данного соотношения следует, что максимально возможная ошибка экспоненциально зависит от длины отрезка, на котором проходит интегрирование. Также второе слагаемое данного соотношения содержит стабилизационный член $\aleph$, связанный с уравнениями возмущений связей (4). Поэтому изменение величин параметров возмущений влияет на максимальную ошибку отклонений при численном интегрировании.

В третьем параграфе рассматривается пример обхода точки сингулярности с учетом стабилизации связей при $\beta = {}^{\pi}/_{2}$ для системы уравнений

$$
\begin{cases}
\dot{v}_\alpha = g_\alpha, \\
\dot{v}_\beta = g_\beta, \\
\dot{v}_\gamma = g_\gamma + 2\mathrm{tg}\beta\dot{\gamma}\dot{\beta}, \\
\dot{\alpha} = v_\alpha, \\
\dot{\beta} = v_\beta, \\
\dot{\gamma} = v_\gamma.
\end{cases} \tag{11}
$$

Данная система численно решается при помощи разностной схемы (7). Пусть на $\mu +$ 1-ом шаге значение угла $\beta^{(\mu+1)}$ принадлежит интервалу $\left({}^{\pi}/_{2} - \varepsilon, {}^{\pi}/_{2} + \varepsilon\right)$. Тогда для того, чтобы избежать сингулярности, предлагается заменить $\beta^{(\mu+1)}$ на $\tilde{\beta}^{(\mu+1)} = \beta^{(\mu)} + \delta$, пропустив тем самым данный интервал. Параметры ε и δ задаются вручную (рисунок 1).

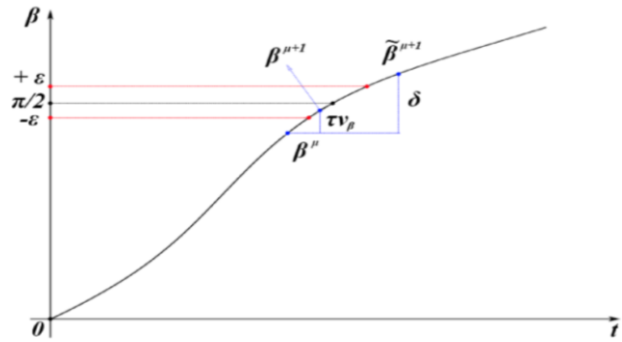

Рисунок 1

Численный алгоритм, реализующий данную схему, выглядит следующим образом:

$$
if\ \beta^{(\mu+1)} \in \left({}^{\pi}/_{2} - \varepsilon, {}^{\pi}/_{2} + \varepsilon\right)\ \ then\ \ \tilde{\beta}^{(\mu+1)} = \beta^{(\mu+1)} = \beta^{(\mu)} + \delta,
$$

Очевидно, что $\delta > 2\varepsilon$, чтобы на $\mu + 2$-ом шаге угловой параметр $\beta^{(\mu+2)}$ снова не оказался внутри интервала $\left({}^{\pi}/_{2} - \varepsilon, {}^{\pi}/_{2} + \varepsilon\right)$. Результаты численного интегрирования, реализующие данную схему представлены на рисунках (2), (3).

