

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования "Российский университет
дружбы народов имени Патриса Лумумбы"

На правах рукописи

Каспирович Иван Евгеньевич

**Использование модификаций метода стабилизаций связей для решения
задач динамики физических систем**

Специальность 1.1.7

Теоретическая механика. Динамика машин

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Мухарлямов Роберт Гарабшевич

Москва, 2023 г

Оглавление

Введение.....	3
1. Модификация алгоритма решения систем уравнений динамики со стабилизацией связей.....	16
1.1 Стабилизация голономных связей	16
1.2 Стабилизация неголономных связей	26
1.3 Стабилизация связей уравнений динамики, записанных в форме уравнений Воронца.....	31
1.4. Примеры.....	35
2. Определение ограничений, накладываемых на коэффициенты линейной системы уравнений возмущений связей.....	44
2.1 Оценка параметров возмущения	44
2.2 Оценка максимальной ошибки при численном интегрировании методом Эйлера первого порядка	51
2.3 Применение метода стабилизации связей при обходе сингулярных точек численного решения на примере задачи о качении шара	56
3. Построение систем дифференциальных уравнений заданной структуры с учетом стабилизации связей	61
3.1 Построение систем уравнений с учетом стабилизации связей.....	61
4. Использование метода стабилизации связей для решения прикладных задач.....	68
4.1 Моделирование динамики многозвенной системы.....	68
4.2. Стабилизация первых интегралов в задаче Лоудена	74
Заключение	79
Список литературы	80
Приложение 1	87
Приложение 2	89

Введение

Идея о существовании законов природы не нова и, на первый взгляд не так очевидна. Лишь недавно по историческим меркам, как Исаак Ньютон опубликовал фундаментальную работу [1], в которой на языке математики описываются механические движения. Книга Ньютона и многие последующие работы послужили основой для возникновения такой дисциплины как механика. Механика стремительно развивалась, поскольку именно описание движения тел помогало развитию не только инженерной мысли, но и находило применение в других областях человеческой деятельности. Наряду со становлением механики развивался также и математический аппарат. Начала аналитической механики были изложены Жозефом Лагранжем [2]. В лагранжевом формализме динамику системы можно описать в терминах обобщенных координат. Для этого лагранжиан представляется в виде функции, зависящей от обобщенных координат системы, далее по этой функции составляются дифференциальные уравнения движений, и исследуется динамика системы. Раусом [3] было предложено для части обобщенных переменных, а именно, для циклических координат записывать уравнения динамики с использованием обобщенных импульсов по этим переменным. Гамильтон развил идею Рауса [4; 5] и путем преобразований Лежандра перешел от координатного описания системы к описанию динамики фазового пространства этой же системы. И, если в случае механики Лагранжа система описывалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в механике Гамильтона динамика системы описывается уравнениями первого порядка, но их количество увеличено в два раза.

Движение, описываемое уравнениями Гамильтона или уравнениями Лагранжа, не всегда может быть свободным, то есть на координаты и скорости механической системы обычно накладываются дополнительные ограничения, представляющие связи, накладываемые на механическую

систему. С математической точки зрения решение уравнений движений системы с механическими связями сводится к поиску условного экстремума функционала действия [6], [7]. Одной из фундаментальных работ, рассматривающих динамику систем с механическими связями, можно считать работу Г. Герца [8]. В [9] описывается подход Герца, согласно которому обобщенные силы являются следствием скрытого движения циклической природы.

Механические связи, зависящее только от обобщенных координат, называются позиционными. Кинематическими связями называются ограничения, накладываемые на кинематические величины, такие как обобщенная скорость, ускорение и т.д. Позиционные и кинематические связи, которые сводятся к позиционным, называются голономными связями. Связи, которые не могут быть представлены в виде позиционных, называются неголономными.

В некоторых случаях уравнения движений, описывающие динамику систем с неголономными связями, могут быть модифицированы к виду, в котором неголономные связи входят в структуру данных уравнений. Подобный подход был описан отечественными механиками Чаплыгиным С.А. [10] и Воронцом П.В. [11]. Согласно Чаплыгину, в некоторых задачах обобщенные координаты можно подобрать таким образом, что функция Лагранжа и обобщенные силы не будут зависеть от части координат. В этом случае на основе основного уравнения динамики, выразив зависимые виртуальные перемещения через независимые переменные, можно модифицировать уравнения Лагранжа второго рода так, что неголономная связь учитывается дополнительными слагаемыми. Воронец развил идеи Чаплыгина и представил метод составления систем уравнений движений неголономной системы с дополнительными слагаемыми, учитывающими неголономные связи, не прибегая при этом к методу разделения переменных.

Интересный подход был предложен Аппелем в работе [12]. Аналогом кинетической энергии в уравнениях Аппеля является квадратичная форма относительно обобщенных ускорений. Сами же уравнения записываются относительно квазиординат. Таким образом, кинематическая связь, представляет собой линейную форму по квазиординатам. Данное обстоятельство существенно облегчает решение систем уравнений движения с неголономными связями [13].

Понятие классической голономной связи обычно подразумевает наличие контакта между соприкасающимися поверхностями. Анри Бегеном было предложено обобщение понятия связи, при котором ограничение на систему накладывается за счет различных внешних сил или вспомогательных источников энергии. Такие связи сам Беген называл сервосвязями [14]. В дальнейшем теорию динамики систем с параметрическими сервосвязями развивает Азизов А.Г. в работах [15; 16].

Также механическую связь можно задавать для управления изменением параметров динамической системы со временем. Движение подобного рода систем называется программным, а соответствующие связи являются программными связями. Построение систем программного движения исследуется в работе Галиуллина А.С [17] и Мухарлямова Р.Г. [18].

Актуальность проблемы. Описание динамики системы с использованием формализмов Гамильтона или Лагранжа предполагает решение дифференциальных уравнений или качественное исследование их свойств [19]. Далеко не всегда удастся аналитически получить решение систем дифференциальных уравнений. Поэтому приходится прибегать к методам численного интегрирования [20] или к методам исследований свойств решений с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений [21].

Использование численных методов решения дифференциальных уравнений связано с неизбежным накоплением ошибок численного интегрирования. Поэтому результат численного решения отражает реальную картину лишь с некоторой степенью точности. Дело в том, что реализация той или иной разностной схемы численного интегрирования сопровождается накоплением многочисленных ошибок, в частности ошибок округления.

Баумгарт показал [22], что классический метод определения реакций контактных связей, используемый в механике, приводит к неизбежному накоплению ошибок численного интегрирования, связанному с ростом величин отклонений от уравнений связей, вызванных погрешностями в задании начальных условий. Для уменьшения этих отклонений Баумгарт предложил использовать линейные комбинации уравнений связей вместе с их производными. Уравнения, устанавливающие соотношение между линейными комбинациями по связям и их производным, называются уравнениями возмущений связей. По существу метод Баумгарта сводится к замене уравнений связей уравнениями сервосвязей. Метод стабилизации связей, предложенный Баумгартом, оказался популярным и стал причиной возникновения различных модификаций. Так Ю. Ашером был предложен метод по стабилизации систем дифференциально - алгебраических уравнений высшего порядка со связями [23].

Условия, накладываемые на поведение решения системы уравнений динамики при отклонениях от уравнений связей, приводит к дополнительным требованиям при определении реакций связей. Для этих целей было введено понятие программных связей [17].

Таким образом, актуальность работы подкрепляется необходимостью анализировать данные на основе устойчивого численного решения. Метод стабилизации связей позволяет добиться устойчивости численного решения в рассматриваемых рамках задачи.

Цель работы. Цель данной работы состоит в разработке модификаций методов стабилизации связей к исследованию динамики физических систем и их приложении к решению некоторых задач динамики. Решение этой задачи позволит получить методы численного решения уравнений динамики с заданными пределами отклонений от уравнений связей. Соответствующие методы позволят получить методы решения, направленные на рационализацию вычислительного процесса.

Основные задачи, соответствующие целям работы, формулируются следующим образом:

1. установление зависимости между максимальной величиной отклонения численного решения уравнений от коэффициентов линейной системы уравнений возмущений связей,
2. исследование свойств нелинейной функции стабилизации,
3. применение метода стабилизации связей к задаче моделирования динамики управляемого мобильного робота и экзоскелета,
4. применение метода стабилизации частных интегралов уравнений движения к задаче оптимального управления полетом ракеты переменной массы,
5. исследование возможности обхода сингулярных точек в задачах динамики с вырождением гессиана с использованием метода стабилизации связей,
6. решение обратной задачи динамики с учетом стабилизации связей, проверка редуцируемости полученной системы к виду систем уравнений Лагранжа второго порядка.

В работе рассматривается обобщение метода стабилизации связей, при котором функция стабилизация задается в виде произвольной функции с заданными свойствами.

1. Определение безопасного диапазона значений коэффициентов линейной формы функции возмущений связей

В диссертационной работе приводится анализ зависимости выбора функции стабилизации от максимальной величины отклонений численного решения от уравнений связей в зависимости от выбора метода численного интегрирования.

2. Стабилизация движения мобильного робота или экзоскелета

Далее метод стабилизации связей используется для решения задач динамики неголономных систем, соответствующих движению мобильного робота или экзоскелета. Всевозможные модели мобильных роботов или экзоскелетов широко применяются в современных прикладных задачах исследования управляемых систем. Математическая модель, описывающая динамику данных аппаратов, рассматривалась в работах [24–26]. Модель представляет собой совокупность шарнирно соединенных друг с другом звеньев с переменной длиной или подвижным центром тяжести. Механические связи, накладываемые на звенья системы, служат для задания свойств регулируемого движения системы. Таким образом, задавая набор таких связей, можно определить режим движения или работы многозвенной системы. Накопление ошибок при численном интегрировании приводит к неустойчивости численного решения. Решение задачи стабилизации связей крайне важно для получения устойчивого численного решения на продолжительном интервале численного интегрирования.

3. Стабилизация первых интегралов в задаче движения космического аппарата переменной массы

Необходимым условием стабилизации связей является асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения возмущений связей. В данной работе исследуется задача стабилизации частных интегралов уравнений оптимального движения космического аппарата в центральном

поле сил. В работе [27; 28], [29] рассматривалась задача о нахождении первых интегралов уравнений Понtryгина для задачи Лоудена [30] на участках малой и средней тяги двигателя ракеты переменной массы. Численное решение уравнений Понtryгина с учетом метода стабилизации первых интегралов движение получается устойчивым при соответствующем выборе значений коэффициентов линейной формы функции стабилизации.

4. Обход сингулярных точек с использованием метода стабилизации связей

Метод стабилизации связей может быть использован для решения некоторых задач с сингулярностями. В данной работе рассматривается возможность применения метода стабилизации связей в задачах с обходом сингулярных точек. В некоторых задачах динамики [31] значение детерминанта матрицы Гесса может обратиться в ноль в определённые моменты времени. Для обхода сингулярных точек предлагается воспользоваться тем фактом, что метод стабилизация связей позволяет привести численное решение к реальному решению с допустимой точностью за счет оптимального выбора функции стабилизации. При появлении отклонения от реального решения с приближением к сингулярной точке процесс численного интегрирования системы уравнений с учетом стабилизации связей продолжится, обходя тем самым эту сингулярную точку.

5. Решение обратной задачи динамики с учетом стабилизации связей

Метод управления динамикой системы с учетом стабилизации связей может быть рассмотрен как разновидность обратной задачи динамики, которая сводится к составлению дифференциальных уравнений движения по заданным уравнениям связей. В работе [32] было показано, что для решения задачи стабилизации связей уравнения движения, полученные путем решения обратной задачи, должны быть записаны в виде уравнений Лагранжа

2 рода с диссипативной функцией. В конечном итоге устанавливается связь между уравнениями возмущений связей и диссипативной функцией.

Методы исследования:

- использование алгоритмов построения и решения систем дифференциально-алгебраических уравнений;
- использование методов модификации уравнений Лагранжа второго порядка для учета неголономных связей и приведения к виду уравнений Чаплыгина и Воронца;
- применение методов численного интегрирования первого порядка Эйлера и четвертого порядка Рунге – Кутты к решению систем уравнений динамики;
- использование методов оценки отклонений численного решения уравнений динамики от аналитического решения при реализации разностной схемы Эйлера первого порядка;
- применение матричного метода для составления систем уравнений движений, описывающих динамику многозвенной системы;
- определение первых интегралов системы уравнений оптимального движения в задаче Лоудена о движении ракеты переменной массы;
- применение методов решения обратной задачи динамики для составления систем дифференциальных уравнений второго порядка заданной структуры;
- использование обобщенных условий Гельмгольца для установления условий приведения систем уравнений движения к виду уравнений Лагранжа второго рода с функцией диссипации.

Достоверность полученных результатов. Результаты, полученные в работе, опираются на известные теоремы некоторых разделов математики и

доказанные положения теоретической механики. Расчеты для построения графиков были проведены с лицензионного пакета программ Matlab.

Личный вклад автора состоит в

- определении выражения для оценки величины погрешности численного решения при заданной функции стабилизации связи;
- разработке метода решения задачи стабилизации динамики многозвенной системы, описывающей динамику робототехнических и биомеханических систем;
- стабилизации первых интегралов в задаче стабилизации оптимальной траекторий движения космического аппарата переменной массы;
- установлении функциональной зависимости между диссипативной функцией и функцией стабилизации при решении обратных задач динамики;
- разработке алгоритма решения задач об обходе точек сингулярности с использованием метода стабилизации связей.

Научная новизна работы состоит в

- определении алгоритма решения системы дифференциально алгебраических уравнений вида Чаплыгина и Воронца с произвольной функцией стабилизации связей;
- установлении возможности построения систем дифференциальных уравнений второго порядка, сводимых к виду уравнений Лагранжа с диссипативной функцией, по заданному набору связи с нелинейной функцией стабилизации;
- предложении использования алгоритма по обходу точек нулевого гессиана методом стабилизации связей.

Практическая ценность работы состоит в

- разработке и имплементации метода стабилизации связей в разработанный Борисовым А.В. матричный метод по составлению систем уравнений движения, моделирующих динамику многозвенной системы;
- предложении использования метода стабилизации частных интегралов для получения устойчивого численного решения уравнений движения ракеты переменной массы;
- предложении алгоритма обхода точек сингулярности с использованием стабилизации связей в задачах динамики.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были изложены на конференциях:

- 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon);
- Четырнадцатая международная Казанская научная школа-конференция;
- XIII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ 2019)
- LI, LII, LIII, LIV, LV, LVI, LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники;
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики;
- XI международная Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление»;
- Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики, посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского»;

- Применение технологий виртуальной реальности и смежных информационных систем в междисциплинарных задачах Fit-M 2020/2021
- XI Всероссийский съезд механиков, 2019

Основные публикации на тему диссертационного исследования.

По теме диссертации опубликованы 33 работы, 6 из которых входит в число статей в российских журналах из перечня ВАК, 9 работ индексируются в базе данных SCOPUS, 4 – Web of Science.

Работы [33–35] посвящены исследованию метода стабилизации связей в задачах динамики систем с неголономными связями. Установлена связь между коэффициентами линейной формы уравнений возмущений и величиной максимального отклонения численного решения от уравнений неголономных связей. В работах [36–38] также исследуется возможность стабилизации неголономных связей в задачах с модифицированными уравнениями Лагранжа второго рода вида Чаплыгина или Воронца. Работы [39–41] посвящены исследованию методов обхода сингулярных точек в задачах динамики твердого тела. В работах [32; 42–45] решается обратная задача динамики с учетом стабилизации связей. Также исследуются условия приведения полученных систем уравнений к виду уравнений Лагранжа второго рода и устанавливается связь между диссипативной функцией и коэффициентами линейной формы функции стабилизации. В работе [46] рассматривается возможность самоопределения коэффициентов линейной формы функции стабилизации на каждом шаге численного интегрирования для получения устойчивого относительно уравнений связей численного решения. Работы [24; 25; 47–53] посвящены исследованию проблемы стабилизации связей в задачах динамики многозвенной системы, моделирующей движение мобильного робота или экзоскелета.

В данной работе приведены теоретические исследования и методы достижения поставленных целей.

Структура и объем диссертационной работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем работы составляет 107 страниц, включая 18 рисунков.

В первой главе излагаются методы построения дифференциальных уравнений движения с учетом стабилизации связей для голономных и неголономных систем. Уравнения динамики неголономных систем при этом записываются в виде уравнений Чаплыгина или Воронца.

Вторая глава посвящена оценкам безопасного диапазона значений коэффициентов линейной формы стабилизации связей и оценкам максимально возможного отклонения численного решения от реального в зависимости от значений данных коэффициентов. Также предлагается методика самоопределения коэффициентов возмущений уравнений связей. Предлагается метод обхода точек сингулярности при помощи стабилизации связей.

Третья глава посвящена исследованию модификаций метода стабилизации в теоретических задачах. Исследуется возможность построения систем уравнений движения по заданным связям с учетом функции стабилизации и условия их приведения к виду уравнений Лагранжа второго рода с диссипативной функцией.

Четвертая глава предлагает ознакомиться с применением методов стабилизации связей к решению прикладных задач. Рассмотрена задача управления динамикой многосвязной системы. Обобщение метода стабилизации частных интегралов уравнений движений используется в задаче динамики полета космического аппарата переменной массы.

В заключении кратко формулируются основные результаты, полученные в результате диссертационного исследования.

1. Модификация алгоритма решения систем уравнений динамики со стабилизацией связей

1.1 Стабилизация голономных связей

Пусть состояние механической системы определяется набором обобщенных координат, составляющих вектор $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$. Изменение положения механической системы во времени подразумевает зависимость вектора \mathbf{q} от времени t : $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Скорость изменения положения системы определяется вектором скоростей: $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{q}(t)/dt = \dot{\mathbf{q}}(t) = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Вектор кинематического состояния, полностью описывающий кинематику системы, представляет собой тензорную сумму векторов обобщенных координат и скоростей: $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{v}(t))$. Если этот вектор может принимать произвольные значения на всем рассматриваемом интервале времени движения, то движение системы является свободным на этом интервале. Предположим, что движение не является свободным и вектор кинематического состояния ограничен набором механических связей, описываемых уравнениями:

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{q}, t) &= 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \\ \tilde{h}_k &= a_{ki}(\mathbf{q}, t)\dot{q}^i + a_k(\mathbf{q}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, m_2, \quad m = m_1 + m_2 < n. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь и в дальнейшем, соответствуя обозначению Эйнштейна, повторяющиеся индексы подразумевают суммирование по одинаковым индексам.

Первые равенства в уравнениях (1.1.1) содержат зависимость только от обобщенных координат и времени. Соответствующие связи носят название *голономных связей* или *геометрических связей*. Связи, уравнения которых содержат также и обобщенные скорости, называются *кинематическими связями*. Геометрические связи и кинематические связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы и приведены к виду уравнений геометрических связей, являются *голономными* связями.

Для того чтобы определить, можно ли кинематическую связь в выражении (1.1.1) записать в виде геометрической связи, рассматривается тензор неголономности [54]:

$$\Omega_{jkl}^r = a_{r[j} \partial_k a_{|r|l]} = a_{rj} \left(\frac{\partial a_{rl}}{\partial q^k} - \frac{\partial a_{rk}}{\partial q^l} \right) + a_{rk} \left(\frac{\partial a_{rj}}{\partial q^l} - \frac{\partial a_{rl}}{\partial q^j} \right) + a_{rl} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{rj}}{\partial q^k} \right),$$

$$r, j, k, l = 1, \dots, m,$$

где $\partial_k = \frac{\partial}{\partial q^k}$ и квадратные скобки означают альтернирование – повторение с учетом знака перестановки. Например,

$$T_{[i_1 i_2 \dots i_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} T_{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)},$$

где S_n – множество всех перестановок $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)$ из n элементов, $sgn(\sigma)$ – четность перестановки. Отделение прямыми скобками индекса r обозначает, что этот индекс не участвует в альтернировании.

Критерий голономности связей формулируется в следующем виде: если все компоненты тензора неголономности равны нулю, то кинематические связи, определяемые выражением (1.1.1), являются голономными и могут быть сведены к виду $h_k(\mathbf{q}, t) = 0$. В этом параграфе полагается, что все условия голономности выполняются и систему (1.1.1) можно рассматривать как набор голономных связей

$$h_k = 0, k = 1, \dots, m. \quad (1.1.2)$$

Для начала рассмотрим динамику систем с голономными связями.

Для описания динамики механической системы ставится вариационная задача определения экстремалей функционала действия [4]:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt, \quad (1.1.3)$$

где $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ – функция Лагранжа, определяемая в классической механике как разность кинетической энергии и потенциальной энергии: $L = T - U$. По

определению в точке экстремума функционала действия S первая вариация обращается в нуль:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0. \quad (1.1.4)$$

Если функция $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ непрерывна на рассматриваемом интервале времени движения системы, $t \in (t_1, t_2)$, то процедуру вариации можно внести под знак интеграла и расписать вариацию функции Лагранжа в явном виде:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt = 0. \quad (1.1.5)$$

Для учета непотенциальных сил $\mathbf{Q} = (Q_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dots, Q_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t))$, $\nexists F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t): Q_k = \partial_k F, \forall k = 1, \dots, n$, выражение (1.1.5) может быть обобщено следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q} \delta \mathbf{q} \right) dt = 0.$$

Данное выражение представляет собой принцип Остроградского - Гамильтона [55].

Если вектор-функция $\mathbf{q}(t)$ также непрерывна, то в выражении $\delta \dot{\mathbf{q}}$ знаки вариации и дифференцирования можно поменять местами: $\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{q}$. С учетом основной теоремы математического анализа и известной формулы Лейбница выражение (1.1.5) переписывается в следующем виде:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} + \mathbf{Q} \delta \mathbf{q} \right) dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (1.1.6)$$

Если граничные точки фиксированы, то $\delta \mathbf{q}(t_1) = \delta \mathbf{q}(t_2) = \mathbf{0}$ и второе слагаемое в равенстве (1.1.6) обращается в нуль. Следовательно, вариация функционала действия оказывается равной нулю тогда, когда равняется нулю выражение:

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right) \delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (1.1.7)$$

Данное соотношение представляет общее уравнение динамики.

Если на механическую систему не накладываются связи, то вектор виртуальных перемещений $\delta \mathbf{q}$ является произвольным. Пусть

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q} \right) = \mathbf{a}.$$

Тогда из равенства $\mathbf{a} \delta \mathbf{q} = a_i \delta q^i = 0$ следует, что либо $\mathbf{a} = 0$, либо вектор \mathbf{a} ортогонален вектору $\delta \mathbf{q}$ и может быть представлен векторным произведением в многомерном пространстве: $\mathbf{a} = [\delta \mathbf{q} \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n]$, где $\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n$ - произвольные векторы, $\mathbf{c}_s = (c_{s1}, \dots, c_{sn})$, $s = 2, \dots, n$. Компоненты a_i вектора \mathbf{a} вычисляются как определители, первая строка которых состоит из соответственных единичных векторов. Но тогда правой частью равенства

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) = [\delta \mathbf{q} \mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_n]$$

можно пренебречь и представить его в упрощенном виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

Если движение механической системы ограничено набором связей (1.1.2), то они накладывают ограничения на виртуальные перемещения системы, определяемые равенствами

$$\frac{\partial h_k}{\partial q^i} \delta q^i = 0, \quad (1.1.8)$$

Исходя из принципа освобожденности от связей, действия связей могут быть заменены соответствующими силами реакции связей, составляющими вектор \mathbf{R} . Если связи являются идеальными, то элементарная работа сил реакций связей оказывается равной нулю:

$$(\mathbf{R}, \delta \mathbf{q}) = 0 \quad (1.1.9)$$

и общее уравнение динамики может быть записано с учетом реакций связей:

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \mathbf{Q} + \mathbf{R} \right) \delta \mathbf{q} = 0.$$

Перепишем последнее равенство в скалярном виде:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} - Q_i + R_i \right) \delta q_i = 0 \quad (1.1.10)$$

Равенство (1.1.10) можно рассматривать как уравнение относительно виртуальных перемещений. Поскольку $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$ и $m < n$, то необходимо представить общее решение этой системы алгебраических уравнений. Полагая δs произвольной бесконечно малой величиной, виртуальные перемещения δq^i могут быть определены компонентами векторного произведения $\delta \mathbf{q} = \delta s [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{n-1}]$ векторов $\mathbf{n}_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ и произвольных векторов $\mathbf{s}_\rho = (s_{\rho 1}, \dots, s_{\rho n})$, $\rho = m + 1, \dots, n - 1$:

$$\delta q^i = \delta s [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{n-1}] \mathbf{e}^i, \quad (1.1.11)$$

где \mathbf{e}^i – единичный вектор. Подставив полученное выражение в равенство

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \mathbf{Q} + \mathbf{R} \right) \delta \mathbf{q} = 0,$$

получим следующее соотношение

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \mathbf{Q} + \mathbf{R} \right) [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{n-1}] \delta s \mathbf{e}^i = 0. \quad (1.1.12)$$

Вследствие идеальности связей (1.1.2) элементарная работа реакций связей равняется нулю:

$$\mathbf{R}[\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{n-1}] = 0.$$

Левая часть этого равенства представляет косое произведение и вычисляется как определитель, первые $m + 1$ строк которого состоят из компонент векторов $\mathbf{R}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$. Так как остальные строки заполнены произвольными величинами $s_{\rho i}$, то для выполнения условий идеальности связей необходимо,

чтобы первые $m + 1$ были линейно зависимы: $\mathbf{R} = \lambda^k \mathbf{n}_k$. Тогда выражение (1.1.12) записывается в виде

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \mathbf{Q} \right) [\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m, \mathbf{s}_{m+1}, \dots, \mathbf{s}_{n-1}] \delta \mathbf{s} e^i = 0,$$

из которого следует равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \mathbf{Q} = \lambda^k \mathbf{n}_k.$$

Полученное соотношение, записанное в скалярном виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} - Q_i = \lambda^k h_{ki}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1.13)$$

представляет собой систему уравнений динамики системы с голономными связями (1.1.2)

Систему (1.1.13) удобнее записать в матричном виде. Распишем для этого в явном виде все производные в уравнениях Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j - \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial q^i} &= - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i} + Q_i, \\ h_k &= 0, \\ i, j &= 1, \dots, n, \quad k, l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Компоненты симметричного тензора $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$ составляют элементы матрицы Гесса, определяющей, по сути, условие, при котором можно выразить вторые производные из уравнений Лагранжа второго рода. Поэтому введем следующее обозначение:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{nn} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix},$$

где $H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$. Всю правую часть системы (1.1.14) можно обозначить вектором обобщенных сил $\mathbf{Q}' = \langle Q'_1, \dots, Q'_n \rangle^T$, $Q'_i = - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q^i} + Q_i$.

Для решения системы (1.1.14) следует продифференцировать дважды уравнения связей и подставить выражения обобщенных ускорений через фазовые координаты системы и неопределенные множители Лагранжа. При этом вектор обобщенных сил дополнится слагаемыми, получаемыми при дифференцировании уравнений связей. Действительно, выражения вторых производных от уравнений связей получаются в следующем виде:

$$\frac{\partial h_k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1.15)$$

Перенесем все слагаемые кроме первого в правую часть и дополним вектор обобщенных сил \mathbf{Q}' вектором $\mathbf{F}_h = (F_{h,1}, \dots, F_{h,m})^T$, $F_{h,k} = -\frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 h_k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 h_k}{\partial t^2}$. Введем также матрицу, соответствующую уравнениям связей:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q^1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial q^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial q^n} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial q^n} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (1.1.14), (1.1.15) можно записать в виде:

$$\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (1.1.16)$$

где $\tilde{\mathbf{H}}$ – обобщенная матрица Гесса:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{O} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{O} – нулевая матрица ранга m , $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} \oplus \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ – вектор обобщенных координат и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – вектор произвольных множителей, $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}' \oplus \mathbf{F}_h$.

Если детерминант обобщенной матрицы Гесса отличен от нуля: $\det(\tilde{\mathbf{H}}) \neq 0$, то вектор \mathbf{a} , составленный из обобщенных ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$ и множителя $\boldsymbol{\lambda}$, может быть выражен через обобщенные координаты, скорости и время:

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (1.1.17)$$

Полученная система дифференциальных уравнений интегрируется с использованием разностных схем численного интегрирования. При наличии начальных отклонений от уравнений связей $y_k = h_k(\mathbf{q}(t_0), t_0)$: $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 + \boldsymbol{\epsilon}$, где $h_k(\mathbf{q}_0, t_0) = 0$, $\boldsymbol{\epsilon}$ – вектор начальных отклонений, с течением времени отклонения от уравнений связей $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, $y_k = h_k(\mathbf{q}(t), t)$ будут изменяться. Действительно, при дифференцировании уравнений связей подразумевалось, что они являются первыми интегралами уравнений динамики, следовательно, производные от уравнений связей будут постоянными, а величины компонент вектора \mathbf{y} будут возрастать:

$$\mathbf{y}(t_0) = h_k(\mathbf{q}_0 + \boldsymbol{\epsilon}, t_0) = \mathbf{y}_0,$$

$$\dot{\mathbf{y}} = 0,$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\mathbf{y}}_0,$$

$$\mathbf{y} = \dot{\mathbf{y}}_0 t + \mathbf{y}_0.$$

Более того, при численном интегрировании уравнений (1.1.14) эти величины отклонений от уравнений связей будут возрастать вследствие наличия погрешностей интегрировании. [35]. Следовательно, для ограничения величин компонент вектора отклонений \mathbf{y} от уравнений связей необходимо модифицировать метод определения множителей Лагранжа.

Для решения этой задачи Баумгарт предложил определять множители Лагранжа, используя линейную комбинацию отклонений от уравнений связей вместе с их производными [22],

$$\dot{y}_k + \alpha_k \dot{y}_k + \beta_k y_k = 0, \quad (1.1.18)$$

где $\alpha_k, \beta_k, k = 1, \dots, m$ константы, которые будем называть параметрами возмущения, а соотношения (1.1.18) - уравнениями возмущений связей.

Величины отклонений y_k остаются ограниченными только в том случае, если уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение. Таким образом, условия асимптотической устойчивости являются необходимыми, но не достаточными для стабилизации связей. Определение диапазона значений параметров возмущений, обеспечивающих ограничение отклонений от связей при численном решении уравнений (1.1.14), составляет основную цель задачи стабилизации связей.

Уравнения (1.1.18) возмущений связей могут быть переписаны в более общем матричном виде.

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (1.1.19)$$

Здесь \mathbf{A} и \mathbf{B} - постоянные матрицы ранга m , выбранные таким образом, чтобы тривиальное решение уравнения (1.1.19) было устойчиво асимптотически. Задача стабилизации величин отклонений от уравнений связей или просто стабилизации связей состоит в том, чтобы определить безопасный диапазон значений компонент матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} [56].

При введении стабилизации по методу Баумгарте, вектор обобщенных сил $\tilde{\mathbf{Q}}$ получает дополнительные слагаемые, которые по существу можно считать управляющими силами. Действительно, выражения (1.1.15) запишутся в виде:

$$\frac{\partial y_k}{\partial q^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i + \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + A_{kj} \dot{h}_j + B_{kj} h_j = 0.$$

В случае, когда векторы $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ являются нулевыми, инвариантное множество уравнений динамики механической системы, определяемое уравнениями связей, не изменится. Вектор \mathbf{F}_h тогда может быть определен в виде:

$$F_{h,k} = -\frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} - A_{kj} \dot{h}_j - B_{kj} h_j.$$

Уравнения возмущений связей содержат компоненты матриц A и B , которые будем называть параметрами возмущений. Выбор компонент матриц A и B , обеспечивающих асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (1.1.19), не гарантирует стабилизацию связей при численном решении уравнений динамики.

В работе [57] предложено для стабилизации связей использовать общие соотношения, определяемые равенствами:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = F_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m) \quad (1.1.20)$$

$$k = 1, \dots, m,$$

где функции F_k выбираются так, чтобы выполнялись следующие равенства: $F_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m)|_{h_k=0, \dot{h}_k=0} = 0$. Функции F_k должны быть выбраны так, чтобы тривиальное решение $y_k = 0, \dot{y}_k = 0$ системы (1.1.2) являлось асимптотически устойчивым. В частности, при $F_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m) = -\alpha_k \dot{h}_k - \beta_k h_k$ равенства (1.1.20) соответствуют методу стабилизации, предложенному Баумгарт.

В общем случае составляющие вектора обобщенных сил F_h дополняется произвольными функциями F_k :

$$F_{h,k} = -\frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_k}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_k}{\partial t^2} + F_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m). \quad (1.1.21)$$

Далее система (1.1.16) численно интегрируется. Соответствующий выбор функции стабилизации F_k позволяет ограничить процесс накопления ошибок. Подробнее о процессе стабилизации и выборе функций стабилизации будет описано в последующих главах.

1.2 Стабилизация неголономных связей

Рассмотрим случай, при котором тензор неголономности Ω_{jkl}^r не будет нулевым, то есть кинематические связи в выражении (1.1.1) будут неголономными. Таким образом, на систему наложен набор, состоящий из m_1 голономных геометрических связей и m_2 неголономных кинематических связей:

$$\begin{aligned} h_s(\mathbf{q}, t) &= 0, \\ f_k &= \alpha_{ki}(\mathbf{q}, t)\dot{q}^i + \alpha_k(\mathbf{q}, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$s = 1, \dots, m_1, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_2, \quad m_1 + m_2 = m < n.$$

Таким образом, неголономные связи, будучи неинтегрируемыми кинематическими соотношениями, задают дополнительные ограничения на виртуальные перемещения:

$$\alpha_{ki}(\mathbf{q}, t)\delta q^i = 0,$$

где δq^i – компонента вектора виртуальных перемещений.

Общие уравнения динамики голономной системы были получены из принципа Остроградского – Гамильтона. В данной задаче поступим аналогичным образом, переопределив функцию Лагранжа с учетом голономных связей h_s :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}\delta \mathbf{q}) dt,$$

где $L' = L + \lambda^s h_s$.

Для учета же неголономных связей к основному уравнению динамики [13] добавляется произвольная линейная форма по левым частям уравнений неголономных связей

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - Q_i - \lambda^s \frac{\partial h_s}{\partial q^i} - \rho^k \alpha_{ki}(\mathbf{q}, t) \right) \delta q^i = 0. \quad (1.2.2)$$

Решение общего уравнения динамики (1.2.2) может быть получено по методу, описанному в предыдущем параграфе, составив таким образом некоторую систему уравнений Лагранжа второго рода со связями.

Система уравнений (1.2.2), по сути, представляет собой линейную

форму относительно произвольных виртуальных перемещений δq^i . Аналогичным образом, если вести бесконечно малое скалярное перемещение δs , и применив кососимметричное тензорное произведение, можно прийти к следующему выражению:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - Q_i - \lambda^s \frac{\partial h_s}{\partial q^i} - \rho^k a_{ki}(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (1.2.3)$$

Совместно с уравнениями голономных и неголономных связей в (1.2.1) уравнения (1.2.3) образуют замкнутую систему дифференциально-алгебраических уравнений.

При решении задачи стабилизации неголономных связей [35] следует учитывать, помимо отклонений от голономных и неголономных связей, отклонения от производных по времени от уравнений голономных связей: $\dot{h}_s = g_s$. Тогда вектор отклонений будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{y} = (h_1, \dots, h_{m_1}, g_1, \dots, g_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}). \quad (1.2.4)$$

Уравнения возмущений связей запишем в виде произвольной линейной формы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{h}_s &= A_s^r h_r + B_s^r g_r + C_s^k f_k; \\ \dot{f}_k &= D_k^s g_s + E_k^l f_l; \\ s, r &= 1, \dots, m_1, \quad k, l = 1, \dots, m_2 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Здесь компоненты матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{E} являются константами. Хотя дальнейшие выкладки никак не меняются, если принять эти компоненты за функции обобщенных координат и скоростей. Уравнения возмущений связей будут представлены с учетом (1.2.5) в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (1.2.6)$$

Вектор обобщенных сил $\tilde{\mathbf{Q}}$ из уравнений (1.1.16) определяется аналогично случаю голономных связей с учетом всех дифференциальных связей. Введем следующие обозначения с учетом (1.2.6):

$$F_{h,s} = -\frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + A_{sr} h_r + B_{sr} g_r + C_{sk} f_k,$$

$$F_{f,k} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial a_k}{\partial q^i} \dot{q}^i + D_{ks} g_s + E_{kl} f_l.$$

Тогда вектор обобщенных сил будет являться тензорной суммой векторов: $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}' \oplus \mathbf{F}_h \oplus \mathbf{F}_f$. Введем матрицу, состоящую из компонентов линейной формы уравнений неголономных связей:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m_2 1} & \cdots & \alpha_{m_2 n} \end{pmatrix}.$$

Также переопределим матрицу \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q^1} & \cdots & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial q^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial q^n} & \cdots & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial q^n} \end{pmatrix},$$

Уравнения движений (1.2.3) с учетом уравнений возмущений связей (1.2.6) могут быть записаны в матричном виде:

$$\tilde{\mathbf{H}} \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (1.2.7)$$

где $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} \oplus \boldsymbol{\lambda} \oplus \boldsymbol{\rho}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ - обобщенная матрица Гесса:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Если ранг обобщенной матрицы Гесса отличен от нуля: $n + m_1 + m_2 \neq 0$, то существует обратная матрица $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}$. Следовательно, обобщенные ускорения можно выразить как функции обобщенных координат времени и скоростей $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}$. Далее полученная система дифференциальных уравнений численно интегрируется с применением той или иной разностной схемы.

- Модификация уравнений Лагранжа

В случае, когда уравнения неголовных связей позволяют разделить переменные на зависимые и независимые, произвольные множители $\boldsymbol{\rho}$, как было показано Чаплыгиным [10], могут быть выражены из уравнений

Лагранжа. Разделим вектор обобщенных координат на две части, из которых одна (q^{m_2+1}, \dots, q^n) полагается независимой, а вторая (q^1, \dots, q^{m_2}) может быть выражена через зависимые координаты. Тогда выбранная конфигурация обобщенных координат позволяет переписать неголономные связи (1.2.1) в виде:

$$f_k = \dot{q}^k - b_s^k(q^{m_2+1}, \dots, q^n, t)\dot{q}^{m_2+s} = 0, \quad (1.2.8)$$

$$k = 1, \dots, m_2, s = 1, \dots, n - m_2,$$

При выражении произвольных множителей ρ как функции независимых обобщенных координат и скоростей уравнения Лагранжа модифицируются следующим образом

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^{m_2+s}} - \frac{\partial L^*}{\partial q^{m_2+s}} + \sum_{k=1}^{m_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \right)^* \left[\sum_{r=1}^{n-m_2} \left(\frac{\partial b_r^k}{\partial q^{m_2+s}} - \frac{\partial b_s^k}{\partial q^{m_2+r}} \right) \dot{q}_r \right] = Q_{m_2+s}, \quad (1.2.9)$$

где звездочка * означает операцию выражения зависимых скоростей через независимые с учетом связей (1.2.8).

Если уравнения геометрических связей также являются функциями только от независимых переменных $h_i(q^{m_2+1}, \dots, q^n, t) = 0, \quad i = 1, \dots, m_1$, то задача стабилизации этих связей с учетом уравнений Чаплыгина (1.2.9) решается по аналогии с предыдущим параграфом. При этом вектор обобщенных сил дополняется слагаемыми Чаплыгина:

$$Q'_s = - \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^{m_2+s} \partial q^{m_2+r}} \dot{q}^{m_2+r} - \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^{m_2+s} \partial t} + \frac{\partial L^*}{\partial q^{m_2+s}} + Q_{m_2+s} -$$

$$\sum_{k=1}^{m_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \right)^* \left[\sum_{r=1}^{n-m_2} \left(\frac{\partial b_r^k}{\partial q^{m_2+s}} - \frac{\partial b_s^k}{\partial q^{m_2+r}} \right) \dot{q}_r \right].$$

Матрицу Якоби, соответствующую голономным связям, обозначим следующим образом:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial q^{m_2+1}} & \dots & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial q^{m_2+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial q^{m_2+n}} & \dots & \frac{\partial h_{m_1}}{\partial q^{m_2+1}} \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы Гесса \mathbf{H} также уменьшится на m_2 : $H_{sr} = \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^{m_2+s} \partial \dot{q}^{m_2+r}},$
 $s, r = 1, \dots, n - m_2.$ Уравнения движения (2.4) для системы Чаплыгина

запишутся следующим образом:

$$\tilde{H}\mathbf{a} = \tilde{Q}, \quad (1.2.10)$$

где $\tilde{Q} = Q' \oplus F_h$, $\mathbf{a} = (\ddot{q}^{m_2+1}, \dots, \ddot{q}^n) \oplus (\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$. Вектор F_h определяется с учетом уравнений возмущений связей (1.2.6).

Описанный в этой главе подход к решению задач стабилизации связей для неголономных систем может быть использован также для неголономных систем Воронца, Аппеля и Маджи [13].

В ряде случаев модифицировать уравнения движения с неголономными связями предпочтительнее методом Чаплыгина, поскольку ранг обобщенной матрицы Гесса (1.2.7) оказывается меньше чем в соотношении (1.2.10). Однако, разделить переменные на зависимые и независимые получается не всегда, тем более что вектор начальных отклонений может быть задан и для зависимых переменных.

1.3 Стабилизация связей уравнений динамики, записанных в форме уравнений Воронца

В предыдущем разделе рассматривался метод Чаплыгина по составлению модифицированных систем уравнение Лагранжа 2 рода с неголономными связями определенного вида. Если структура уравнений связей и динамических параметров позволяют разделить вектор виртуальных перемещений на зависимую и независимые части, то в правой части уравнений движения можно ввести обобщенную силу реакции, связанную с уравнениями неголономных связей. Воронец П.В. обобщил метод Чаплыгина в случае, при котором коэффициенты линейной формы уравнений кинематической связи (1.2.8) допускают зависимость и от всех обобщенных координат, описывающих динамику системы. В общем виде данное уравнение связи может иметь вид:

$$a_{\mu i}(\mathbf{q})\dot{q}^i = 0, \quad (1.3.1)$$

где $\mu = 1, \dots, t < n, i = 1, \dots, n$.

Уравнения связей (1.3.1) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$. Применяя метод Гаусса, можно выразить любые t обобщенных скоростей через линейные комбинации оставшихся $(n - t)$ скоростей. Коэффициенты получившейся линейной формы:

$$h_{\mu} = \dot{q}^{\mu} - \alpha_{\mu j}(\mathbf{q})\dot{q}^j, \quad (1.3.2)$$

$$\mu = 1, \dots, t, \quad j = t + 1, \dots, n.$$

также являются функциями, вообще говоря, всех обобщенных координат. По аналогии обобщенные координаты, соответствующие выраженным t обобщенным скоростям, назовем зависимыми, оставшиеся – независимыми.

Для вывода уравнений, полученных Воронцом, введем произвольные множители λ : $(\lambda_1 \dots \lambda_{\mu})$ Уравнения Лагранжа второго рода для функции $L =$

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ с учетом кинематических связей (1.3.2) $h_\mu = 0$, $\mu = 1, \dots, m$ имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \lambda_\sigma \frac{\partial h_\sigma}{\partial \dot{q}^i}, \quad \sigma = 1, \dots, m. \quad (1.3.3)$$

Данную систему можно разбить на две части: первая часть соответствует независимым обобщенным координатам, вторая – зависимым. Поскольку коэффициенты перед зависимыми обобщенными скоростями \dot{q}^μ в (1.3.2) равен единице, сила реакции в первой части разделенной системы (1.3.3) будет равно произвольному множителю λ_μ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = \lambda_\mu, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = -\lambda_\mu \alpha_{\mu j}. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Функция Лагранжа $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ является функцией обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m, \dot{q}^{m+1}, \dots, \dot{q}^n)$. Для удобства обозначим набор независимых скоростей: $\check{\dot{\mathbf{q}}} = (\dot{q}^{m+1}, \dots, \dot{q}^n)$ и зависимых $\check{\dot{\mathbf{q}}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$. Из уравнений связей (1.3.2) зависимые обобщенные скорости можно выразить как функции независимых $\check{\dot{\mathbf{q}}}$:

$$L^*(\mathbf{q}, \check{\dot{\mathbf{q}}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{q}^1(\check{\dot{\mathbf{q}}}), \dots, \dot{q}^m(\check{\dot{\mathbf{q}}}), \check{\dot{\mathbf{q}}}, t),$$

функция Лагранжа $L^*(\mathbf{q}, \check{\dot{\mathbf{q}}}, t)$ таким образом является функцией только независимой части вектора скоростей $\check{\dot{\mathbf{q}}}$.