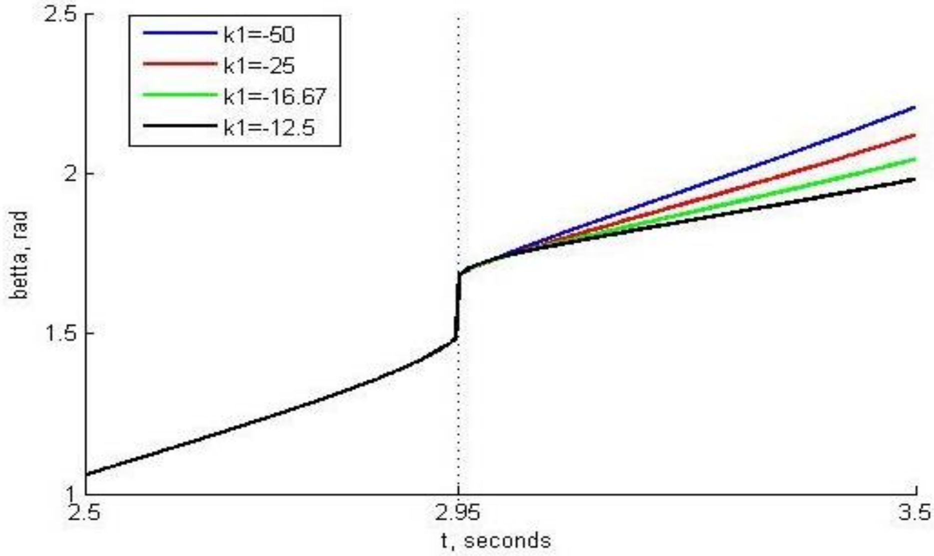

Рисунок 2

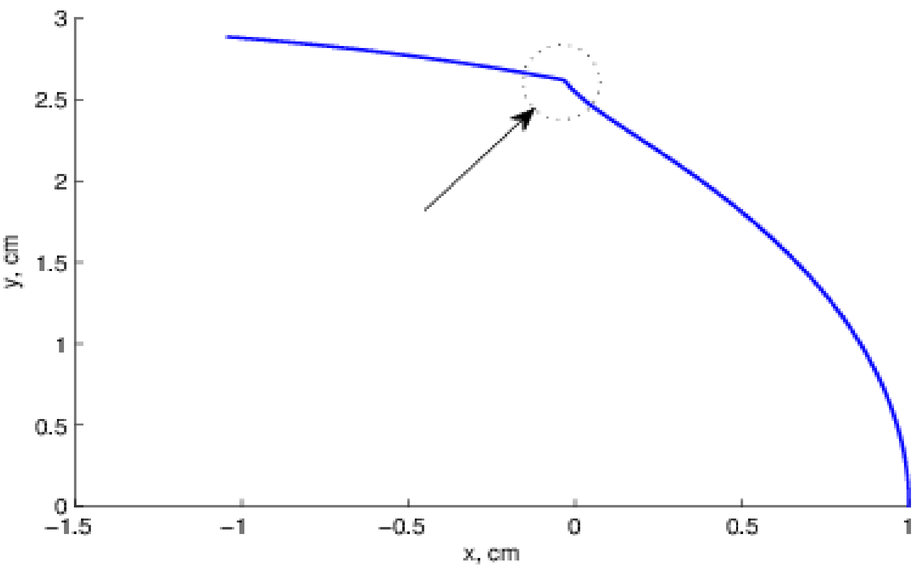

Рисунок 3

При необходимых параметрах возмущения, параметрах пропуска и шага интегрирования теоретически возможно приблизиться к аналитическому решению. Однако, связь между параметрами носит строго нелинейный характер, и уменьшение некоторых параметров приводит к значительному увеличению времени работы цикла.

В третьей главе исследуется возможность построения систем дифференциальных уравнений второго порядка по заданному набору механических связей:

$$a_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^j = a_{i,0}(\mathbf{q});\quad j = 1, \dots, n,\ \ i = 1, \dots, m,\ \ m < n. \tag{12}$$