Как было показано Воронцом, система уравнений (1.3.4) эквивалентно системе:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial L^*}{\partial q^j} + \alpha_{\mu j} \frac{\partial L^*}{\partial q^\mu} + \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^\mu} \right)^* \gamma_{jl}^\mu \dot{q}^l, \quad (1.3.5)$$

где $l = m + 1, \dots, n$, $\gamma_{jl}^\mu = \frac{\partial \alpha_{\mu j}}{\partial q^l} - \frac{\partial \alpha_{\mu l}}{\partial q^j} - \alpha_{\sigma j} \frac{\partial \alpha_{\mu l}}{\partial q^\sigma}$. Тензор γ_{jl}^μ схож по смыслу с тензором неголономности. Если кинематические связи (1.3.2) являются интегрируемыми, то выражение $\frac{\partial \alpha_{\mu j}}{\partial q^l} - \frac{\partial \alpha_{\mu l}}{\partial q^j}$ равно нулю.

Система уравнений (1.3.5) совместно с уравнениями связей (1.3.2) является системой дифференциально-алгебраических уравнений относительно вектора обобщенных ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$.

Задача стабилизации связей (1.3.2) рассмотрена в работе [58]. В уравнении возмущений связей F_μ , $\mu = 1, \dots, m$ зависимую часть вектора обобщенных скоростей также можно выразить через независимую:

$$\dot{h}_\mu = F_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m). \quad (1.3.6)$$

Функция возмущений $F_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m)$ также должна быть выбрана так, чтобы $F_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m)|_{h=0} = 0$, и тривиальное решение являлось асимптотически устойчивым по Ляпунову. Неголономные связи (1.3.2) являются кинематическими, поэтому для решения задачи стабилизации достаточно взять только первую производную по времени:

$$\ddot{q}^\mu - \alpha_{\mu j}(\mathbf{q})\ddot{q}^j = F_\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t, h_1, \dots, h_m) + \frac{d\alpha_{\mu j}}{dt}\dot{q}^j. \quad (1.3.7)$$

Для решения системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.3.5) и (1.3.7) выразим вторые производные по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^l} \ddot{q}^l = \frac{\partial L^*}{\partial q^j} + \alpha_{\mu j} \frac{\partial L^*}{\partial q^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} \right)^* \gamma_{jl}^\mu \dot{q}^l - \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^j \partial t} - \left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^l} + \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^j \partial q^\mu} \alpha_{\mu l} \right) \dot{q}^l.$$

Введем по аналогии с предыдущими главами матрицу Гесса $H_{jl} = \frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^l}$ и обобщенные силы Q_j . Система (1.3.5) может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}.$$

Матрица Гесса \mathbf{H} имеет размерность $(n - m) \times (n - m)$, что соответствует количеству независимых обобщенных координат. Если $\det(\mathbf{H}) \neq 0$, то вектор обобщенных ускорений может быть выражен с помощью обратной матрицы Гесса:

$$\ddot{\tilde{q}} = H^{-1}Q. \quad (1.3.8)$$

Кинематические соотношения для зависимых координат \bar{q} определяются из уравнений возмущений связей (1.3.7).

$$\ddot{\bar{q}} - \alpha \ddot{\tilde{q}} = \bar{F}, \quad (1.3.9)$$

где $\bar{F}_\mu = F_\mu + \frac{d\alpha_{\mu j}}{dt} \dot{q}^j$.

Второе слагаемое в выражении (1.3.9) с учетом уравнений (1.3.8) может быть записано с помощью матрицы Гесса:

$$\ddot{\bar{q}} = \alpha H^{-1}Q - \bar{F}.$$

Данное соотношение определяет обобщенное ускорение зависимых координат.

1.4. Примеры

• Неголономное движение саней

В качестве примера динамики неголономной системы можно рассмотреть движение саней Чаплыгина на наклонной плоскости. Функция Лагранжа системы записывается следующим образом:

$$L = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a\dot{\varphi}(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi)] + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + mg \sin \alpha, \quad (1.4.1)$$

где x, y, φ - обобщенные координаты, определяющие положение саней, J и m - момент инерции и масса, α - угол наклона плоскости, a - расстояние от центра масс до точки касания переднего колеса. Переднее колесо представляет идеальное лезвие и не может перемещаться в направлении, перпендикулярном его плоскости вращения, что соответствует неголономной связи, описываемой уравнением:

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0.$$

Полагая

$$f = \dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi, \quad (1.4.2)$$

составим уравнение возмущений связи

$$\dot{f} = kf, \quad k - const, \quad k > 0,$$

которое приводит к следующему соотношению:

$$\ddot{y} \cos \varphi - \ddot{x} \sin \varphi = \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi). \quad (1.4.3)$$

Лагранжиану (1.4.1) соответствуют следующие уравнения динамики с произвольными множителями:

$$\begin{cases} m\ddot{x} - ma\ddot{\varphi} \sin \varphi - ma\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = mg \sin \alpha - \lambda \sin \varphi, \\ m\ddot{y} + ma\ddot{\varphi} \cos \varphi - ma\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \lambda \cos \varphi, \\ J\ddot{\varphi} + ma(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Представление системы (1.4.4) в виде, разрешенном относительно обобщенных ускорений $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}$, и подстановка соответствующие им выражений в уравнение (1.4.3) позволяет определить выражение множителя λ через обобщенные координаты и скорости системы. Уравнения динамики замкнутой системы (1.4.4) записываются в следующем виде

$$\begin{cases} \ddot{x} - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi) = \\ \quad = g \sin \alpha \cos^2 \varphi, \\ \ddot{y} - a\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) + \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi) = \\ \quad = g \sin \alpha \cos \varphi \sin \varphi, \\ J\ddot{\varphi} + ma[\dot{y}(k \cos \varphi + \dot{\varphi} \sin \varphi) - \dot{x}(k \sin \varphi - \dot{\varphi} \cos \varphi)] = 0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

Различные значения параметра стабилизации k определяют допустимый уровень отклонений от уравнения неголономной связи. Для сравнения результатов решим ту же задачу применив подход Чаплыгина. Уравнения (1.2.9) для функции Лагранжа (1.4.1) и уравнения неголономной связи $\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0$ запишутся в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x}\dot{\varphi}tg\varphi - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = g \sin \alpha \cos^2 \varphi, \\ J\ddot{\varphi} + \frac{ma\dot{\varphi}\dot{x}}{\cos \varphi} = 0, \\ \dot{y} = tg\varphi\dot{x}. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Численный эксперимент проведен [35] при значениях постоянных $\alpha = 30^\circ$, $m = 1kg$, $J = 1kg \cdot m^2$, $a = 1m$ $g = 9.8m/s^2$, и начальных условиях, выбранных следующим образом:

$$t_0 = 0, x_0 = 0, y_0 = 1, \varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 1. \quad (1.4.7)$$

Результаты численного интегрирования системы уравнений (1.4.5) методом Эйлера с фиксированным значением параметра возмущения k и уравнений (1.4.6) при начальных условиях (1.4.7) представлены на рис. 1 - 3.

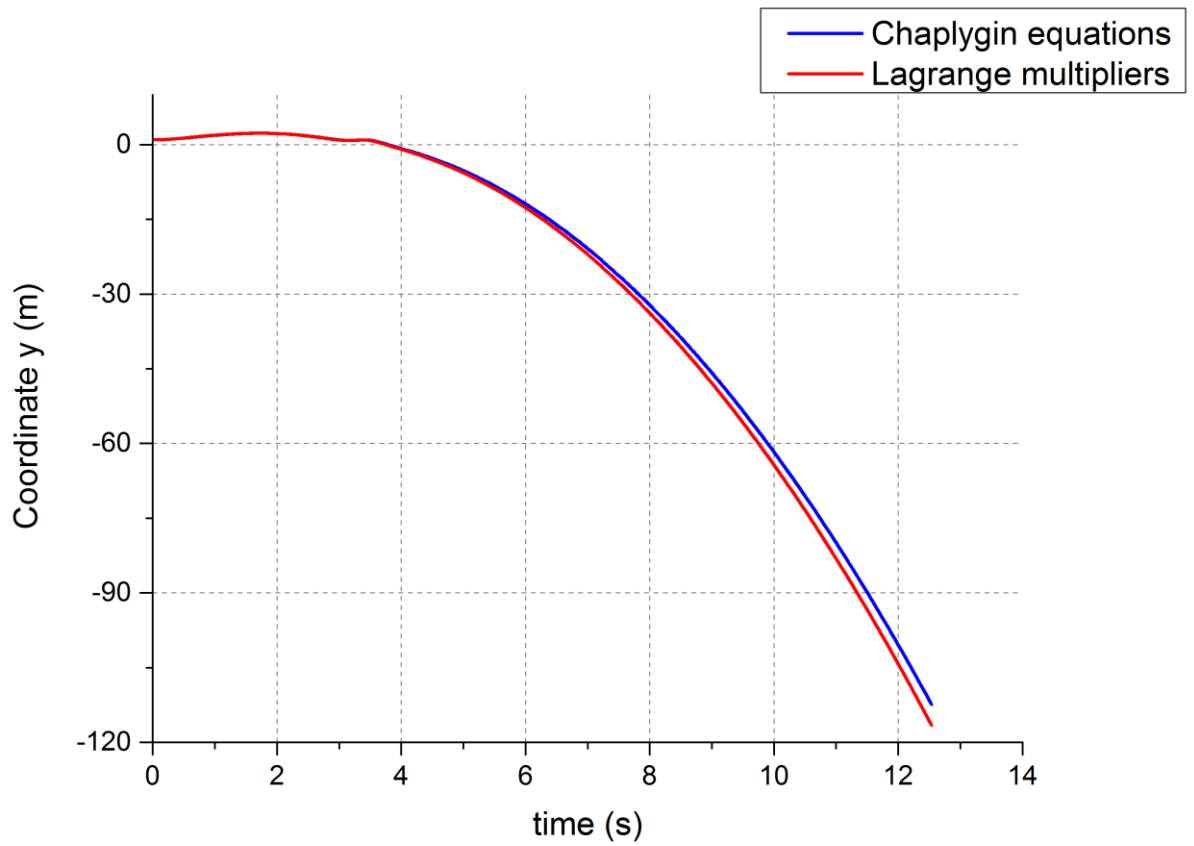


Рис. 1 Зависимость координат $y(t)$ во времени

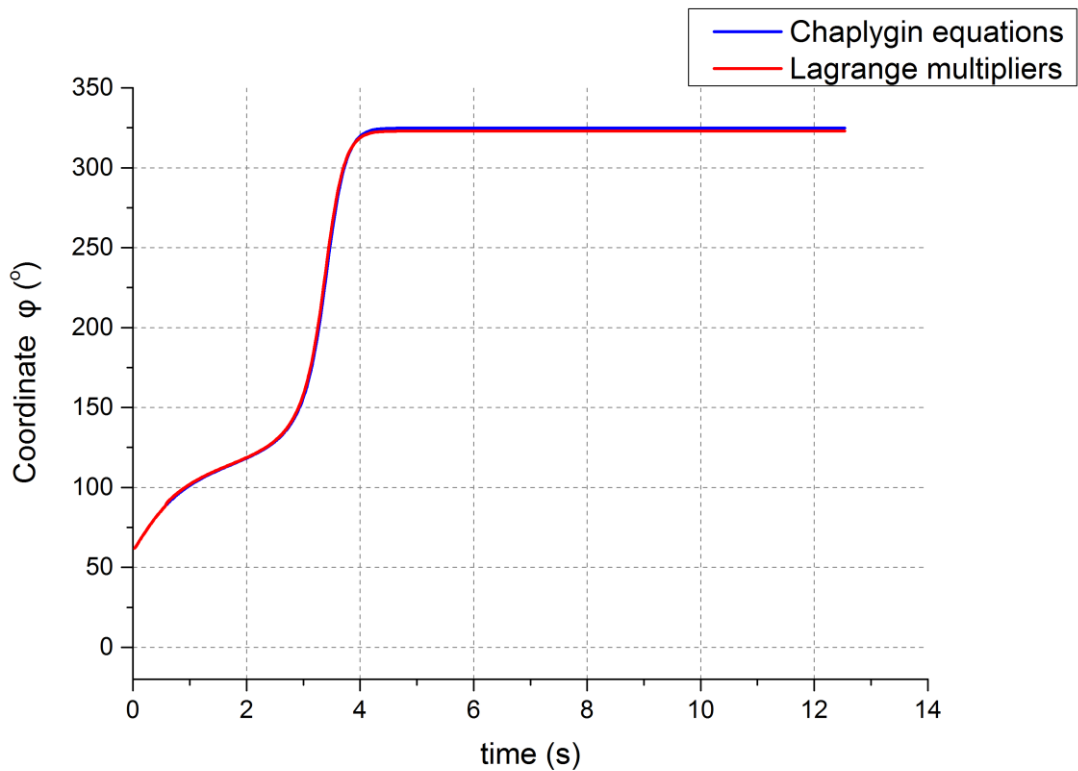


Рис.2. Зависимость координаты $\phi(t)$ во времени

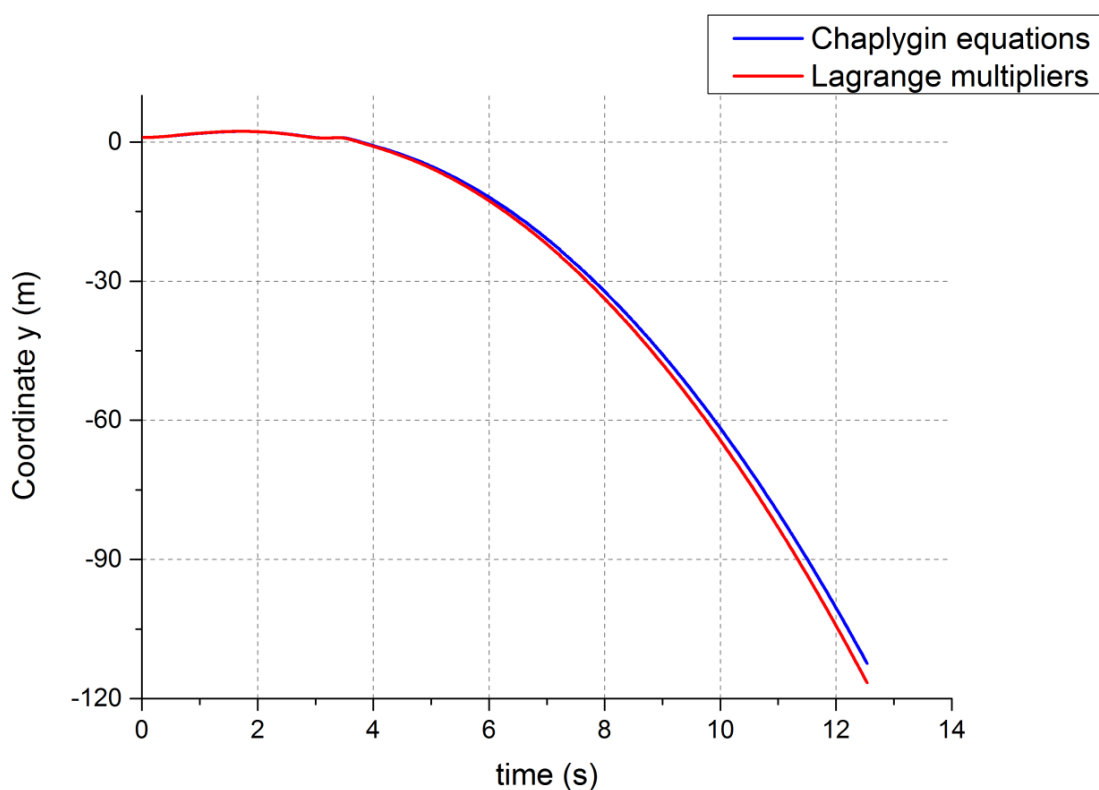


Рис.3. Зависимость координаты $y(t)$ во времени

По графику зависимости угла от времени видно, что линии графика асимптотически стремятся к некоторому постоянному устойчивому значению. Анализируя траекторию, можно прийти к выводу о том, что саням на разворот требуется некоторое время, по истечении которого сани примут стабильную ориентации и в дальнейшем будут скатываться исключительно поступательно. Зависимость отклонения $\Delta\varphi = \varphi_{lagr}(t') - \varphi_{chapl}(t')$, где t' некоторое время, через которое сани начинают двигаться поступательно (в данном случае рассматривается $t' \approx 6c$), представлена на графике:

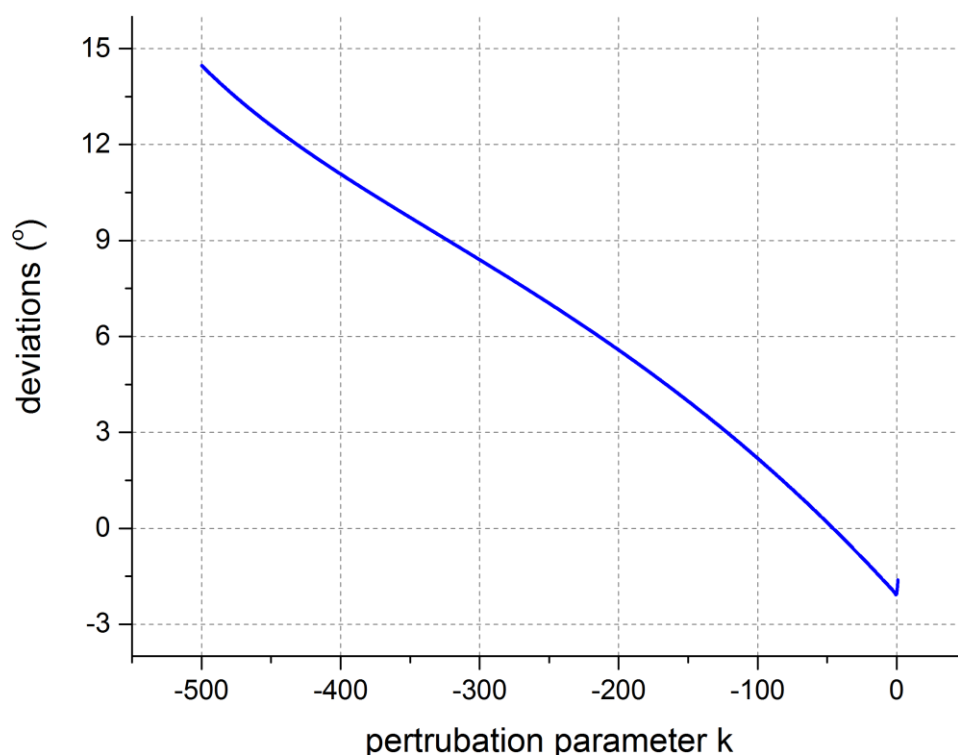


Рис.4. Зависимость величины отклонения от параметра возмущений

Численное решение уравнений (1.4.5) оказывается неустойчивым по отношению к уравнению связи при $k \geq 2$ и $k \leq -1300$, а минимального отклонения можно добиться, положив $k \approx -46$. Таким образом, при оптимальном подборе параметра возмущения k можно добиться устойчивого решения.

- **Скатывание двухколесной тележке по заданной траектории**

Рассматривается задача о скатывании двухколесной тележке по синусоидальной траектории на наклонной плоскости. Тележка представляет собой кузов и два идеально заострённых колеса. Пусть x, y – координаты точки пересечения центральной оси симметрии с осью, на которую посажены колеса, θ – угол между осью симметрии и осью Ox , направленной вдоль траектории, φ_1, φ_2 – углы поворотов правого и левого колеса соответственно,

a – радиус колеса и b – длина поперечной полуоси. Условие отсутствия проскальзывания накладывает на систему неголономные связи:

$$\begin{aligned} \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + b\dot{\theta} + a\dot{\varphi}_1 &= 0; \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - b\dot{\theta} + a\dot{\varphi}_2 &= 0 \\ \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Функция Лагранжа для двухколесной тележки определяется выражением:

$$L = \frac{1}{2} [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2m_0 l \dot{\theta} (\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta) + J\dot{\theta}^2 + C(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)] + mgx\sin\alpha, \quad (1.4.9)$$

где $m = m_0 + 2m_w$, m_0 – масса кузова, m_w – масса колеса, l – расстояние от точки (x, y) до центра масс тележки, C – осевой момент инерции, $J = m_0 k_0^2 + 2m_w b^2 + 2A$ – момент инерции тележки относительно вертикальной оси, k_0 – радиус инерции колеса относительно той же оси, A – момент инерции колеса относительно диаметра, g – ускорение свободного падения, α – угол наклона плоскости.

Структура уравнений связей и функции Лагранжа позволяют разделить переменные на зависимые - $\varphi_1, \varphi_2, \theta$ и независимые - x, y . Таким образом, данную задачу можно решить, построив уравнения Чаплыгина:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x}\dot{\theta}tg\theta - \frac{m_0}{\tilde{m}} l\dot{\theta}^2 \cos\theta &= \frac{m}{\tilde{m}} g\sin\alpha \cos^2 \theta; \\ \tilde{J}\ddot{\theta} + \frac{m_0\dot{x}\dot{\theta}}{\cos\theta} &= 0; \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

$$\text{где } \tilde{m} = m + \frac{2C}{a^2}, \tilde{J} = J + 2C \frac{b^2}{a^2}.$$

Ставится задача определения управляющих сил, обеспечивающих движение тележки с объездом флажков, установленных на некотором заданном расстоянии. Движение подобного рода, по сути, представляет собой движение слаломиста (рис. 5) с траекторией вида синусоиды:

$$y = (h + \delta)\sin kx, \quad (1.4.11)$$

где h - расстояние от центральной оси симметрии синусоиды до флажка, $k = \pi/2d$, $4d$ - расстояние между флажками на одной стороне, δ - минимальное расстояние между санями и флажком при обходе.