Данная система уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных скоростей $\dot{q}^j$. Поскольку $m < n$, существует общее решение, которое представляет собой сумму частного решения и решения однородного уравнения: $a_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_ч{}^j = 0, \quad j = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m,\ m < n.$ Таким образом система уравнений связей (12) может быть переопределена в виде:

$$h^j = \dot{q}^j - v^j(\mathbf{q}) = 0,\ j = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Уравнения возмущений связей (4) записываются в виде:

$$\dot{h}^j = F^j(\mathbf{h}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),\ j = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Систему уравнений движений можно получить путем дифференциации (14) с учетом уравнений связей (13). Таким образом, наша система может быть написана следующим образом:

$$f_a = \ddot{q}^a - \frac{\partial v^a}{\partial q^b}\dot{q}^b - F^a(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0;\ a, b = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Полученная система уравнений проверяется на выполнение обобщенных условий Гельмгольца. Выполнение данных условий устанавливают функциональную зависимость между функциями возмущении связей F^a и диссипативной функцией: $D = 1/2 d_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b$. В частности, одним из возможных видов функции стабилизации, удовлетворяющих условиям Гельмгольца, являются соотношения вида:

$$F_a = -\left(d_{ab} + \frac{\partial v^b}{\partial q^a}\right)h^b.$$

Функция стабилизации при этом представляет собой линейную форму относительно отклонений связей h^b. Коэффициенты данной формы напрямую зависят от коэффициентов квадратичной формы функции диссипации D.

В четвертой главе предлагаются обобщения метода стабилизации связей и их применение к некоторым прикладным задачам динамики.

В первом параграфе метод стабилизации связей предлагается для регулирования и управления движением многозвенной системы, моделирующей движение робота или экзоскелета. Модель представляет собой систему из трех шарнирно закрепленных твердых стержней: один имитирует стопу, второй соответствует ногам и третий - для корпуса экзоскелета.

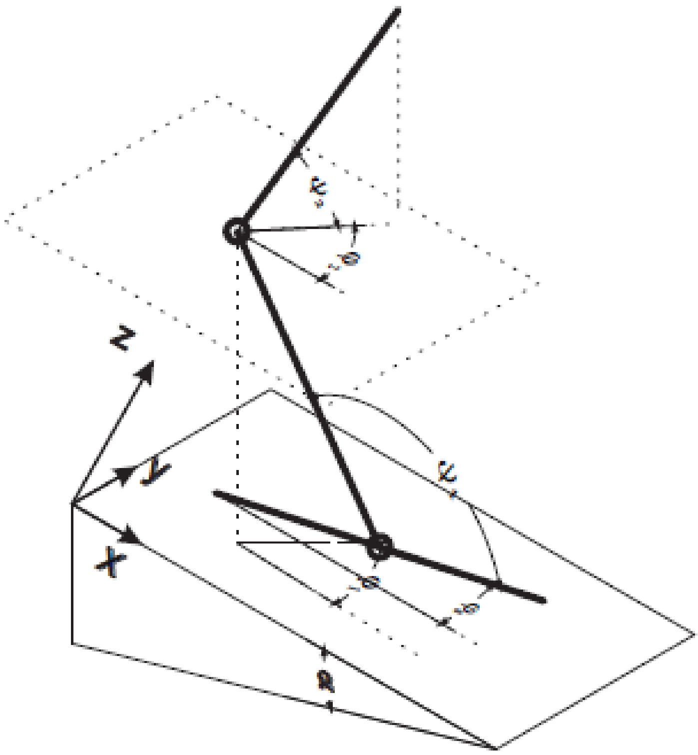

Рис. 4. Модель трехзвенного экзоскелета

Пусть диаметр каждого стержня намного меньше его длины, и вращение вокруг собственной оси стержня отсутствует. Таким образом, положение каждого звена описывается пятью координатами $(x_i, y_i, z_i, \phi_i, \psi_i)$, i = 0, 1, 2. Здесь индекс 0 означает звено-стопу, индекс 1-ногу и индекс 2-тело. Координаты (x_i, y_i, z_i), i = 0, 1, 2 определяют положение центра масс стержня, ψ_i представляет собой угол между стержнем и его проекцией плоскостью XY и ϕ_i - угол между проекцией стержня на плоскость XY и осью X (см. рис. 4).