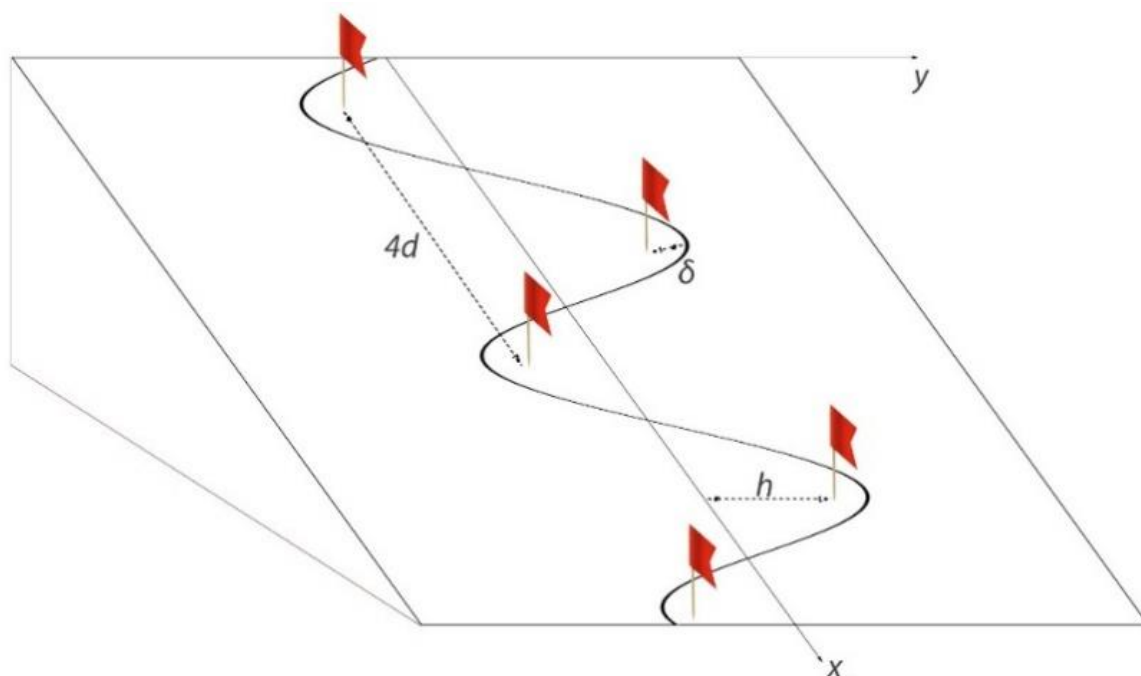


Рис.5. Траектория спуска

Уравнение связи (1.4.11) содержит зависимую координату y . Для того, чтобы привести его к виду, не содержащему y , необходимо при дифференцировании учесть уравнение неголономной связи (1.4.8). Тогда уравнение связи (1.4.11) может быть записано в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\theta = k(h + \delta)\cos kx. \quad (1.4.12)$$

Пусть $f = \operatorname{tg}\theta - k(h + \delta)\cos kx$. Составим уравнение возмущений связи в простейшем виде:

$$\ddot{f} = k_1\dot{f} + k_2f, \quad k_1, k_2 \in R. \quad (1.4.13)$$

Пусть $k = 1 \text{ м}^{-1}$, $h = 0.8 \text{ м}$, $\delta = 0.2 \text{ м}$. Начальные данные

$$x(0) = y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\theta}(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0,$$

$$\theta(0) = \frac{\pi}{4}$$

согласуются с уравнениями связей (1.4.8), (1.4.11) и (1.4.12).

Если угол наклона плоскости $\alpha = \pi/6$, масса и момент инерции саней соответственно равны $m = 1\text{ кг}$, $J = 1\text{ кг}\cdot\text{м}^2$, то численное интегрирование [59] системы (1.4.10), реализуемое разностной схемой Эйлера, с учетом стабилизации (1.4.13) для связи (1.4.12) и начальными данными приводит к результату, графическое изображение которого приведено на рис. 6.

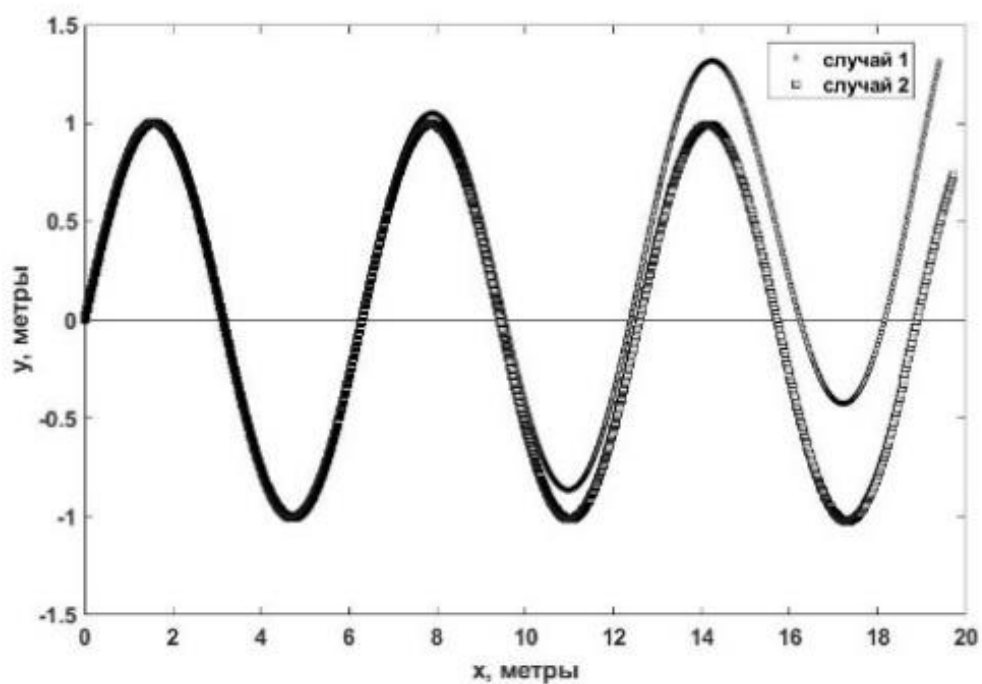


Рис.6. Траектория спуска (результат интегрирования)

Случай 1 соответствует нулевым значениям параметров возмущения связи (1.4.13). То есть отсутствие стабилизации. В случае 2 значения параметры возмущений связи подобраны так, чтобы численное решение было устойчиво обеспечивало стабилизацию связи. Подробнее о выборе значений параметров возмущения будет описано в следующей главе.

График зависимости максимальной величины отклонения от значения параметра k_1 при фиксированном k_2 представлен на рисунке 7.

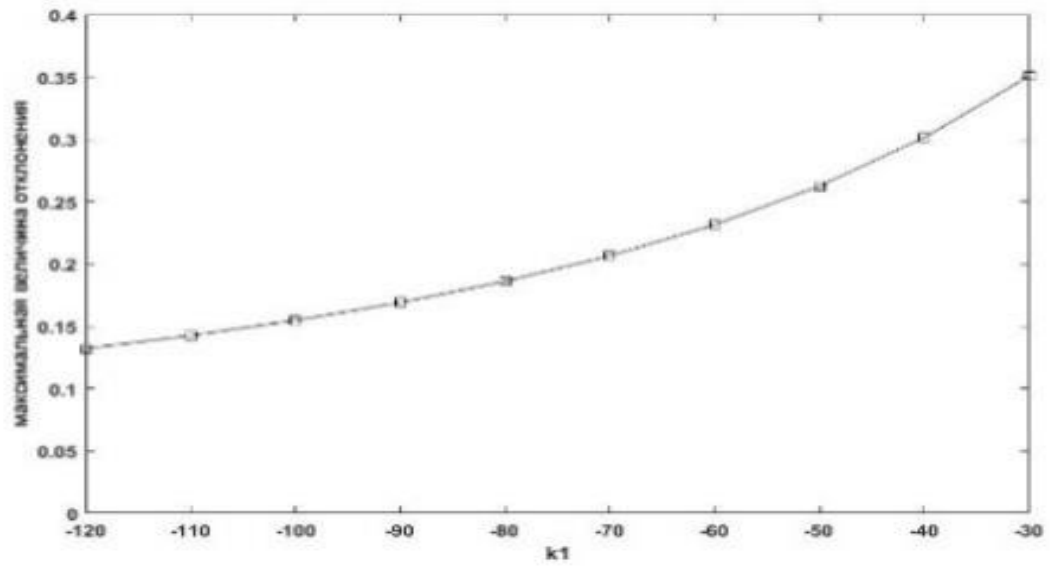


Рис.7 Зависимость величины отклонения от параметра возмущений

2. Определение ограничений, накладываемых на коэффициенты линейной системы уравнений возмущений связей

2.1 Оценка параметров возмущения

В предыдущей главе ставился вопрос о решении систем дифференциально-алгебраических уравнений движения динамической системы с учетом дополнительных воздействий, представляющих собой правые части уравнений возмущённых связей. В данной главе будет продемонстрировано, что управление величинами данных воздействий позволяет обеспечить устойчивое численное решение относительно уравнений связей. То есть введение стабилизационных членов позволяет ограничить отклонения от уравнений связей на каждом шаге разностной схемы численного интегрирования.

Рассмотрим методы численного решения системы уравнений:

$$\tilde{H}\mathbf{a} = \tilde{Q}, \quad (2.1.1)$$

где $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} \oplus \lambda \oplus \boldsymbol{\rho}$, \tilde{H} - обобщенная матрица Гесса:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} & \boldsymbol{\alpha}^T \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \mathbf{Q}' \oplus \mathbf{F}_h \oplus \mathbf{F}_f,$$

$$F_{h,s} = -\frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + A_{sr} h_r + B_{sr} g_r + C_{sk} f_k,$$

$$F_{f,k} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial a_k}{\partial q^i} \dot{q}^i + D_{ks} g_s + E_{kl} f_l.$$

Вектор отклонений:

$$\mathbf{y} = (h_1, \dots, h_{m_1}, g_1, \dots, g_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}).$$

от уравнений связей:

$$\begin{aligned}
h_s(\mathbf{q}, t) &= 0, \\
f_k &= \alpha_{ki}(\mathbf{q}, t)\dot{q}^i + \alpha_k(\mathbf{q}, t) = 0, \\
g_s(\mathbf{q}, t) &= \dot{h}_s(\mathbf{q}, t) \\
s &= 1, \dots, m_1, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m_2, \quad m_1 + m_2 = m < n.
\end{aligned}$$

- Разностная схема Эйлера I порядка

При численном интегрировании предполагается представление дифференциалов функции и независимого аргумента конечными приращениями $dq(t) \approx \Delta q(t)$, $dt \approx \Delta t$. Таким образом, рассматриваемые функции становятся функциями дискретного аргумента.

При рассмотрении функционала действия (1.1.3) предполагалось, что возможная экстремаль принадлежит множеству непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[t_1, t_2]$. В простейших разностных схемах данный отрезок можно разбить точками $t_1 = t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_2 = t_{(N)}$ на n' равных отрезков длины $\tau = t_{(\alpha+1)} - t_{(\alpha)}$, соответствующих шагу интегрирования. Конечное приращение вектора $\mathbf{x}(t)$ может быть представлено в виде разности: $\Delta \mathbf{x}(t_{(\alpha)}) = \mathbf{x}(t_{(\alpha+1)}) - \mathbf{x}(t_{(\alpha)})$, $\alpha = 1, \dots, N - 1$. Тогда системе дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ соответствует система уравнений в конечных разностях:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta v(t_{(\alpha)})}{\Delta t} &= \mathbf{a}_{(\alpha)}, \\
\frac{\Delta q(t_{(\alpha)})}{\Delta t} &= \mathbf{v}_{(\alpha)},
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}$.

Применив формулу приращения функции $\Delta \mathbf{x}(t_{(\alpha)}) = \mathbf{x}(t_{(\alpha+1)}) - \mathbf{x}(t_{(\alpha)})$, можно рекуррентно задать значение функции состояния в узлах:

$$\mathbf{x}(t_{(\alpha+1)}) = \mathbf{x}(t_{(\alpha)}) + \mathbf{X}(t_{(\alpha)})\tau, \tag{2.1.3}$$

где $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} v_{(\alpha)} \\ a_{(\alpha)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(t_{(\alpha)}) = \begin{pmatrix} q(t_{(\alpha)}) \\ v(t_{(\alpha)}) \end{pmatrix}$ – вектор состояния.

Начальные условия $\mathbf{x}(t_{(1)}) = \mathbf{x}_0$ совместно с разностной схемой (2.1.3) реализуют численное интегрирование уравнения (1.2.7).

С учетом данной разностной схемы определим условия, при которых величины отклонений при каждом шаге интегрирования не возрастают. То есть, если вектор $\mathbf{y}(t_{(\alpha)}) = (y_1(t_{(\alpha)}), \dots, y_m(t_{(\alpha)}))$ определяет величины отклонений от уравнений связей (1.2.1) на шаге интегрирования с номером α , то условие невозрастания величин $\mathbf{y}(t_{(\alpha)})$ записывается следующим образом:

$$|y_k(t_{(\alpha+1)})| \leq |y_k(t_{(\alpha)})|, \forall \alpha = 1, \dots, N, k = 1, \dots, m. \quad (2.1.4)$$

Представим значение величины отклонения на $(\alpha + 1)$ – ом шаге через значения вектора состояния на α – ом шаге, применяя схему (2.1.3):

$$y_k(t_{(\alpha+1)}) = y_k(t_{(\alpha)} + \tau).$$

Разложим правую часть равенства в ряд по степеням τ до второго порядка, записав остаточный член в форме Лагранжа:

$$y_k(t_{(\alpha+1)}) = y_k(t_{(\alpha)} + \tau) \Big|_{\tau=0} + \frac{dy_k(t_{(\alpha)} + \tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \tau + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 y_k(t_{(\alpha)} + \tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=\xi \in [t_{(\alpha)}, t_{(\alpha+1)}]} \quad (2.1.5)$$

Обозначим остаточный член $\frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 y_k(t_{(\alpha)} + \tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=\xi \in [t_{(\alpha)}, t_{(\alpha+1)}]} = R_k(\xi)$. По свойствам дифференцирования сложной функции производную по τ можно заменить производной по времени и только потом считать ее значение в узле α :

$$\frac{dy_k(t_{(\alpha)} + \tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{dy_k(t_{(\alpha)})}{dt}$$

Применив уравнение возмущений связей $\frac{dy_k(t_{(\alpha)})}{dt} = F_k(y_k(t_{(\alpha)}), \mathbf{v}(t_{(\alpha)}), \mathbf{q}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)})$, соотношение (2.1.5) запишется в виде:

$$y_k(t_{(\alpha+1)}) = y_k(t_{(\alpha)}) + F_k \tau + R_k(\xi). \quad (2.1.6)$$

Подставим полученное выражение в условие (2.1.4), применив неравенство треугольника:

$$|y_k(t_{(\alpha+1)})| = |y_k(t_{(\alpha)}) + F_k\tau + R_k(\xi)| \leq |y_k(t_{(\alpha)}) + F_k\tau| + |R_k(\xi)| \leq |y_k(t_{(\alpha)})|$$

Таким образом, по транзитивности если выполняется условие

$$|y_k(t_{(\alpha)}) + F_k\tau| + |R_k(\xi)| \leq |y_k(t_{(\alpha)})|, \quad (2.1.7)$$

то выполняется условие $|y_k(t_{(\alpha+1)})| < |y_k(t_{(\alpha)})|$.

Пусть в рассматриваемой задаче ставится цель об ограничении величин отклонений от связей в конкретных пределах. То есть, задан набор чисел $\varepsilon_k > 0$ таких, что модуль отклонений от уравнений связей не превышает соответствующего заданного значения: $|y_k(t_{(\alpha)})| \leq \varepsilon_k, \forall \alpha \in 1, \dots, N$.

Функцию возмущений связей F_k рассмотрим в виде линейной формы по y_k вида (1.2.6): $\dot{y}_k = K_{kl}y_l, k, l = 1, \dots, m$. Тогда соотношение (2.1.7) переписется в виде:

$$|y_k(t_{(\alpha)}) + \tau K_{kl}y_l(t_{(\alpha)})| + |R_k(\xi)| \leq |y_k(t_{(\alpha)})|.$$

Применим опять неравенство треугольника $|\delta_{kl} + \tau K_{kl}| |y_l(t_{(\alpha)})| + |R_k(\xi)| \leq |y_k(t_{(\alpha)})|$. С учетом заданных значений максимально возможных отклонений: ε_k условие (2.1.7) запишется в виде:

$$|\delta_{kl} + \tau K_{kl}| \varepsilon_l + |R_k(\xi)| \leq \varepsilon_k. \quad (2.1.8)$$

Таким образом, если матрица \mathbf{K} удовлетворяет данной системе неравенств, то в каждом следующем узле $\alpha + 1$ модуль значения отклонений от уравнений связей будет меньше, чем в предыдущем узле α . Данное условие можно упростить, если ввести минимальное и максимальное значения величин отклонения от уравнений связей: $\varepsilon_{max} = \max_{k=1, \dots, m} \varepsilon_k, \varepsilon_{min} =$

$\min_{k=1, \dots, m} \varepsilon_k$. Поскольку,

$$|\delta_{kl} + \tau K_{kl}| \varepsilon_l + |R_k(\xi)| \leq |\delta_{kl} + \tau K_{kl}| \varepsilon_{max} + |R_k(\xi)| \leq \varepsilon_{min} \leq \varepsilon_k,$$

то величина максимального отклонения при численном интегрировании увеличиваться не будет.

Таким образом, для выполнения условия (2.1.8) достаточно выполнения следующего равенства:

$$|\delta_{kl} + \tau K_{kl}| \varepsilon_{max} + |R_k(\xi)| \leq \varepsilon_{min}, \forall k, l = 1, \dots, m. \quad (2.1.9)$$

Данное условие представляет собой упрощенную версию неравенства (2.1.8) ввиду того, что система линейных неравенств в (2.1.8) превратилась систему независимых строк в неравенстве (2.1.9).

Условия (2.1.9) можно выразить относительно компонент матрицы \mathbf{K} . Для этого перенесем остаточный член в форме Лагранжа из левой части в правую и поделим обе части уравнения на ε_{max} :

$$|\delta_{kl} + \tau K_{kl}| \leq \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\varepsilon_{max}}.$$

Таким образом,

$$-\frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\varepsilon_{max}} \leq \delta_{kl} + \tau K_{kl} \leq \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\varepsilon_{max}},$$

или

$$-\frac{\delta_{kl}}{\tau} - \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\tau \varepsilon_{max}} \leq K_{kl} \leq \frac{\varepsilon_{min} - |R_k(\xi)|}{\tau \varepsilon_{max}} - \frac{\delta_{kl}}{\tau} \quad (2.1.10)$$

Решение данного двойного неравенства представляет собой безопасный диапазон значений компонент матрицы \mathbf{K} в уравнениях возмущений связей, при котором решается задача стабилизации, если тривиальное решение уравнений возмущений связей является асимптотически устойчивым.

- Метод Рунге – Кутты II порядка

В общем случае метод Рунге – Кутты II порядка предоставляет более точное численное решение, чем метод Эйлера. Поправки в разностной схеме

позволяют провести более качественную аппроксимацию решения относительно реальной кривой.

В данной разностной схеме также интервал интегрирования делится на конечное число узлов $t_1 = t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_N = t_{(N)}$ одинаковой длины $\tau = t_{(\alpha+1)} - t_{(\alpha)}$.

Приращение вектора состояния \mathbf{x} записывается в виде функции, зависящий от длины шага:

$$\mathbf{x}(t_{(\alpha+1)}) = \mathbf{x}(t_{(\alpha)}) + J(\mathbf{x}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)}, \tau)\tau, \quad (2.1.11)$$

где функция $J(\mathbf{x}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)}, \tau) = k_1 \mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t) + k_2 \mathbf{X}(\mathbf{x}(t) + l\tau, t + l\tau)$, $k_1 \neq 0$, $k_1 + k_2 = 1$, $l = \frac{1}{2k_1}$.

В основном коэффициент k_1 выбирают равным $1/2$, тогда схема Рунге – Кутты принимает вид схемы Хойна предиктор – корректор:

$$J(\mathbf{x}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)}, \tau) = \frac{1}{2} (\mathbf{X}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{X}(\mathbf{x}(t) + \tau \mathbf{X}, t + \tau)).$$

Схема оценки величин отклонений \mathbf{y} проводится аналогично методу Эйлера. При разложении $y_k(t_{(\alpha+1)})$ в ряд Тейлора первая производная при $\tau = 0$ запишется также в виде функции стабилизации F_k . Однако, остаточный член $R_k(\xi)$ будет отличаться от соответственного слагаемого в схеме Эйлера.

Устойчивость же тривиального решения уравнений возмущенных связей может быть записано в следующем виде:

$$\det(\mathbf{I}_m - \lambda_l \mathbf{K}) = 0, \operatorname{Re}(\lambda_l) < 0, \forall l. \quad (2.1.12)$$

Условие устойчивости тривиального решения совместно с оценками (2.1.10) как для схемы Эйлера, так и для схемы Рунге – Кутты позволяет задать диапазон значений параметров возмущений, обеспечивающих устойчивое численное решение. В следующей главе рассматривается вопрос

о возможности самоопределения параметров возмущений в случае кратных корней характеристического уравнения.

2.2 Оценка максимальной ошибки при численном интегрировании методом Эйлера первого порядка

Разностная схема Эйлера первого порядка представляет собой простейшую схему численного интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка. При интегрировании площадь под кривой ищется в виде площади совокупности прямоугольников (рис. 8). Площадь множества прямоугольников конечной длины не может полностью соответствовать площади криволинейной трапеции, и численное решение дифференциального уравнения не совпадает с аналитическим решением. Требуется определить оценку максимальной величины отклонений от уравнений связей при численном решении дифференциальных уравнений движений.

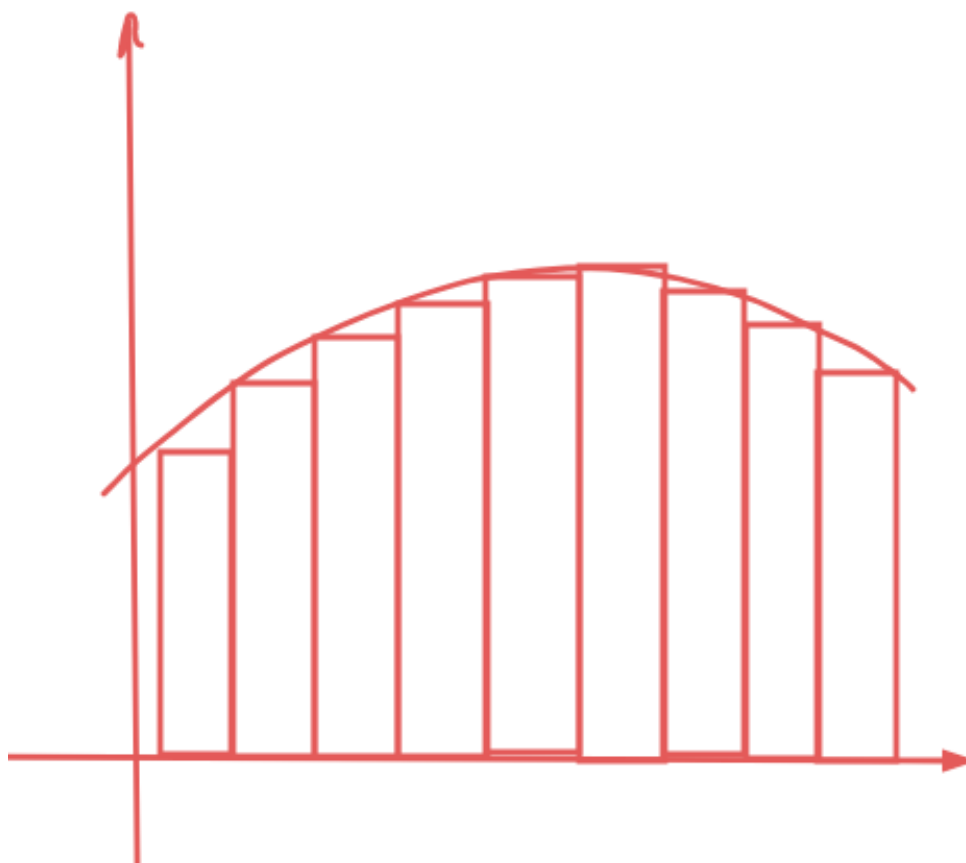


Рис. 8 Площадь под кривой.

Рассмотрим разностную схему Эйлера первого порядка при численном интегрировании уравнение (1.2.7).

$$\mathbf{x}_{(\alpha+1)} = \mathbf{x}_{(\alpha)} + \tau \mathbf{X}_{(\alpha)}, \alpha = 1, N - 1 \quad (2.2.1)$$

где $\mathbf{X}_{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{(\alpha)} \\ \mathbf{a}_{(\alpha)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(t_{(\alpha)}) = (\mathbf{q}(t_{(\alpha)}), \mathbf{v}(t_{(\alpha)}))$, τ - шаг интегрирования, $t_{(\alpha+1)} = t_{(\alpha)} + \tau$, $t_{(1)} = t_0$, $t_{(N)} = t_k$. Для оценки ошибки отклонения точное решение будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$. Оно является решением уравнения (1.2.7) без стабилизационных членов в слагаемых обобщенных сил \mathbf{F}_h , \mathbf{F}_f , то есть все компоненты матрицы в правой части равенства (1.2.6) равны нулю. Тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{f,k} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial a_{ki}}{\partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{\partial a_k}{\partial q^i} \dot{q}^i, \\ \tilde{F}_{h,s} &= -\frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{\partial^2 y_s}{\partial q^i \partial t} \dot{q}^i - \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} + A_{sr} h_r. \end{aligned}$$

Введем вектор обобщенных сил $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}' \oplus \tilde{\mathbf{F}}_h \oplus \tilde{\mathbf{F}}_f$ и уравнение, соответствующее точному решению:

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{x}}, t), \quad (2.2.2)$$

где $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(t) \\ \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \tilde{\mathbf{H}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}}$.

Рассмотрим отклонение решения, полученного в результате разностной схемы (2.2.1) и реальной кривой $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ в времени момент $t_{(\alpha)}$: $\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}) - \mathbf{x}_{(\alpha)}$.

Для этого разложим значение $\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)})$ в момент $t_{(\alpha)}$ в ряд Тейлора:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}) = \tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha-1)}) + \tau \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t_{(\alpha-1)}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\zeta), \quad (2.2.3)$$

где $\zeta: \zeta \in [t_{(\alpha-1)}, t_{(\alpha)}]$. С учетом (2.2.2) отклонение $\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}) - \mathbf{x}_{(\alpha)}$ запишется в виде:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}) - \mathbf{x}_{(\alpha)} = \tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha-1)}) - \mathbf{x}_{(\alpha-1)} + \tau (\tilde{\mathbf{X}}(t_{(\alpha-1)}) - \mathbf{X}_{(\alpha-1)}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}(\zeta). \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим $\tilde{\mathbf{X}}(t_{(\alpha-1)}) - \mathbf{X}_{(\alpha-1)}$:

$$\tilde{\mathbf{X}}(t_{(\alpha-1)}) - \mathbf{X}_{(\alpha-1)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(t_{(\alpha)}) \\ \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{(\alpha)} \\ \mathbf{a}(t_{(\alpha)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}(t_{(\alpha)}) - \mathbf{v}_{(\alpha)} \\ \tilde{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{x}}(t_{(\alpha)}), t_{(\alpha)}) - \mathbf{a}(t_{(\alpha)}) \end{pmatrix}.$$

Обобщенное ускорение, которое является второй компонентой данного вектора, содержит в себе компоненты матрицы правой части (1.2.6), то есть параметры возмущенных связей. Обозначим данные слагаемые \aleph . В общем виде разность $\tilde{X}(t_{(\alpha-1)}) - X_{(\alpha-1)}$ можно представить в виде: $\tilde{X}(\tilde{x}(t_{(\alpha-1)}), t_{(\alpha-1)}) - X(x_{(\alpha-1)} + \aleph, t_{(\alpha-1)})$. Применяв теорему о среднем, эту разность можно переписать в виде:

$$\tilde{X}(\tilde{x}(t_{(\alpha-1)}), t_{(\alpha-1)}) - X(x_{(\alpha-1)} + \aleph, t_{(\alpha-1)}) = \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)})(\tilde{x}(t_{(\alpha-1)}) - x_{(\alpha-1)} - \aleph), \quad (2.2.5)$$

где $x_{\zeta} \in [\tilde{x}(t_{(\alpha-1)}), x_{(\alpha-1)}]$ или $x_{\zeta} \in [x_{(\alpha-1)}, \tilde{x}(t_{(\alpha-1)})]$ в зависимости от того, какое значение больше. $\frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)})$ – матрица размерности $[2n \times 2n]$.

Обозначим отклонение $\tilde{x}(t_{(\alpha)}) - x_{(\alpha)} = \Delta_{(\alpha)}$, тогда соотношение (2.2.4) можно переписать в виде:

$$\Delta_{(\alpha)} = \Delta_{(\alpha-1)} + \tau \left(\frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) (\Delta_{(\alpha-1)} - \aleph) \right) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\tilde{x}}(\zeta). \quad (2.2.6)$$

Или сгруппировав слагаемые, если I_{2n} – единичная матрица $[2n \times 2n]$:

$$\Delta_{(\alpha)} = \Delta_{(\alpha-1)} \left(I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) \right) - \tau \aleph \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\tilde{x}}(\zeta). \quad (2.2.7)$$

Обозначим $\beth = \max_{t \in [t_0, t_k]} \left(\frac{\tau}{2} \ddot{\tilde{x}}(\zeta) - \aleph \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) \right)$. Тогда с учетом неравенства треугольника, соотношение (2.2.7) примет вид:

$$|\Delta_{(\alpha)}| \leq |\Delta_{(\alpha-1)}| \left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) \right| + \tau \beth. \quad (2.2.8)$$

Под нормой вектора или матрицы по компонентам понимается максимальное значение модуля ее компонент: $|\Delta_{(\alpha)}| = \max_{k=1, \dots, 2n} |\Delta_{k(\alpha)}|$. Разрешив данное рекурсивное неравенство относительно первого элемента, получим:

$$|\Delta_{(\alpha)}| \leq |\Delta_{(1)}| \left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) \right|^{\alpha-1} + \tau \beth \sum_{l=1}^{\alpha-2} \left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)}) \right|^l. \quad (2.2.9)$$

Предположим, что шаг интегрирования τ достаточно мал, чтобы $1 + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_{\zeta}, t_{(\alpha-1)})$ было положительным $\forall t \in [t_0, t_k]$ даже, если производная $\frac{\partial X}{\partial x}$

будет отрицательной. Также применим ко второму слагаемому формулу суммы конечного числа элементов геометрической прогрессии, получим:

$$|\Delta_{(\alpha)}| \leq |\Delta_{(1)}| \left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right|^{\alpha-1} + \tau \vartriangleright \frac{|I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})|^{\alpha-1} - 1}{|I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})|^{-1}}. \quad (2.2.10)$$

Или, используя снова неравенство треугольника: $|I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})| \leq |I_{2n}| + \tau \left| \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right| = 1 + \tau \left| \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right|$, выражение (2.2.10) примет вид:

$$|\Delta_{(\alpha)}| \leq |\Delta_{(1)}| \left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right|^{\alpha-1} + \vartriangleright \frac{|I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})|^{\alpha-1} - 1}{\left| \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right|}. \quad (2.2.11)$$

Так как $I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \leq \exp\left(\tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})\right)$, следовательно: $\left| I_{2n} + \tau \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)}) \right|^{\alpha-1} \leq \left| \exp\left(\tau(\alpha-1) \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_{(\alpha-1)})\right) \right|$.

Так как $t_k = t_0 + (N-1)\tau$, и $\alpha \leq N$, следовательно $\tau(\alpha-1) \leq t_k - t_0$. Тогда соотношение (2.2.11) запишется в виде:

$$|\Delta_{(\alpha)}| \leq |\Delta_{(1)}| \left| \exp\left((t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_\zeta)\right) \right| + \vartriangleright \frac{|\exp((t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_\zeta))|^{-1}}{\left| \frac{\partial X}{\partial x}(x_\zeta, t_\zeta) \right|}. \quad (2.2.12)$$

Правая часть данного соотношения не включает в себя номер узла α , поэтому можно ввести также норму по узлам: $|\Delta| = \max_{\alpha=1, \dots, N-1} |\Delta_{(\alpha)}|$. Тогда соотношение (2.2.12) позволяет задать соотношение для максимально возможной ошибки при численном интегрировании с использованием разностной схемой Эйлера:

$$||\Delta|| = |\Delta_{(1)}| \left| \exp \left((t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x} (x_\zeta, t_\zeta) \right) \right| + \mathfrak{K} \frac{|\exp((t_k - t_0) \frac{\partial X}{\partial x} (x_\zeta, t_\zeta))| - 1}{\left| \frac{\partial X}{\partial x} (x_\zeta, t_\zeta) \right|}. \quad (2.2.13)$$

Из данного соотношения следует, что максимально возможная ошибка экспоненциально зависит от длинный отрезка, на котором проходит интегрирование. Также второе слагаемое данного соотношения содержит стабилизационный член \mathfrak{K} , связанный с уравнениями возмущенных связей (1.2.6). Поэтому изменение величин параметров возмущений влияет на максимальную ошибку отклонений при численном интегрировании. Однако, ввиду произвольности вида функций $X(x, t)$ сделать вывод о непосредственном соотношении между параметрами возмущений и максимальной величиной отклонения крайне сложно. Лишь в некоторых случаях, разобранных далее, оценки параметров возмущений можно определить формулой, обеспечив при этом устойчивость численного решения.

2.3 Применение метода стабилизации связей при обходе сингулярных точек численного решения на примере задачи о качении шара

Метод стабилизации связи позволяет ограничить накопление ошибок при численном интегрировании и вернуть возмущенная решение на невозмущенную траекторию. Это может быть полезно, когда имеются некоторые отклонения от уравнений связей в начальный момент времени или в любой заданный момент. Данный подход можно применить к задачам, имеющим особенности вида сингулярности, связанных с вырождением матрицы Гесса или с обращением правых часть функций уравнение движения бесконечность при приближении к некоторой критической точки. Исследование о возможности применения метода стабилизации к задачам со обходом сингулярных точек рассмотрено в работах [39–41].

Пусть уравнение движения системы снеголавинными связями представляется в виде уравнений (1. 2.7):

$$\begin{aligned}\tilde{H}\dot{v} &= Q, \\ \dot{q} &= v,\end{aligned}\tag{2.3.1}$$

где \tilde{H} – обобщенная матрица Гесса, Q - вектор обобщенных сил, v, q - вектора обобщенных скоростей и координат соответственно.

Чтобы выразить вектор производной от обобщённых скоростей $\tilde{H}\dot{v} = Q$, необходимо умножить выражение справа на обратную матрицу Гесса \tilde{H}^{-1} , если последняя существует: $\dot{v} = \tilde{H}^{-1}(q(t), v(t), t)Q(q(t), v(t), t) = a(t)$. Далее для интегрирования данной системы уравнений применим разностную схему Эйлера I порядка (2.2.1):

$$\begin{aligned}v_{\alpha+1} &= v_{\alpha} + a_{\alpha}h, \\ q_{\alpha+1} &= q_{\alpha} + v_{\alpha}h,\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

где индекс α указывает на нахождение значения величины в узле t_{α} , h - шаг интегрирования.

При численном интегрировании системы (2.3.1) значения векторов обобщенных координат или скоростей в узлах могут обратиться в бесконечность в точке некоторой точке t_s , если в правой части имеет место вырождение матрицы Гесса или точка разрыва второго рода на интервале интегрирования $t_s \in [t_i, t_f]$ для некоторой компоненты a_k , $k = 1, \dots, n$ вектора обобщенных ускорений.

В некоторых случаях особую точку t_s можно обойти, используя разностные методы численного интегрирования. Если в алгоритм, реализующий разностную схему численного интегрирования, внедрить код, отслеживающий приближение значения независимой переменной t_β в узле β к точке t_s , при котором имеется сингулярность $\lim_{t \rightarrow t_s - 0} a_k(t) = \infty$, то можно прервать процедуру численного интегрирования и задать искусственное отклонение значения $a_k(t_\beta)$ от численного решения так, чтобы в следующем узле значение обошло сингулярное: $a_k(t_{\beta+1}) > a_k(t_s)$. Искусственно введенное отклонение можно нивелировать методом стабилизации связей. Алгоритм может выглядеть следующим образом:

$$\exists \delta > 0: \text{if } a_k(t_\beta) \in (a_k(t_s) - \delta, a_k(t_s)) \text{ then } a_k(t_{\beta+1}) = a_k(t_\beta) + \varepsilon.$$

Параметры $\varepsilon > 0$ и δ выбираются наряду с функцией возмущений связей так, чтобы численное решение наиболее плавно вернулось на свою исходную траекторию.

Например, рассмотрим задачу о качении шара по вращающейся плоскости. Функция Лагранжа для шара имеет вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2), \quad (2.3.3)$$

здесь m и J – масса и момент инерции шара соответственно, x, y – координаты центра тяжести, $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости. Условия качения

без проскальзывания накладывают на систему следующие неголономные связи:

$$\begin{aligned} f_1 &= \dot{x} - r\omega_2 + \Omega y = 0, \\ f_2 &= \dot{y} + r\omega_1 - \Omega x = 0, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где r – радиус шара, Ω – угловая скорость плоскости. В качестве угловых координат можно выбрать параметры Родриго – Гамильтона $\Lambda = \{\lambda_0, \vec{\lambda}\}$, тогда компоненты вектора угловой скорости будут связаны с выбранными параметрами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\lambda_0\dot{\lambda}_1 - 2\lambda_1\dot{\lambda}_0 + 2\lambda_3\dot{\lambda}_2 - 2\lambda_2\dot{\lambda}_3, \\ \omega_2 &= 2\lambda_0\dot{\lambda}_2 - 2\lambda_2\dot{\lambda}_0 + 2\lambda_1\dot{\lambda}_3 - 2\lambda_3\dot{\lambda}_1, \\ \omega_3 &= 2\lambda_0\dot{\lambda}_3 - 2\lambda_3\dot{\lambda}_0 + 2\lambda_2\dot{\lambda}_1 - 2\lambda_1\dot{\lambda}_2. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

От нормированного кватерниона $\Lambda = \{\lambda_0, \vec{\lambda}\}$ можно перейти к угловым переменным α, β, γ :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \\ \lambda_1 &= \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma, \\ \lambda_2 &= \cos\alpha\sin\beta, \\ \lambda_3 &= \sin\alpha. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Функция Лагранжа с учетом (2.3.5) и (2.3.6) примет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2J(\dot{\alpha}^2 + \cos^2\alpha\dot{\beta}^2 + \cos^2\alpha\cos^2\beta\dot{\gamma}^2). \quad (2.3.7)$$

Уравнение стабилизации для связей (2.3.4) выберем в виде простейшей линейной функции:

$$\begin{cases} \dot{f}_1 = k_1 f_1 + k_2 f_2, \\ \dot{f}_2 = k_3 f_1 + k_4 f_2, \end{cases} \quad (2.3.8)$$

где k_1, k_2 – параметры возмущений связей. Ввиду условия асимптотической устойчивости тривиального решения, данные параметры должны удовлетворять следующему соотношению: $\text{Re}(\text{tr}K \pm \sqrt{\text{tr}^2 K - 4\text{det}K}) < 0$.

Уравнения движения для функции Лагранжа (2.3.7) имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = u_1, \\ \ddot{y} = u_2, \\ \ddot{\alpha} = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\dot{\beta}^2 + \cos^2\beta\dot{\gamma}^2) + \frac{r}{4J}(u_2n_1 - u_1n_2), \\ \ddot{\beta} = \frac{1}{2}\sin 2\beta\dot{\gamma}^2 + 2\operatorname{tg}\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta} + \frac{r}{4J\cos^2\alpha}(u_2m_1 - u_1m_2), \\ \ddot{\gamma} = 2\operatorname{tg}\alpha\dot{\alpha}\dot{\gamma} + 2\operatorname{tg}\beta\dot{\gamma}\dot{\beta} + \frac{r}{4J\cos^2\alpha\cos^2\beta}(u_2l_1 - u_1l_2), \end{cases} \quad (2.3.9)$$

где u_1, u_2 – произвольные множители, l_i, m_i, n_i – функции угловых переменных α, β, γ .

Правая часть системы (2.3.9) имеют особенность при $\alpha = \pi n/2$ и $\beta = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. В качестве примера выбрана траектория, при которой координата α не приближается к сингулярности на всем интервале интегрирования. Рассмотрим алгоритм обхода только переменной β :

$$\text{if } \beta^{(\mu+1)} \in (\pi/2 - \delta, \delta) \text{ then } \tilde{\beta}^{(\mu+1)} = \beta^{(\mu+1)} = \beta^{(\mu)} + \varepsilon.$$

Численное интегрирования для системы (2.3.9) проводилось при следующих данных: $k_2 = -1$, $k_3 = -1$, $k_4 = -1$. Значения параметра k_1 менялись в заданных пределах. Радиус и масса шара принимались единичными. Зависимость координаты β от времени и траектория представлены на графиках:

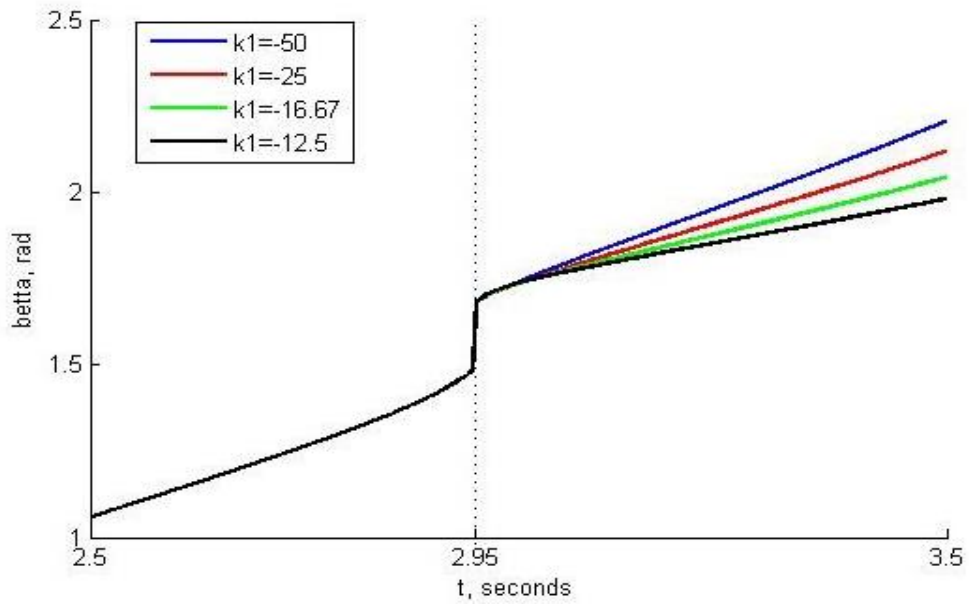


Рис. 9 - Зависимость β от времени

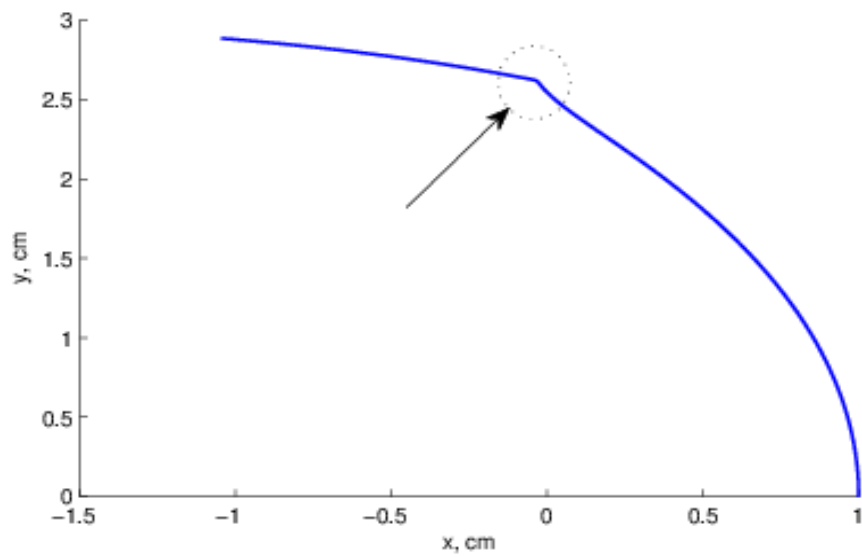


Рис. 10- Траектория центра масс

Данные графики демонстрирует возможность обхода сингулярной точки при численном интегрировании. Метод стабилизации связей помогает вернуть численное решение к невозбужденному.

3. Построение систем дифференциальных уравнений заданной структуры с учетом стабилизации связей

3.1 Построение систем уравнений с учетом стабилизации связей

Рассмотрим механическую систему, описанную набором обобщенных координат $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ и обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$. Пусть движение системы будет ограничено набором дифференциальных связей:

$$\begin{aligned} a_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}^j &= a_{i,0}(\mathbf{q}); \\ j &= 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m, \quad m < n. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

На первом этапе рассмотрим задачу построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая допускает равенства (3.1.1) в качестве частных интегралов. Для этого мы можем рассматривать уравнения (3.1.1) как систему алгебраических уравнений относительно обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$.

Поскольку число уравнений в (3.1.1) меньше, чем число независимых переменных, то его решением является некоторое подпространство в линейном пространстве обобщенных скоростей только в том случае, если система не является невырожденной. Общее решение системы (3.1.1) можем записать его следующим образом:

$$\dot{q}^j = v^j(\mathbf{q}), \quad \text{где } v^j: a_{ij}(\mathbf{q}, t)v^j = a_{i,0}(\mathbf{q}, t) \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Также стоит отметить, что, определяя функции $v^j(\mathbf{q})$ для данного примера, мы уменьшаем размерность подпространства решения от $n - m$ до 0 и полностью определяем закон движения системы.