Модель движется по наклонной плоскости с углом наклона α. Во время движения стопа или нулевое звено всегда должно лежать на наклонной плоскости, поэтому мы можем считать, что имеют место следующие ограничения $z_0 = 0$, $\psi_0 = 0$. Стержни соединены между собой шарнирами. Звено 1 закреплено на звене 0 в точке его центра масс, а звено 2 закреплено в верхней части звена 1. Таким образом, имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + l_1 n_1 \cos\psi_1 \cos\phi_1 , \\
y_1 &= y_0 + l_1 n_1 \cos\psi_1 \sin\phi_1 \\
z_1 &= l_1 n_1 \sin\psi_1 \\
x_2 &= x_0 + l_1 \cos\psi_1 \cos\phi_1 + l_2 n_2 \cos\psi_2 \cos\phi_2 , \\
y_2 &= y_0 + l_1 \cos\psi_1 \sin\phi_1 + l_2 n_2 \cos\psi_2 \sin\phi_2 , \\
z_2 &= l_1 \, sin\, \psi_1 + l_2 n_2 \, sin\, \psi_2, (z_0 = 0)
\end{aligned} \tag{16}$$

где $l_i, i = 0,1,2$ длины звеньев, n_i – параметры, описывающие положение центра масс каждого из звеньев. Если стержни однородны то $n_i = 1/2, i = 1,2$.

Для моделирования движения нулевого звена по плоскости, предположим, что стопа - это идеальное лезвие, которое не может выполнять никаких перемещений поперек движения. Это означает, что в любой момент времени оно направлено по касательной к траектории движения центра масс и накладывает следующее ограничение, представляющее собой неголономную связь:

$$\dot{y}_0 = tan\,\varphi_0\,\dot{x}_0. \quad (17)$$

Для управления движением системы вводится дополнительный набор голономных связей, которые могут быть учтены с использованием множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Число множителей Лагранжа q определяется количеством уравнений дополнительных связей. Связи могут быть выбраны следующим образом:

- Уравнение $f_1(x_0, \varphi_0) = 0$ - определяет свойства траектории на плоскости. Зависимость от координаты y_0 иногда может быть исключена в результате применения подхода Чаплыгина.
- Соотношения $f_i(x_0, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2), i = 2, \dots, q < 5$ определяют ориентацию звеньев в пространстве. Эти уравнения связей осуществляются дополнительными силами, которые сохраняют определенное положение тела во время движения. Данные силы аналогичны мышечным усилиям, поддерживающим заданное положение системы. Таким образом, число q может быть выбрано в соответствии с требуемыми свойствами движения.

Пусть трехзвенная модель представляет собой сноубордиста. Предположим, что движение сноубордиста является слаломным. В простейшем случае его траекторию можно аппроксимировать синусоидальной функцией. Таким образом, вводится ограничение

$$y_0 = Asin\,kx_0. \quad (18)$$

Далее исключаем координату y_0. Таким образом, ограничение, обусловленное уравнением (, принимает форму

$$f_1 = \tan\varphi_0 - Ak\cos kx_0 = 0, \quad (19)$$

где A и k - параметры слалома.

Для определения обобщенных управляющих сил введем несколько голономных связей:

- $f_2 = \varphi_1 - \varphi_0 = 0$, $f_3 = \varphi_2 - \varphi_0 = 0$ - проекция на плоскость звеньев 1 и 2 должна соответствовать стопе;
- $f_4 = \left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\psi_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \delta^2 = 0$ - ноги и туловище в невозмущенном движении должны сохранять вертикальное положение. Возможные отклонения не должны превышать заданного параметра δ.