Давайте переопределим уравнения связей (3.1.1) в соответствии с нашей введенной нотацией

$$h^j = \dot{q}^j - v^j(\mathbf{q}) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1.2)$$

Чтобы потроить дифференциальные уравнения второго порядка, мы просто должны продифференцировать уравнение (3.1.2) по времени. Тем не менее, наша цель заключается в построении системы с учетом стабилизации связей. Таким образом, мы рассмотрим нелинейную функцию стабилизации в уравнениях возмущения

$$\dot{h}^j = F^j(\mathbf{h}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1.3)$$

where $F^j(\mathbf{0}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$.

Систему уравнений можно получить путем дифференциации (3.1.3) с учетом уравнений связей (3.1.2). Таким образом, наша система может быть написана следующим образом:

$$f_a = \ddot{q}^a - \frac{\partial v^a}{\partial q^b} \dot{q}^b - F^a(\mathbf{h}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0; \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

Целью стабилизационного слагаемого в полученной системе является управление уровня накопления отклонений. С механической точки зрения это может быть достигнуто путем введения функции рассеивания Релея в систему. Следующим шагом для нас является проверка того, являются ли уравнения (3.1.4) редуцируемы к виду уравнений Лагранжа второго рода с диссипацией. Для этого мы можем использовать обобщенные условия Гельмгольца:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}^b} = \frac{\partial f_b}{\partial \dot{q}^a}; \quad (H1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}^b} + \frac{\partial f_b}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}^b} \right) = s_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); \quad (H2)$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial q^b} - \frac{\partial f_b}{\partial q^a} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}^b} - \frac{\partial f_b}{\partial \dot{q}^a} \right) = r_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); \quad (H3)$$

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^c} = 0; \quad (H4)$$

$$\frac{\partial s_{ab}}{\partial \dot{q}^c} = \frac{\partial s_{ac}}{\partial \dot{q}^b}; \quad (H5)$$

$$\frac{\partial r_{ab}}{\partial \dot{q}^c} = \frac{\partial s_{ac}}{\partial q^b} - \frac{\partial s_{bc}}{\partial q^a}; \quad (H6)$$

$$\frac{\partial r_{ac}}{\partial q^b} + \frac{\partial r_{bc}}{\partial q^a} + \frac{\partial r_{ab}}{\partial q^c} = 0; \quad (\text{H7})$$

Условия (H1) и (H4), очевидно, удовлетворены. Давайте также рассмотрим тензор s_{ab} как сумму из двух не симметричных: $s_{ab} = 1/2(d_{ab} + d_{ba})$, тогда условие (H2) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial v^a}{\partial q^b} + \frac{\partial F_a}{\partial h^b} + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}^b} + \frac{\partial F_b}{\partial h^a} + \frac{\partial v^b}{\partial q^a} + \frac{\partial F_b}{\partial \dot{q}^a} + d_{ab} + d_{ba} = 0. \quad (3.1.5)$$

Это выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных относительно функции вектора стабилизации \mathbf{F} . Теперь мы можем проанализировать его возможные решения и проверить, удовлетворяют ли они остальным обобщенным условиям Гельмгольца.

Различные решения могут быть получены путем простой группировки различных слагаемых в выражении (3.1.5).

$$1) \frac{\partial F_a}{\partial h^b} + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}^b} = -\frac{\partial v^b}{\partial q^a} - d_{ab}$$

Таким образом, чтобы найти решение уравнения (3.1.5) мы можем решить следующее уравнение:

$$F_a h^b + F_a \dot{q}^b = -v^b(\mathbf{q})q^a - d_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Решение этого уравнения может быть написано следующим образом::

$$F_a = -\frac{\partial v^b}{\partial q^a} - \gamma_a;$$

где $\gamma_a = \int d_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{q}^b$. Однако, если мы применяем условие однородности $\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ то мы получаем, что слагаемое γ должны быть равны нулю. Это означает, что тензор d_{ab} также должны быть равны нулю. Таким образом, в этом случае отсутствие функции диссипации не всегда позволит нам ограничить накопление отклонений и тем самым помешает нам решить задачу стабилизации.

$$2) \frac{\partial F_a}{\partial h^b} = -\frac{\partial v^b}{\partial q^a} - d_{ab}, \quad \frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}^b} + \frac{\partial F_b}{\partial \dot{q}^a} = 0.$$

Решение при подобной группировки может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{cases} F_a h^b = -v^b q^a - d_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); \\ F_a \dot{q}^b + F_b \dot{q}^a = 0. \end{cases}$$

Решение этого уравнения может быть написано следующим образом:

$$F_a = -\left(d_{ab} + \frac{\partial v^b}{\partial q^a}\right) h^b,$$

где тензор d_{ab} должны удовлетворять следующим ограничениям, основанным также на других условиях Гельмгольца: $d_{ab} = d_{ba}$, $d_{ac}\dot{q}^b + d_{bc}\dot{q}^a = 0$, $d_{ab}\dot{q}^c = d_{ac}\dot{q}^b$. В этом случае мы можем варьировать функцию зависимости d_{ab} от обобщенных координатах и скоростях, чтобы удовлетворить полученным условиям и решить проблему стабилизации. Например, если тензор диссипации \mathbf{d} является постоянным, то все полученные условия автоматически удовлетворяются и, изменяя соотношения этих констант, мы можем контролировать накопление ошибок.

Пример.

В качестве примера рассматривается типовая задача динамики неголономных систем. Качение произвольной тележки по плоскости с идеально тонким ведущим колесом в виде заостренного лезвия задает связь вида $\dot{y} = \operatorname{tg} \varphi \dot{x}$, где x, y – координаты ее центра масс, φ – угол между ее продольной осью симметрии и осью Ox .

Обобщенные скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}$ могут быть выражены в виде функций координат, задавая тем самым исходную неголономную связь в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_1 \cos \varphi; \\ \dot{y} = \mu_1 \sin \varphi; \\ \dot{\varphi} = \mu_2, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

где μ_1, μ_2 – произвольные функции обобщенных координат, установление которых полностью определяет вид траектории. По сути, выражения вида (3.1.6) задают множество решений, удовлетворяющих рассматриваемой связи вида $\dot{y} = \operatorname{tg} \varphi \dot{x}$.

Рассматривается простейший пример зависимости угловой координаты φ и координат x, y от времени: $\mu_1 = v$, $\mu_2 = \omega$, где $v, \omega \in \mathbb{R}$ – вещественные константа с физическим смыслом модуля вектора скорости и значения частоты соответственно. Тогда уравнения (3.1.6) определяют связи вида

$$\begin{cases} h_1 = \dot{x} - v \cos \varphi = 0; \\ h_2 = \dot{y} - v \sin \varphi = 0; \\ h_3 = \dot{\varphi} - \omega = 0. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Данные выражения определяют колебательное движение с характерными параметрами в виде амплитуды v и частоты ω . Решение обратной задачи динамики для системы связей (3.1.7) представлено в виде уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \sum_{a=1}^3 k_{1a} h_a - v \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \ddot{y} = \sum_{a=1}^3 k_{2a} h_a + v \dot{\varphi} \cos \varphi; \\ \ddot{\varphi} = \sum_{a=1}^3 k_{3a} h_a, \end{cases} \quad (3.1.8)$$

где параметры возмущения k_{ab} определяются из устойчивости тривиального решения уравнений возмущений связей.

Задача состоит в том, чтобы определить диапазон значений коэффициентов функции Рэля d_{ab} , при которых численное решение системы (3.1.8) будет устойчиво относительно уравнений связей на конечном интервале интегрирования T . Пусть характерные параметры колебания заданы как $v = \omega = 1$, а численное интегрирование системы (3.1.8) реализовано методом Эйлера с шириной шага $\Delta = 0,01$ и длиной интервала $T = 10$. Пусть начальные данные выбраны в виде

$$x(0) = 0, y(0) = -1, \varphi(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \dot{y}(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1, \quad (3.1.9)$$

который очевидно удовлетворяет уравнениям связей (3.1.7).

Результаты численного интегрирования задачи Коши (3.1.8), (3.1.9) представлены на рисунках 11 - 14.

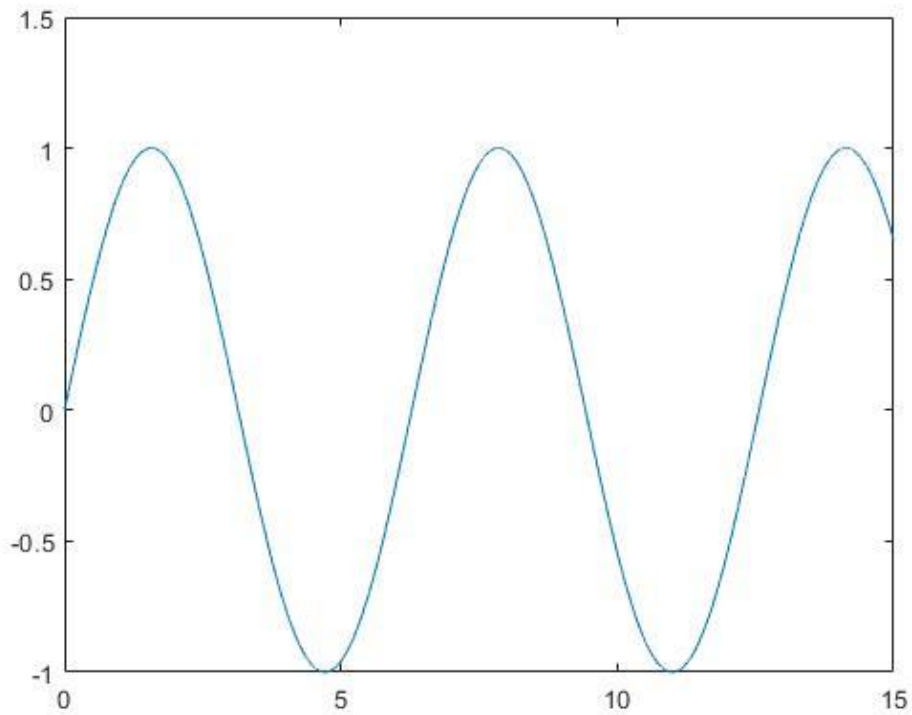


Рис. 11- Зависимость координаты $x(t)$

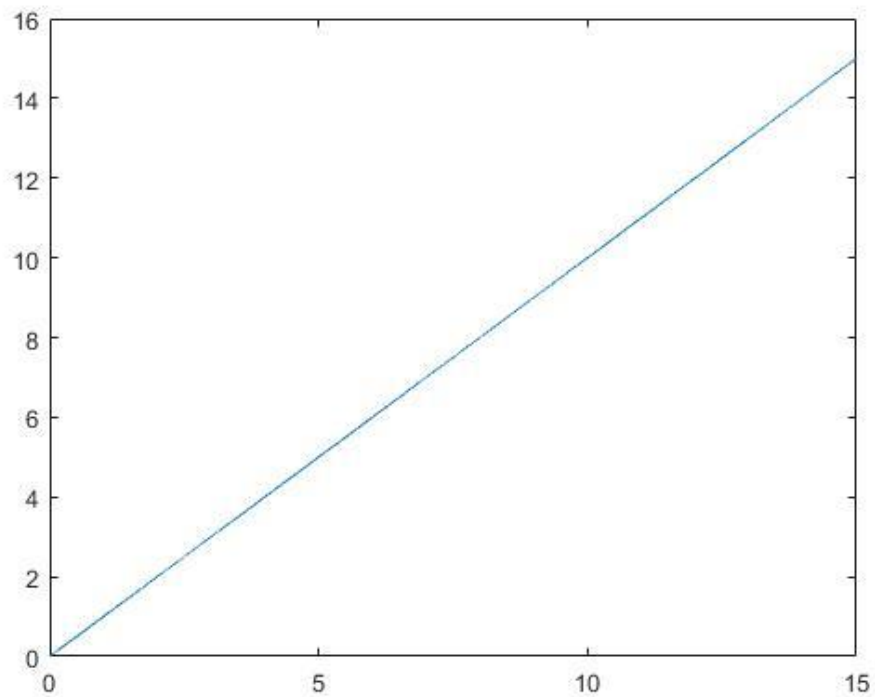


Рис. 12 Зависимость координаты $\varphi(t)$

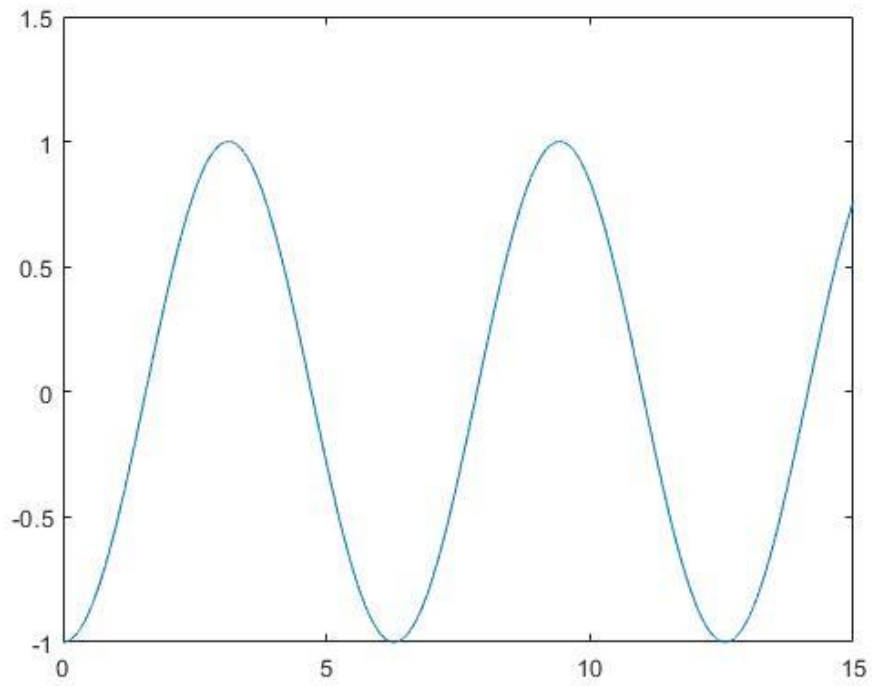


Рис. 13 Зависимость координаты $y(t)$

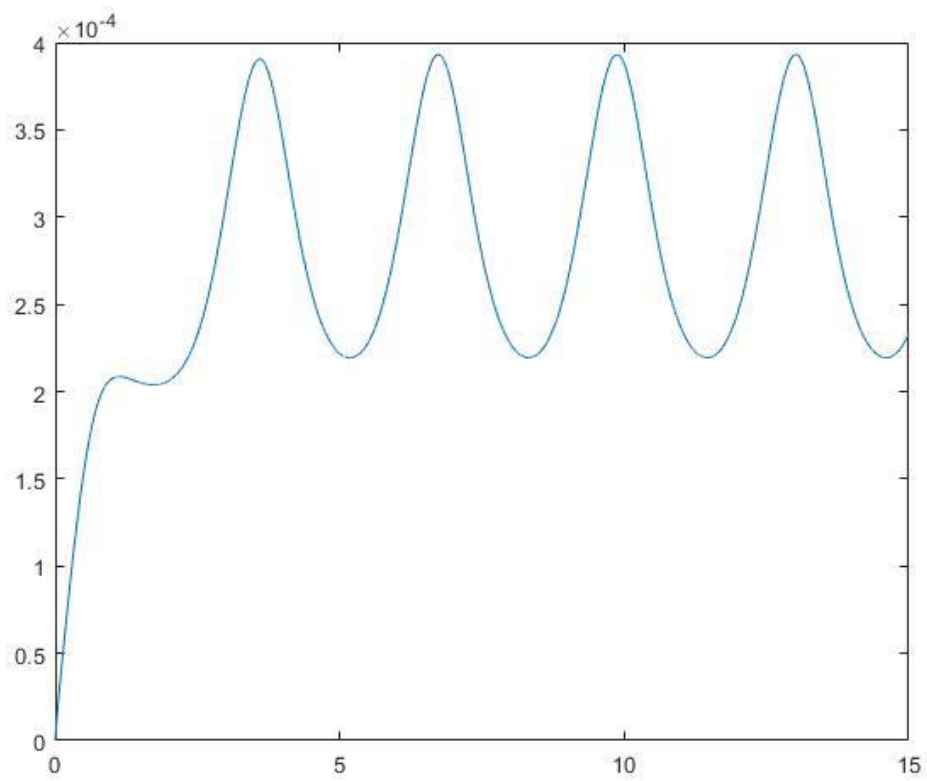


Рис. 14 Зависимость координаты $y(t)$

4. Использование метода стабилизации связей для решения прикладных задач

4.1 Моделирование динамики многозвенной системы

Для моделирования динамики многозвенной системы и решения задач управления целесообразно использовать метод стабилизации связей. Рассмотрим модель трехзвенника, который может симулировать движение экзоскелета или мобильного робота, движущегося по наклонной плоскости. Модель представляет собой систему из трех шарнирно закрепленных твердых стержней: один имитирует стопу, второй соответствует ногам и третий - для корпуса экзоскелета.

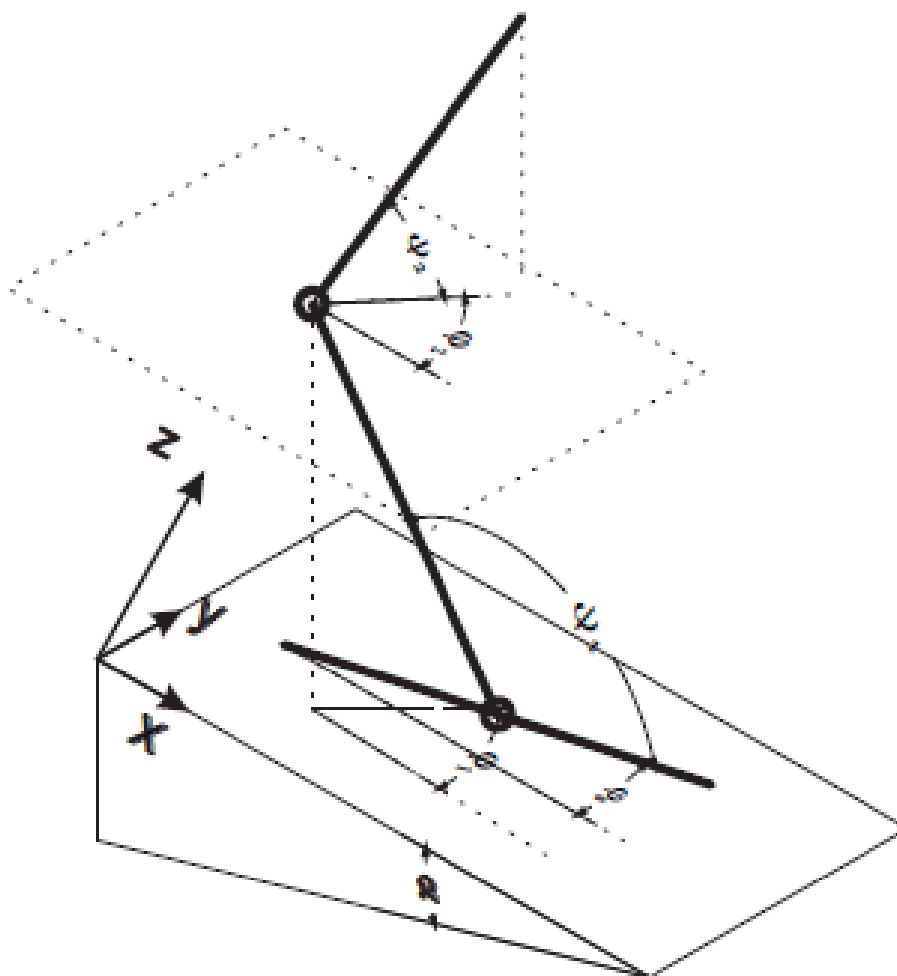


Рис. 15. Модель трехзвенного экзоскелета

Пусть диаметр каждого стержня намного меньше его длины, и вращение вокруг собственной оси стержня отсутствует. Таким образом,

положение каждого звена описывается пятью координатами $(x_i, y_i, z_i, \phi_i, \psi_i)$, $i = 0, 1, 2$. Здесь индекс 0 означает звено-стопу, индекс 1-ногу и индекс 2-тело. Координаты (x_i, y_i, z_i) , $i = 0, 1, 2$ определяют положение центра масс стержня, ψ_i представляет собой угол между стержнем и его проекцией плоскостью XY и ϕ_i - угол между проекцией стержня на плоскость XY и осью X (см. рис. 15).

Модель движется по наклонной плоскости с углом наклона α . Во время движения стопа или нулевое звено всегда должно лежать на наклонной плоскости, поэтому мы можем считать, что имеют место следующие ограничения $z_0 = 0, \psi_0 = 0$. Стержни соединены между собой шарнирами. Звено 1 закреплено на звене 0 в точке его центра масс, а звено 2 закреплено в верхней части звена 1. Таким образом, имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + l_1 n_1 \cos \psi_1 \cos \phi_1, \\ y_1 &= y_0 + l_1 n_1 \cos \psi_1 \sin \phi_1 \\ z_1 &= l_1 n_1 \sin \psi_1 \\ x_2 &= x_0 + l_1 \cos \psi_1 \cos \phi_1 + l_2 n_2 \cos \psi_2 \cos \phi_2, \\ y_2 &= y_0 + l_1 \cos \psi_1 \sin \phi_1 + l_2 n_2 \cos \psi_2 \sin \phi_2, \\ z_2 &= l_1 \sin \psi_1 + l_2 n_2 \sin \psi_2, (z_0 = 0) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

где l_i , $i = 0, 1, 2$ длины звеньев, n_i – параметры, описывающие положение центра масс каждого из звеньев. Если стержни однородны то $n_i = 1/2$, $i = 1, 2$.

После наложения ограничений (4.1.1) количество независимых переменных сократилось до 7 $x_0, y_0, \phi_0, \phi_1, \psi_1, \psi_2, \phi_2$. Таким образом, кинетическая энергии определяется следующим выражением

$$T = \frac{m_0}{2} (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{J_0}{2} \dot{\phi}_0^2 + \sum_{i=1,2} \left(\frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \right) \quad (4.1.2)$$

где m_i , $i = 1, 2$ -массы звеньев, $\boldsymbol{\omega}_i^T = (-\cos \psi_i \dot{\phi}_i, \dot{\phi}_i, \sin \psi_i \dot{\phi}_i)$ - вектор угловой скорости, $\mathbf{J}_i = \text{diag}(J_i, J_i, 0)$, J_i , $i = 0, 1$ - моменты инерции.

Система находится в однородном поле силы тяжести, поэтому потенциальная энергия определяется выражением

$$U = -g \sin \alpha (m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2),$$

где $g = 9.87 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения. Предположим, что длина траектории намного больше, чем длина любого из-за звеньев, поэтому для упрощения потенциальную энергию можно представить в виде

$$U = -g x_0 \sin \alpha (m_1 + m_2 + m_3). \quad (4.1.3)$$

Для моделирования движения нулевого звена по плоскости, предположим, что стопа - это идеальное лезвие, которое не может выполнять никаких перемещений поперек движения. Это означает, что в любой момент времени оно направлено по касательной к траектории движения центра масс и накладывает следующее ограничение, представляющее собой неголономную связь:

$$\dot{y}_0 = \tan \varphi_0 \dot{x}_0. \quad (4.1.4)$$

Существует несколько способов решения задачи осуществления этого движения. В случае, когда кинетическая энергия, потенциальная энергия и уравнение связи (4.1.4) не зависят от координаты y_0 , уравнения движения для координат x_0 и φ_0 могут быть записаны в форме уравнений Чаплыгина.

Для управления движением системы мы можем ввести дополнительный набор голономных связей, которые могут быть учтены с использованием множителей Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Число множителей Лагранжа q определяется количеством уравнений дополнительных связей. Связи могут быть выбраны следующим образом:

- Уравнение $f_1(x_0, \varphi_0) = 0$ - определяет свойства траектории на плоскости. Зависимость от координаты y_0 иногда может быть исключена в результате применения подхода Чаплыгина.

- Соотношения $f_i(x_0, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2), i = 2, \dots, q < 5$

определяют ориентацию звеньев в пространстве. Эти уравнения связей осуществляются дополнительными силами, которые сохраняют определенное положение тела во время движения. Данные силы аналогичны мышечным усилиям, поддерживающим заданное положение системы. Таким образом, число q может быть выбрано в соответствии с требуемыми свойствами движения.

Уравнения движения с учетом голономных связей и подхода Чаплыгина принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L^*}{\partial x_0} - \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_0} \right) \frac{\dot{\phi}_0}{\cos^2 \phi_0} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_0}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}_0} - \frac{\partial L^*}{\partial \phi_0} + \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_0} \right) \frac{\dot{x}_0}{\cos^2 \phi_0} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_0}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L^*}{\partial \phi_1} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_1}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial L^*}{\partial \psi_1} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \psi_1}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L^*}{\partial \phi_2} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_2}, \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial L^*}{\partial \psi_2} &= \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \psi_2},
 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

где $L = T$ -- функция Лагранжа, * - является операцией с подстановкой выражения скорости \dot{y}_0 в соответствии с уравнением связи (4.1.4). Члены с множителями Лагранжа появляются в уравнениях движения как обобщенные силы реакций связей. Они также могут быть интерпретированы как управляющая сила и управляющие моменты, которые определяют свойства движения.

Пусть трехзвенная модель представляет собой сноубордиста. Предположим, что движение сноубордиста является слаломным. В простейшем случае его траекторию можно аппроксимировать синусоидальной функцией. Таким образом, вводится ограничение

$$y_0 = A \sin kx_0.$$

Далее исключаем координату y_0 . Таким образом, ограничение, обусловленное уравнением (4.1.4), принимает форму

$$f_1 = \tan \varphi_0 - Ak \cos kx_0 = 0, \quad (4.1.6)$$

где A и k - параметры слалома.

Для определения обобщенных управляющих сил, введем несколько голономных связей:

- $f_2 = \varphi_1 - \varphi_0 = 0, f_3 = \varphi_2 - \varphi_0 = 0$ - проекция на плоскость звеньев 1 и 2 должна соответствовать стопе;
- $f_4 = \left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\psi_2 - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \delta^2 = 0$ - ноги и туловище в невозмущенном движении должны сохранять вертикальное положение. Возможные отклонения не должны превышать заданного параметра δ .

Таким образом, для управления движением с определенными свойствами были добавлены четыре ограничения $q = 4$. Результаты численного интегрирования системы (4.1.5) представлены на графиках (рис. 16):

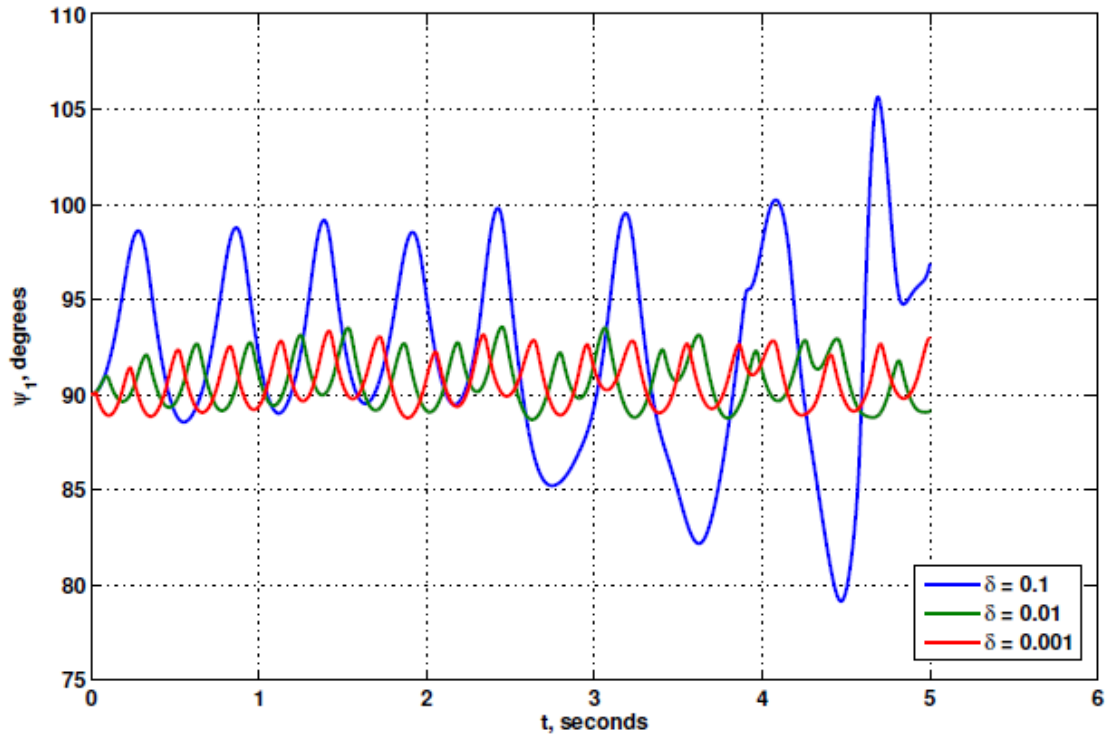


Рис. 16. Зависимость координаты $\psi_1(t)$

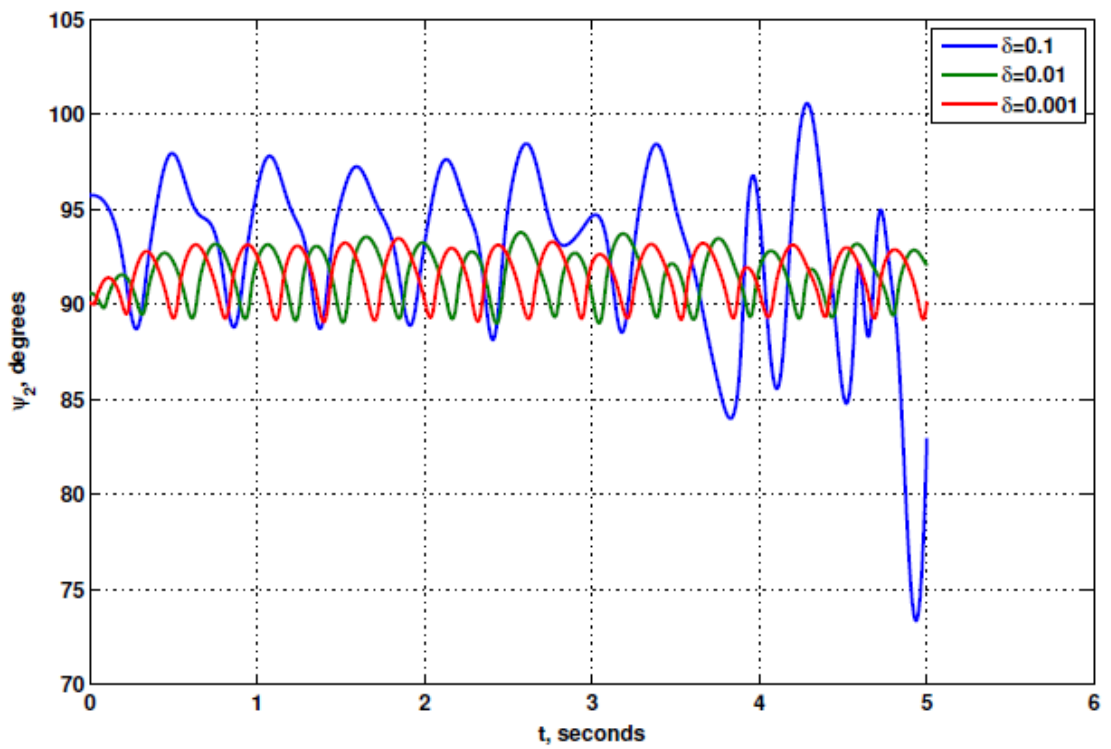


Рис. 17. Зависимость координаты $\psi_2(t)$

4.2. Стабилизация первых интегралов в задаче Лоудена

Рассматривается задача управления динамикой системы, представляющей ракету с переменной массой $m(t)$. Пусть система представляет собой ракету, которая движется в центральном поле сил с потенциалом $U = -\frac{\mu}{r}$. Обозначим $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – радиус вектор и вектор скорости. Тогда для решения классической задачи о движении тела с переменной массой записываются уравнения Мещерского:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_r - \nabla U,$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, \mathbf{F}_r – вектор реактивной силы,

$$\mathbf{F}_r = \frac{2P}{I_{sp}g} \mathbf{e},$$

где I_{sp} – удельный импульс, $P = \frac{1}{2} \beta I_{sp}^2 g^2$ – мощность, β – секундный расход массы. Введем семимерный вектор состояния $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}, m)$ и сопряженный к нему вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v, \lambda_m)$. Рассмотрим задачу об определении управляющих функций \mathbf{e} и β , при которых функционал

$$S = \int (\boldsymbol{\lambda} \dot{\mathbf{x}} - H) dt + \mu_s \psi_s + \nu_j \Theta_j + J,$$

принимает минимальное значение, где $H = (\boldsymbol{\lambda}_r, \mathbf{v}) + \left(\boldsymbol{\lambda}_r, \frac{2P}{I_{sp}gm} \mathbf{e} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) - \frac{2P\lambda_m}{I_{sp}^2g^2} + \sigma f$ – гамильтониан системы, начальные условия $\psi_s(\mathbf{x}_0) = 0$, $s = 1, \dots, 14$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, краевые условия $\Theta_j(\mathbf{x}_1, t_1) = 0$, $j = 1, \dots, j_1 \leq 14$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, $J(\mathbf{x}_1, t_1)$ – дополнительный функционал.

Дифференциальные уравнения, соответствующий решению оптимальной задачи, можно записать в форме уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{2P}{I_{sp}gm} \mathbf{e} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad \dot{m} = -\frac{2P}{I_{sp}^2g^2}, \quad (4.2.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.$$

Вектор тяги по модулю равен единице, что определяет равенство, образующее уравнение связи:

$$f = e^2 - 1 = 0, \quad (4.2.2)$$

Для определения вектора тяги можно воспользоваться условием локальной максимальности гамильтониана H :

$$\frac{\partial H}{\partial e} = 0. \quad (4.2.4)$$

Начальные и краевые условия для переменных λ определяются из условий трансверсальности:

$$\lambda_0 = \lambda(t_0) = \mathbf{v} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}_0}; \quad (4.2.5)$$

$$-\lambda_1 = -\lambda(t_1) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_1} + \tilde{\mathbf{v}} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{x}_1}; \quad (4.2.6)$$

где $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$ – произвольные множители.

Система канонических уравнений при гамильтониане (4.2.3), условие локальной максимальности, начальные и краевые условия, условия трансверсальности позволяют однозначно определить минимизирующую пару. Далее осуществляется ее проверка по необходимым и достаточным условиям.

Рассмотрим случай, в котором для системы из четырнадцати канонических уравнений известно $k \leq 14$ первых интегралов: $g_l(\mathbf{x}, t) = C_l$, $l = 1, \dots, k$. Пусть в начальный момент времени имеется ненулевой вектор отклонений $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тогда отклоненные начальные данные могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.2.7)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}: \|\varepsilon_i\| \ll \max_{t \in (t_0, t_1)} (x_i(t))$, $i = 1, \dots, 14$. Очевидно, что отклонение коснется и множителей $\boldsymbol{\lambda}$. Так как условия трансверсальности (4.2.6) связывает их начальные значения с начальными значениями $\boldsymbol{x}'(t_0)$.

Определим величину отклонений как разность $\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}', t) - \boldsymbol{C}$. При численном интегрировании уравнений значения отклонения от ожидаемой траектории может только расти из-за накопления ошибок на каждом шаге при суммировании в разностной схеме. Для ограничения этих накоплений используем метод стабилизации связей:

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{g}}}{dt} = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{g}}, \quad (4.2.8)$$

где матрица \boldsymbol{K} – обеспечивает асимптотическую устойчивость относительно отклонений от первых интегралов.

В работе данный метод применяется к первым интегралам для обеспечения устойчивости численного решения при ненулевом заданном векторе начальных отклонений $\boldsymbol{\varepsilon}$. Расширим гамильтониан с учетом величин отклонений от первых интегралов:

$$H' = H + \boldsymbol{\gamma}\tilde{\boldsymbol{g}}, \quad (4.2.9)$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – произвольные множители.

Канонические уравнения относительно гамильтониана (4.2.9) совместно с системой (4.2.8) образуют систему дифференциально алгебраических уравнений относительно $\dot{\boldsymbol{x}}$ и $\boldsymbol{\gamma}$. Оптимальный подбор компонент матрицы \boldsymbol{K} позволит наиболее эффективно управлять значением отклонений от ожидаемой траектории, делая тем самым численное решение устойчивым относительно первых интегралов.

Для демонстрации метода стабилизации будем считать, что функции управления определены и решается методами численного интегрирования только задача Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H'}{\partial \lambda}; \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H'}{\partial x}. \\ \frac{d\tilde{g}}{dt} &= K\tilde{g}\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Стабилизация в работе проводилась по двум первым интегралам [28] системы (4.2.10):

$$\tilde{g}_1 = -\frac{\mu}{r'^3}(\lambda, r') + (\lambda_r, v') + \frac{P}{2b}\lambda^2 - C_1 = 0;\tag{4.2.11}$$

$$\tilde{g}_2 = (\lambda, v') - 2(r', \lambda_r) - 5\frac{P}{2b}\int \lambda^2 dt + 3C_1t - C_2 = 0.\tag{4.2.12}$$

Матрица K выбрана диагональной:

$$K = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}.\tag{4.2.13}$$

Пусть отклонения в начальных данных претерпевают координата x и масса m . То есть $\varepsilon_x = \varepsilon_m \neq 0$. Начальные данные выбраны в виде $x'_0 = 1 + \varepsilon_x$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = 0$, $v'_{x0} = 2$, $v'_{y0} = 2$, $v'_{z0} = 20$, $m'_0 = 500 + \varepsilon_m$. Результат численного интегрирования при $k_1 = 1$, $k_2 = 1000$ и различных значениях вектора отклонений ε представлен на рисунке 18:

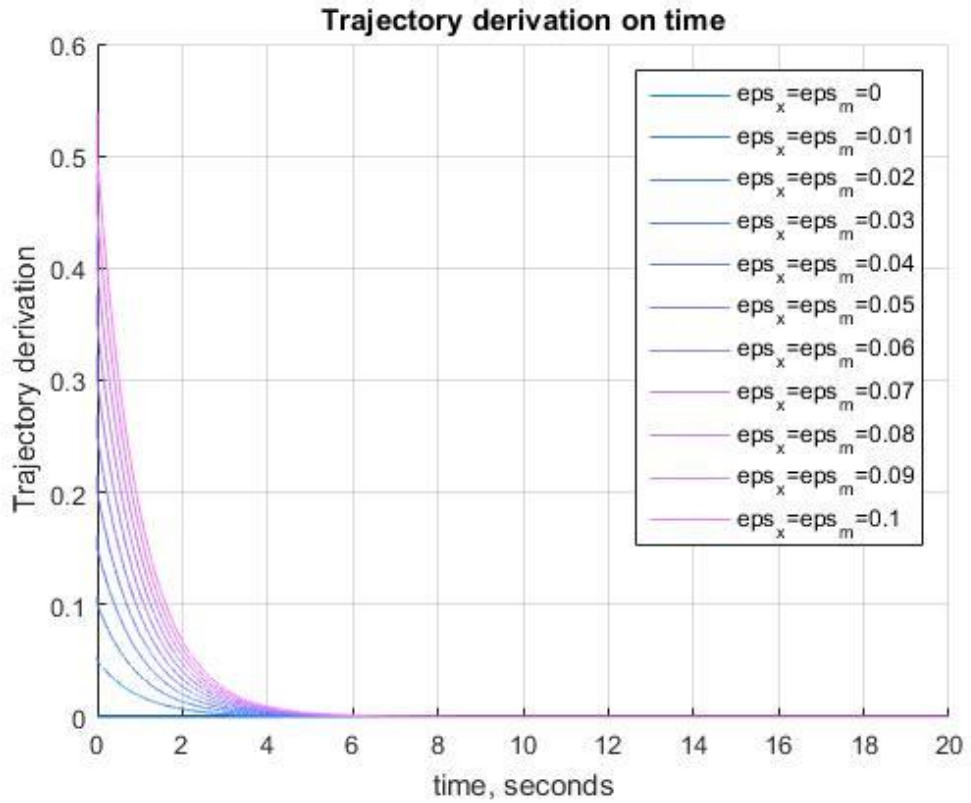


Рис. 18 Отклонение от первых интегралов

Отклонение, представленное по оси ординат, считается как норма вектора отклонений от первых интегралов $\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2}$. По рисунку видно, что при движении значения отклонений стремится к нулю, то есть метод стабилизации обеспечил устойчивость, несмотря на искусственно введенные отклонения в начальных данных.

Заключение

В соответствии с поставленными целями, в диссертационной работе получены следующие результаты:

- В первой главе разработан алгоритм решения систем дифференциально – алгебраических уравнений динамики, записанных в форме уравнений Чаплыгина и Воронца, с использованием метода стабилизации связей.
- Во второй главе получено выражение для оценки максимальной величины отклонения численного решения от уравнений связей с установлением зависимости величины данного отклонения от функции стабилизации связей. Применение метода стабилизации связей для обхода сингулярных точек на примере задачи динамики твердого тела успешно обеспечивает траекторию, соответствующую численному решению.
- В третьей главе показано, что в случае редуцирования систем дифференциальных уравнений второго порядка к виду уравнений Лагранжа второго рода для решения задачи стабилизации связей необходимо ввести функцию диссипации, при этом устанавливается между ними функциональное соотношение.
- В четвертой главе успешно решена задача стабилизации связей движения многозвенной системы, описывающей динамику скатывающегося по наклонной плоскости экзоскелета. Также продемонстрировано, что обобщение метода стабилизации частных интегралов позволяет получить локально устойчивое численное решение уравнений Понтрягина в задаче по поиску оптимальной траектории ракеты переменной массы.

Благодарности

Автор выражает благодарность первому научному руководителю Санюку Валерию Ивановичу за предложенное направление исследования и поддержку в научной работе. Автор благодарен всему профессорско – преподавательскому составу института физических исследований и технологий и математического института имени С.М. Никольского за бесценные знания, полученные в период обучения.

Автор выражает отдельную благодарность Борисову Андрею Валерьевичу за совместную работу над темами диссертационного исследования и Рыбакову Юрию Петровичу за оказанную поддержку в организационных вопросах.

Отдельно автор благодарен научному руководителю Мухарлямову Роберту Гарабшевичу за безграничную поддержку и оказанную помощь на протяжении всей диссертационной работы.