Таким образом, для управления движением с определенными свойствами были добавлены четыре ограничения q = 4. Результаты численного интегрирования системы уравнений движения рассматриваемого трехзвенника с учетом стабилизации связей (4) представлены на графиках (рис. 5):

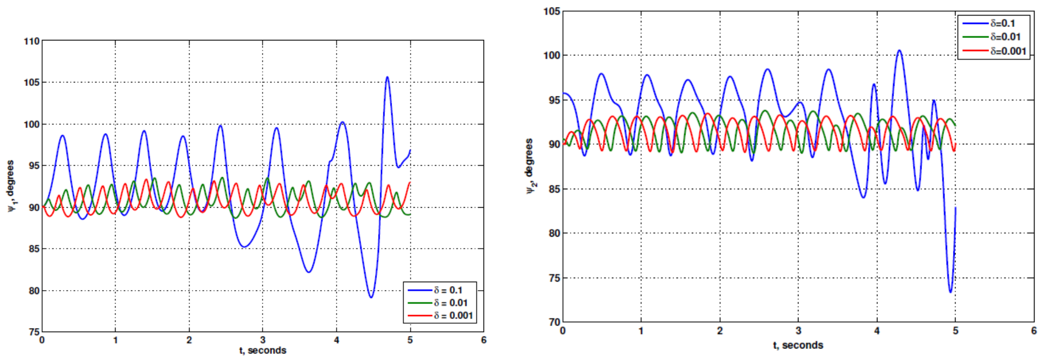

Рис. 5. Зависимость вертикального положения от времени

По графикам видно, что в определенный промежуток времени трехзвенник не теряет околовертикального положения в виду корректного выбора коэффициентов линейной формы функции возмущений связей.

Во втором параграфе представлен метод стабилизации частных интегралов движения в задаче управления движением космического аппарата переменной массы по оптимальной траектории. Пусть система представляет собой ракету, которая движется в центральном поле сил с потенциалом $U = -\frac{\mu}{r}$. Обозначим $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – радиус вектор и вектор скорости. Тогда для решения классической задачи о движении тела с переменной массой записываются уравнения Мещерского:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F_r} - \boldsymbol{\nabla} U,$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\boldsymbol{F_r}$ – вектор реактивной силы,

$$\boldsymbol{F_r} = \frac{2P}{I_{sp}\, g}\boldsymbol{e},$$

где I_{sp} – удельный импульс, $P = \frac{1}{2}\beta I_{sp}^2 g^2$ – мощность, β – секундный расход массы. Введем семимерный вектор состояния $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, m)$ и сопряженный к нему вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda_r}, \boldsymbol{\lambda_v}, \lambda_m)$. Рассмотрим задачу об определении управляющих функций $\boldsymbol{e}$ и β, при которых функционал

$$S = \int (\boldsymbol{\lambda}\dot{\boldsymbol{x}} - H)\mathrm{d}t + \mu_s\psi_s + \nu_j\Theta_j + J,$$

принимает минимальное значение, где $H = (\boldsymbol{\lambda_r}, \boldsymbol{v}) + \left(\boldsymbol{\lambda_r}, \frac{2P}{I_{sp}\, gm}\boldsymbol{e} - \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\right) - \frac{2P\,\lambda_m}{I_{sp}^2\, g^2} + \sigma f$ – гамильтониан системы, начальные условия $\psi_s(\boldsymbol{x_0}) = 0$, $s = 1,..,14$, $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x}(t_0)$, краевые условия $\Theta_j(\boldsymbol{x_1}, t_1) = 0$, $j = 1, \dots, j_1 \le 14$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{x_1}$, $J(\boldsymbol{x_1}, t_1)$ – дополнительный функционал.

Дифференциальные уравнения, соответствующий решению оптимальной задачи, можно записать в форме уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{2P}{I_{sp}\, gm}\boldsymbol{e} - \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}, \ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}, \ \dot{m} = -\frac{2P}{I_{sp}^2\, g^2}, \tag{20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Вектор тяги по модулю равен единице, что определяет равенство, образующее уравнение связи:

$$f = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{2}} - 1 = 0, \tag{21}$$

В диссертационном исследовании данный метод стабилизации связей применяется к первым интегралам для обеспечения устойчивости численного решения при ненулевом заданном векторе начальных отклонений $\boldsymbol{\varepsilon}$. Расширим гамильтониан с учетом величин отклонений от первых интегралов:

$$H' = H + \boldsymbol{\gamma}\widetilde{\boldsymbol{g}}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – произвольные множители, $\widetilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}', t) - \boldsymbol{C}$ - величины отклонений от первых интегралов $\boldsymbol{g}$:

$$\tilde{g}_1 = -\frac{\mu}{\boldsymbol{r'}^3}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{r}') + (\boldsymbol{\lambda_r}, \boldsymbol{v}') + \frac{P}{2b}\boldsymbol{\lambda}^2 - C_1 = 0;$$

$$\tilde{g}_2 = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}') - 2(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{\lambda}_r) - 5\frac{p}{2b}\int \boldsymbol{\lambda}^2\, dt + 3\,C_1 t - C_2 = 0.$$

Матрица K в уравнении возмущений частных интегралов (4) выбрана диагональной:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Пусть отклонения в начальных данных претерпевают координата x и масса m. То есть $\varepsilon_x = \varepsilon_m \neq 0$. Начальные данные выбраны в виде $x'_0 = 1 + \varepsilon_x$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$, $v'_{x0} = 2$, $v'_{y0} = 2$, $v'_{z0} = 20$, $m'_0 = 500 + \epsilon_m$. Результат численного интегрирования при $k_1 = 1$, $k_2 = 1000$ и различных значениях вектора отклонений $\boldsymbol{\varepsilon}$ представлен на рисунке 6:

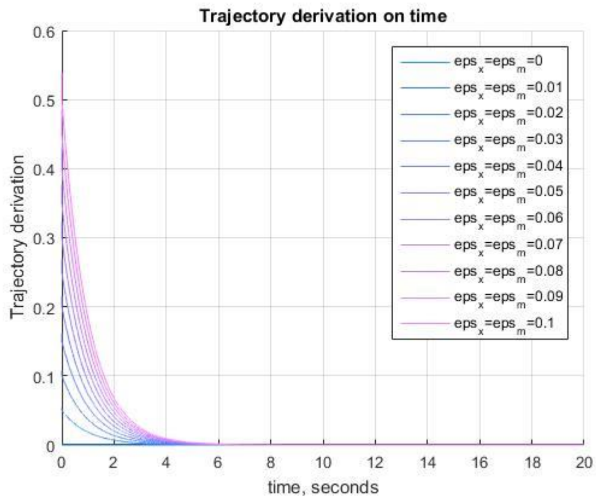

Рис.6 Отклонение от первых интегралов

Отклонение, представленное по оси ординат, считается как норма вектора отклонений от первых интегралов $\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2}$. По рисунку видно, что при движении значения отклонений стремится к нулю, то есть метод стабилизации обеспечил устойчивость, несмотря на искусственно введенные отклонения в начальных данных.

В заключении формулируются основные результаты диссертации, которые заключаются в следующем:

- в первой главе разработан алгоритм решения систем дифференциально – алгебраических уравнений динамики, записанных в форме уравнений Чаплыгина и Воронца, с использованием метода стабилизации связей.
- во второй главе получено выражение для оценки максимальной величины отклонения численного решения от уравнений связей с установлением зависимости величины данного отклонения от функции стабилизации связей. Применение метода

стабилизации связей для обхода сингулярных точек на примере задачи динамики твердого тела успешно обеспечивает траекторию, соответствующую численному решению.

- в третьей главе показано, что в случае редуцирования систем дифференциальных уравнений второго порядка к виду уравнений Лагранжа второго рода для решения задачи стабилизации связей необходимо ввести функцию диссипации, при этом устанавливается между ними функциональное соотношение.

- в четвертой главе успешно решена задача стабилизации связей движения многозвенной системы, описывающей динамику скатывающегося по наклонной плоскости экзоскелета. Также продемонстрировано, что обобщение метода стабилизации частных интегралов позволяет получить локально устойчивое численное решение уравнений Понтрягина в задаче по поиску оптимальной траектории ракеты переменной массы.

Публикации по теме диссертационного исследования

Научные статьи, опубликованные в журналах, индексируемые в международных базах научного цитирования:

1. *Borisov A.V., Blinov A., Kaspirovich I.E. and other* Electromechanical Model of Variable-Length Link for Exoskeleton or Prosthesis // Lecture Notes in Networks and Systems – 2023. – P. 1344-1353.

2. *Borisov A. V., Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G., Filippenkov K. D.* Robotic Controlled Electromechanical Model of Two Links of Variable Length for Aerospace Purposes // Russian Aeronautics. – 2022. – Vol. 65. – No 1. – P. 68-80.

3. *Matukhina O. V., Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* On a Problem of Programming the Movement of a Mobile Robot // 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). – IEEE, 2020. – P. 1-5.

4. *Borisov A. V., Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* On Mathematical Modeling of the Dynamics of Multilink Systems and Exoskeletons // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2021. – Vol. 60. – No 5. – P. 827-841.

5. *Borisov A. V., Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* Dynamic Control of Compound Structure with Links of Variable Length // Mechanics of Solids. – 2021. – Vol. 56. – No 2. – P. 197-210.

6. *Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* Possible solutions of inverse dynamical problems with regards for nonlinear constraint stabilization function // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1705. – P.1-5.

7. *Kaspirovich I. E., Askarova K.Z., Mukharlyamov R. G.* Determination of constraint stabilization parameters with multiple roots of characteristic equation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1301. – P. 1-4.

8. *Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* On Constructing Dynamic Equations Methods with Allowance for Atabilization of Constraints // Mechanics of Solids. – 2019. – Vol. 54. – No 4. – P. 589-597.

9. *Kaspirovich I. E.* Constraint stabilization of two-wheeled sleigh // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 468. – P. 1-7.

10. *Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G.* Constraint Stabilization Application to Chaplygin

Systems // 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – 2018. – С. 1-4.

Научные статьи, опубликованные в научных журналах из списка ВАК (приравнивается к перечню РУДН до 31.12.2019):

1. Каспирович И. Е. Управление динамикой составной конструкции со звенями переменной длины / А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 2. – С. 72-87.

2. Каспирович И. Е. О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов / А. В. Борисов, И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2021. – № 5. – С. 162-176.

3. Каспирович И. Е. О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей / И. Е. Каспирович, Р. Г. Мухарлямов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 3. – С. 124-135.

КАСПИРОВИЧ Иван Евгеньевич

Использование модификаций метода стабилизаций связей для решения задач динамики физических систем

В основном, поведение динамических систем описывается при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений. Только для нескольких систем удается найти аналитическое решение. Для решения большинства задач применяются методы численного интегрирования. Однако, при численном интегрировании систем уравнений движения со связями возможен эффект накопления ошибок округления при реализации той или иной разностной схемы. Это может привести к неустойчивости численного решения относительно уравнений связей. Для ограничения величины накопления Й. Баумгартом был предложен алгоритм по стабилизации связей при численном интегрировании. Данное диссертационное исследование посвящено некоторым приложениям данного метода к задачам моделирования, оптимизации и обратным задачам динамики.

KASPIROVICH Ivan Evgenyevich

Application of modifications of constraint stabilization method to solve problems of dynamics of physical systems

Basically, the behavior of dynamical systems is described with the help of ordinary differential equations. Only for a few systems it is possible to find an analytical solution. Numerical integration methods are used to solve the majority of problems. However, when numerically integrating systems of motions equations with mechanical constraints, the effect of accumulation of rounding errors is possible with implementing a particular finite difference scheme. This can lead to instability of the numerical solution with respect to the constraint equations. To limit the magnitude of such accumulation J. Baumgarte proposed an algorithm to stabilize the constraints during numerical integration. This dissertation research is devoted to some applications of this method to modeling, optimization and inverse dynamical problems.