Список литературы

- [1] Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica/ Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures bibliopolas, 1687.
- [2] Lagrange J.-L. Mécanique Analytique/ Cambridge University Press, 2009.
- [3] Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies /MACMILLAN AND CO LONDON, 1913. – 59 p.
- [4] Hamilton W. R. XV. On a general method in dynamics; by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1834. – Vol. 124. – p. 247-308.
- [5] Hamilton W. R. VII. Second essay on a general method in dynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. – 1835. – Vol. 125. – p. 95-144.
- [6] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа т. II / Москва : ВШ, 1981. – 584 с.
- [7] Полак Л. С. Вариационные принципы механики / Физмалит, 1959. – 930 с.
- [8] Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte. – 1882. – vol. 1882. – No 92. – p. 156-171.
- [9] Ланцош К. Вариационные принципы механики /Москва : Мир, 1965. – 408 с.
- [10] Чаплыгин С. . Исследование по динамике неголономных систем / Москва - Ленинград : Гостехиздат, 1949. – 112 с.
- [11] Woronets P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Mathematische Annalen. – 1912. – No 71. – p. 431-441.
- [12] Appell P. Sur une forme générale des équations de la dynamique / Gauthier-Villars, 1925. – 53 p.
- [13] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем / – Наука, Физматлит, 1967. – 520 с.
- [14] Bèghin H. Étude théorique des compas gyrostatiques Anschutz et Sperry / Paris, 1922. – 137 p.
- [15] Азизов А. Г. К динамике систем, стесненных сервосвязям // Научные труды Ташкентского госуниверситета. – 1971. – Т. 397. – С. 3-10.
- [16] Азизов А. Г. Об уравнениях динамики систем с сервосвязями //

- Научные труды Ташкентского госуниверситета. – 1975. – Т. 476. – С. 67-75.
- [17] Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д. Построение систем программного движения / Москва : Наука, 1971. – 352 с.
- [18] Мухарлямов Р.Г. Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 4. – С. 50-61.
- [19] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений 2016. – 512 с.
- [20] Kendall Atkinson W. H. D. S. Numerical Solutions of Ordinary Differentietal equations / W. H. D. S. – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey., 2009. – 1-261 p.
- [21] Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / Изд. 4-е. – Ленанд, 2017. – 552 с.
- [22] Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1972. – Vol. 1. – No 1. – p. 1-16.
- [23] Ascher U. M., Chin H., Reich S. Stabilization of DAEs and invariant manifolds // Numerische Mathematik. – 1994. – Vol. 67. – No 2. – p. 131-149.
- [24] Борисов А. В., Каспирович И. Е., Матухина О. В, Мухарлямов Р. Г. Моделирование лыжника-сноубордиста звеном переменной длины с двумя весомыми абсолютно твердыми участками // Вестник Казанского технологического университета. – 2020. – Т. 23. – № 6. – С. 78-85.
- [25] Борисов А. В., Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г. Управление трехзвенной моделью сноубордиста // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Том 1: Общая и прикладная механика. – Уфа : Издательство БашГУ, 2019. – Т. 1. – С. 185-186.
- [26] Борисов А. . Динамика эндо- и экзоскелета / – Смоленск : Смоленская городская типография, 2012. – 296 с.
- [27] Azimov D. M. Active rocket trajectory arcs: A review. Vol. 66 – Maik Nauka-Interperiodica Publishing, 2005.
- [28] Bishop R. H., Azimov D.M. Analytical space trajectories for extremal motion with low-thrust exhaust-modulated propulsion // Journal of Spacecraft and Rockets. – 2001. – Vol. 38. – No 6. – p. 897-903. – URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.3761>.
- [29] Azimov D. M. Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories / –

- Elsevier, 2018.
- [30] Rutherford D. E., Lawden, D. F. Optimal Trajectories for Space Navigation // The Mathematical Gazette. – 1964. – Vol. 48. – No 366. – P. 478. – URL: /core/journals/mathematical-gazette/article/optimal-trajectories-for-space-navigation-by-d-f-lawden-pp-viii-126-21s-net-1963-butterworth-and-co/86F0D157D3B7505B1B176E9799D1739A
- [31] Ang M. H., Tourassis D. Singularities of Euler and Roll - Pitch - Yaw Representations // Aerospace and Electronic Systems. – 1986. – No 55.
- [32] Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R.G. On Constructing Dynamic Equations Methods with Allowance for Atabilization of Constraints // Mechanics of Solids. – 2019. – Vol. 54. – No 4. – p. 589-597.
- [33] Каспирович И. Е. Об устойчивости уравнений движения, полученных методами обратной задачи динамики, для систем с неголономными связями // Тезисы докладов Международной научной конференции Фундаментальные и прикладные задачи механики, посвященной 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского. – 2017. – С. 20.
- [34] Kaspirovich I. E. Application of constraint stabilization to nonholonomic mechanics // 2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2016 - Proceedings. – 2016.
- [35] Каспирович И. Е., Мухарлямов Р.Г. Применение метода стабилизации связей к задачам неголономной механики // Тезисы докладов ЛП Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. – Москва : Издательство РУДН, 2016. – С. 112-115.
- [36] Kaspirovich I. Constraint stabilization of two-wheeled sleigh / I. Kaspirovich // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 468. – p. 012037.
- [37] Kaspirovich I. E., Mukharlyamov R. G. Constraint Stabilization Application to Chaplygin Systems // 2018 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – 2018. – p. 1-4.
- [38] Каспирович И. Е. Стабилизация связей двухколесной тележки // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. – Москва : Издательство РУДН, 2018. – С. 177-182.
- [39] Каспирович И. Е. Анализ простейших численных методов обхода в сингулярных задачах механики // Тезисы докладов LIII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. – Москва : Издательство РУДН, 2017. – С. 126-128.

- [40] Каспирович И. Е. Методы обхода сингулярностей в задачах теоретической механики // Сборник трудов XI международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление. – Казань : Издательство КНИТУ-КАИ, 2017. – С. 182-188.
- [41] Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г. Численное решение задачи динамики с обходом сингулярностей // Вестник Казанского технологического университета. – 2017. – Т. 20. – № 9. – С. 89-92.
- [42] Мухарлямов Р. Г., Аскарлова К. З., Каспирович И. Е. О построении дифференциальных уравнений аналитической динамики и систем управления, // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы / Материалы Четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции. – Казань : Издательство Казанского математического общества, 2019. – С. 244-248.
- [43] Каспирович И. Е. Роль диссипативной функции при построении уравнений движения с заданными свойствами Устойчивость и выпучивание стержня и цилиндрической оболочки при продольном ударе // Динамические системы в науке и технологиях. – 2018. – С. 80-81.
- [44] Каспирович И. Е. Применение условий Гельмгольца для построения уравнений движения с нелинейной функцией стабилизации // Применение технологий виртуальной реальности и смежных информационных систем в междисциплинарных задачах Fit-M 2020. – Издательство «Знание-М» (Москва), 2020. – С. 270-272.
- [45] Kaspіrovich I. E., Mukharlyamov R.G. Possible solutions of inverse dynamical problems with regards for nonlinear constraint stabilization function // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1705. – p. 012013.
- [46] Аскарлова К. З., Каспирович И. Е. Определение параметров стабилизации связей при кратных корнях характеристического уравнения // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Том 1: Общая и прикладная механика. – Уфа : Издательство БашГУ, 2019. – С. 167-169.
- [47] Borisov A. V., Kaspіrovich I.E., Mukharlyamov R. G. Dynamics control of nonholonomic system modelling motion of skier and snowboarder // Ans Conference Series: Scientific Heritage of Sergey A. Chaplygin (Nonholonomic Nechanics, Vortex Structures and Hydrodynamics). – Izhevsk : Издательство Ижевского института компьютерных исследований, 2019. – С. 37-39.

- [48] Борисов А. В., Маслова К. С., Мухарлямов Р. Г., Каспирович И. Е. Моделирование динамики сноубордиста звеньями переменной длины с двумя весомыми абсолютно твердыми участками // Сборник трудов IX Международной научно-технической конференции. В 2-х томах. 2019. – Универсум (Смоленск), 2019. – С. 262-266.
- [49] Борисов А. В., Мухарлямов Р. Г., Каспирович И. Е. Динамика сноубордиста моделируемого звеном переменной длины составной конструкции // Сборник докладов и материалов III Национальной научно-практической конференции. 2019. – Автономная некоммерческая организация высшего образования «Институт непрерывного образования» (Москва), 2019. – С. 261-272.
- [50] Matukhina O. V., Mukharlyamov R. G., Kaspirovich I. E. On a Problem of Programming the Movement of a Mobile Robot // 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). – IEEE, 2020. – pp. 1-5.
- [51] Borisov A. V., Kaspirovich I.E., Mukharlyamov R. G. On Mathematical Modeling of the Dynamics of Multilink Systems and Exoskeletons // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2021. – Vol. 60. – No 5.
- [52] Borisov A. V., Kaspirovich I.E., Mukharlyamov R. G. Dynamic control of compound structure with links of variable length // Mechanics of Solids. – 2021. – Vol. 56. – No 2. – pp. 197-210.
- [53] Борисов А. В., Мухарлямов Р. Г., Каспирович И. Е. Управление динамикой составной конструкции со звеньями переменной длины // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 2. – С. 72-87.
- [54] Аминов Ю. Геометрия векторного поля / Ленанд, 2020. – 208 с.
- [55] Смирнов В. И. Курс высшей математики, Т.4, часть I / Наука, 1974. – 336 с.
- [56] Чернет Д. Мухарлямов Р. Г. Стабилизация и уравнения динамики голономной системы в сингулярных случаях // Материалы LI Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц и оптоэлектроники. – 2015. – С. 164-168.
- [57] Мухарлямов Р. Г. Об уравнениях движения механических систем // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 2048–2056.
- [58] Каспирович И. Е. Стабилизация связей в задаче Воронца // Энергетика, информатика, инновации - 2021 Сборник трудов XI Международной научно-технической конференции. – Смоленск, 2021 – С. 252-255
- [59] Каспирович И. Е., Мухарлямов Р.Г. Стабилизация и управление простейшей моделью сноубордиста // труды XIII Всероссийского

совещания по проблемам управления (ВСПУ 2019). – Москва : ИПУ РАН, 2019. – С. 207-211.

- [60]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Матричный метод построения уравнений динамики многосвязных систем твердых тел // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 : Труды [Электронный ресурс] 17-20 июня 2019 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – Электрон. текстовые дан. (616 файлов: 219 МБ). – М.: ИПУ РАН, 2019. С. 796-800. ISBN 978-5-91450-234-5.
- [61]. Каспирович И. Е, Мухарлямов Р.Г. Применение метода стабилизации связей к задачам неголономной механики. // LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 17-19 мая 2016 г. – Москва: РУДН, 2017. – С. 112-116.
- [62]. Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Стабилизация и управление простейшей моделью сноубордиста // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 : Труды [Электронный ресурс] 17-20 июня 2019 г., Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – Электрон. текстовые дан. (616 файлов: 219 МБ). – М.: ИПУ РАН, 2019. С. 207-211.
- [63]. Аскарлова К.З., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. О построении дифференциальных уравнений аналитической динамики и систем управления. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы / Материалы Четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. – Т. 57. – С. 244-248.
- [64]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Уравнения движения модели сноубордиста с учетом неголономной связи // LVI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Материалы конференции. Москва, РУДН, 18-22 мая 2020 г. С. 126-130.
- [65]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой составной конструкции со звеньями переменной длины // Известия РАН. МТТ. – № 2. 2021. – С. 72-87. ISSN 0025-6544.
- [66]. A. V. Borisov, I. E. Kaspirovich and R. G. Mukharlyamov. Dynamic Control of Compound Structure with Links of Variable Length // *Mechanics of Solids*, 2021, Vol. 56, No. 2. © Allerton Press, Inc., 2021. Pp. 59–72. DOI: 10.31857/S0572329921020057
- [67]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Программа составления системы дифференциальных уравнений Рауса для

неголономной механической системы, моделирующей сноубордиста на лыже с тремя подвижными звеньями переменной длины. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021660163 от 22 июня 2021 г.

- [68]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2021, № 5. – С. 162-176.
- [69]. Борисов А.В., Борисова В.Л., Каспирович И.Е., Каспирович К.З., Мухарлямов Р.Г., Филиппенков К.Д. Математическое моделирование динамики многомерных механических систем и решение задач управления. Монография. – Смоленск: Универсум, 2021. – 220 с
- [70]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Анимационное моделирование динамики многозвенных пространственных механизмов с абсолютно твердыми телами и звеньями переменной длины в виде сноубордиста с учетом неголономной связи // LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Материалы докладов. Москва, РУДН, 17-21 мая 2021 г. С. 171-178.
- [71]. Матухина О.В., Мухарлямов Р.Г., Каспирович И.Е. О задаче программирования движения мобильного робота // LVII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Материалы докладов. Москва, РУДН, 17-21 мая 2021 г. С. 215-221.
- [72]. Борисов А.В., Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. Моделирование и управление многозвенной моделью сноубордиста // Инженерный журнал: наука и инновации, 2022, вып. 5. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 7–10 декабря 2021 г. Материалы конференции. В двух частях. Часть 1. Составители П.М. Шкапов, М.И. Дьяченко. С. 29-31.

Приложение 1*Программа к задаче на странице 64*

```
h=0.001;
T=15;
N=T/h;
v=1;
om=1;
d1=10;
d2=5;
d3=11;
x(1)=0;
y(1)=-1;
fi(1)=0;
vx(1)=v;
vy(1)=0;
vf(1)=om;
t(1)=0;
for i=1:1:N
    h1(i)=vx(i)-v*cos(fi(i));
    h2(i)=vy(i)-v*sin(fi(i));
    h3(i)=vf(i)-om;
    d11(i)=d1;
    d22(i)=d2;
    d33(i)=d3;
    d13(i)=-v*d1/om*cos(fi(i));
    d23(i)=-v/om*d2*sin(fi(i));
    k11(i)=-d11(i);
    k12(i)=0;
    k13(i)=-d13(i);
    k21(i)=0;
```

```

k22(i)=-d22(i);
k23(i)=-d23(i);
k31(i)=v*sin(fi(i))-d13(i);
k32(i)=-v*cos(fi(i))-d23(i);
k33(i)=-d33(i);
x(i+1)=x(i)+h*vx(i);
y(i+1)=y(i)+h*vy(i);
fi(i+1)=fi(i)+h*vf(i);
vx(i+1)=vx(i)+h*(k11(i)*h1(i)+k12(i)*h2(i)+k13(i)*h3(i)-v*vf(i)*sin(fi(i)));
vy(i+1)=vy(i)+h*(k21(i)*h1(i)+k22(i)*h2(i)+k23(i)*h3(i)+v*vf(i)*cos(fi(i)));
vf(i+1)=vf(i)+h*(k31(i)*h1(i)+k32(i)*h2(i)+k33(i)*h3(i));
t(i+1)=t(i)+h;
sigm(i)=sqrt(h1(i)^2+h2(i)^2+h3(i)^2);
end
t(N+1)=[];
sqrt(max(h1)^2+max(h2)^2+max(h3)^2)
plot(t,sigm)

```


Приложение 2***Программа к задаче на странице 68***

```
%характеристики интегрирования
h=0.001; %шаг
T=10; %время
N=10; %количество шагов
initialdata = importdata('initialdata.txt'); %начальные данные
parametres = importdata('parametres.txt'); %параметры системы
velocities = importdata('velocities.txt');
m0=5;
m1=5;
m2=10;
l0=0.5;
delta=0.1;
a0=1;
l1=1;
l2=1;
alpha=15*3.1415/180;
g=9.8;
q=initialdata;
v=velocities;
A=10;
k=1;
q(6)=pi/3;
q(7)=2*pi/3-delta;
q(3)=atan(A*k);
Stab=[-10,-100,0,0;0,-10,0,0;0,-100,-10,0;0,0,0,-10];
t(1)=0;
for i=1:1:N %цикл
    %матрица Гесса
```

$$H(1,1)=m_0+m_1+m_2;$$

$$H(1,2)=0;$$

$$H(1,3)=0;$$

$$H(1,4)=-((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(4))*\cos(q(6));$$

$$H(1,5)=-\sin(q(5))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m_2;$$

$$H(1,6)=-\cos(q(4))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(6));$$

$$H(1,7)=-((1/2*12+q(9))*\sin(q(7))*\cos(q(5))*m_2);$$

$$H(1,8)=\cos(q(4))*(m_1+m_2)*\cos(q(6));$$

$$H(1,9)=\cos(q(7))*\cos(q(5))*m_2;$$

$$H(1,10)=\cos(q(4))*m_2*\cos(q(6));$$

$$H(2,1)=0;$$

$$H(2,2)=m_0+m_1+m_2;$$

$$H(2,3)=0;$$

$$H(2,4)=((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\cos(q(4))*\cos(q(6));$$

$$H(2,5)=\cos(q(5))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m_2;$$

$$H(2,6)=-\sin(q(4))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(6));$$

$$H(2,7)=-((1/2*12+q(9))*\sin(q(7))*\sin(q(5))*m_2);$$

$$H(2,8)=\sin(q(4))*(m_1+m_2)*\cos(q(6));$$

$$H(2,9)=\cos(q(7))*\sin(q(5))*m_2;$$

$$H(2,10)=\sin(q(4))*m_2*\cos(q(6));$$

$$H(3,1)=0;$$

$$H(3,2)=0;$$

$$H(3,3)=1/12*10^2*m_0;$$

$$H(3,4)=0;$$

$$H(3,5)=0;$$

$$H(3,6)=0;$$

$$H(3,7)=0;$$

$$H(3,8)=0;$$

$$H(3,9)=0;$$

$$H(3,10)=0;$$

$$H(4,1)=-((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(4))*\cos(q(6));$$

$$H(4,2)=((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(4))*\cos(q(6));$$

$$H(4,3)=0;$$

$$H(4,4)=((m1+m2)*q(8)^2+(2*q(10)*m2+11*(m1+2*m2))*q(8)+q(10)^2*m2+2*q(10)*11*m2+1/3*11^2*(m1+3*m2))*\cos(q(6))^2;$$

$$H(4,5)=\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(6));$$

$$H(4,6)=0;$$

$$H(4,7)=-(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*\sin(q(7))*m2*\cos(q(6));$$

$$H(4,8)=0;$$

$$H(4,9)=\cos(q(7))*m2*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*\cos(q(6));$$

$$H(4,10)=0;$$

$$H(5,1)=-\sin(q(5))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$H(5,2)=\cos(q(5))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$H(5,3)=0;$$

$$H(5,4)=\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(6));$$

$$H(5,5)=\cos(q(7))^2*m2*(q(9)^2+q(9)*12+1/3*12^2);$$

$$H(5,6)=\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(6))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2;$$

$$H(5,7)=0;$$

$$H(5,8)=-\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$H(5,9)=0;$$

$$H(5,10)=-\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$H(6,1)=-\cos(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6));$$

$$H(6,2)=-\sin(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6));$$

$$H(6,3)=0;$$

$$H(6,4)=0;$$

$$\begin{aligned}
H(6,5) &= \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(6)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2; \\
H(6,6) &= 1/12 * (12 * m_1 + 12 * m_2) * q(8)^2 + 1/12 * (24 * q(10) * m_2 + 12 * l_1 * (m_1 + 2 * m_2)) * q(8) + q(10)^2 * m_2 + 2 * q(10) * l_1 * m_2 + 1/3 * l_1^2 * (m_1 + 3 * m_2); \\
H(6,7) &= (\cos(q(6)) * \cos(q(7)) + \sin(q(6)) * \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2; \\
H(6,8) &= 0; \\
H(6,9) &= (\cos(q(6)) * \sin(q(7)) - \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2; \\
H(6,10) &= 0; \\
H(7,1) &= -(1/2 * l_2 + q(9)) * \sin(q(7)) * \cos(q(5)) * m_2; \\
H(7,2) &= -(1/2 * l_2 + q(9)) * \sin(q(7)) * \sin(q(5)) * m_2; \\
H(7,3) &= 0; \\
H(7,4) &= -(\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * \sin(q(7)) * m_2 * \cos(q(6)); \\
H(7,5) &= 0; \\
H(7,6) &= (\cos(q(6)) * \cos(q(7)) + \sin(q(6)) * \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2; \\
H(7,7) &= m_2 * (q(9)^2 + q(9) * l_2 + 1/3 * l_2^2); \\
H(7,8) &= -(1/2 * l_2 + q(9)) * (\sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * \cos(q(6)) - \cos(q(7)) * \sin(q(6))) * m_2; \\
H(7,9) &= 0; \\
H(7,10) &= -(1/2 * l_2 + q(9)) * (\sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * \cos(q(6)) - \cos(q(7)) * \sin(q(6))) * m_2; \\
H(8,1) &= \cos(q(4)) * (m_1 + m_2) * \cos(q(6)); \\
H(8,2) &= \sin(q(4)) * (m_1 + m_2) * \cos(q(6)); \\
H(8,3) &= 0; \\
H(8,4) &= 0; \\
H(8,5) &= -\cos(q(6)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(7)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * m_2; \\
H(8,6) &= 0;
\end{aligned}$$

$$H(8,7)=- \\ (1/2*12+q(9))*(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6)) \\ -\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m2;$$

$$H(8,8)=m1+m2;$$

$$H(8,9)=(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7)))*m2;$$

$$H(8,10)=m2;$$

$$H(9,1)=\cos(q(7))*\cos(q(5))*m2;$$

$$H(9,2)=\cos(q(7))*\sin(q(5))*m2;$$

$$H(9,3)=0;$$

$$H(9,4)=\cos(q(7))*m2*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*\cos(q(6));$$

$$H(9,5)=0;$$

$$H(9,6)=(\cos(q(6))*\sin(q(7))- \\ \cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*(q(8)+q(10)+ \\ 11)*m2;$$

$$H(9,7)=0;$$

$$H(9,8)=(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7)))*m2;$$

$$H(9,9)=m2;$$

$$H(9,10)=(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6)) \\ *\sin(q(7)))*m2;$$

$$H(10,1)=\cos(q(4))*m2*\cos(q(6));$$

$$H(10,2)=\sin(q(4))*m2*\cos(q(6));$$

$$H(10,3)=0;$$

$$H(10,4)=0;$$

$$H(10,5)=-\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$H(10,6)=0;$$

$$H(10,7)=- \\ (1/2*12+q(9))*(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6)) \\ -\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m2;$$

$$H(10,8)=m2;$$

$$H(10,9)=(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7)))*m2;$$

$$H(10,10)=m2;$$

$$L(1,1)=0;$$

$$L(1,2)=0;$$

$$L(1,3)=0;$$

$$L(1,4)=\sin(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6))*v(6)-\cos(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(6))*v(4)-((m1+m2)*v(8)+v(10)*m2)*\sin(q(4))*\cos(q(6));$$

$$L(1,5)=\sin(q(7))*\sin(q(5))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)-(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\cos(q(5))*v(5)-\cos(q(7))*\sin(q(5))*m2*v(9);$$

$$L(1,6)=-\cos(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(6))*v(6)+\sin(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6))*v(4)-((m1+m2)*v(8)+v(10)*m2)*\cos(q(4))*\sin(q(6));$$

$$L(1,7)=-\cos(q(7))*\cos(q(5))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)+(1/2*12+q(9))*m2*\sin(q(7))*\sin(q(5))*v(5)-\sin(q(7))*\cos(q(5))*m2*v(9);$$

$$L(1,8)=-\cos(q(4))*(m1+m2)*\sin(q(6))*v(6)-\sin(q(4))*(m1+m2)*\cos(q(6))*v(4);$$

$$L(1,9)=-\sin(q(7))*\cos(q(5))*m2*v(7)-m2*\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(5);$$

$$L(1,10)=-\cos(q(4))*m2*\sin(q(6))*v(6)-\sin(q(4))*m2*\cos(q(6))*v(4);$$

$$L(2,1)=0;$$

$$L(2,2)=0;$$

$$L(2,3)=0;$$

$$L(2,4)=-\cos(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6))*v(6)-\sin(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(6))*v(4)+((m1+m2)*v(8)+v(10)*m2)*\cos(q(4))*\cos(q(6));$$

$$L(2,5)=-\sin(q(7))*\cos(q(5))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)-(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(5)+\cos(q(7))*\cos(q(5))*m2*v(9);$$

$$L(2,6)=-\sin(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(6))*v(6)-\cos(q(4))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\sin(q(6))*v(4)-((m1+m2)*v(8)+v(10)*m2)*\sin(q(4))*\sin(q(6));$$

$$L(2,7)=-\cos(q(7))*\sin(q(5))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)-$$

$$\begin{aligned}
& (1/2 * l_2 + q(9)) * m_2 * \sin(q(7)) * \cos(q(5)) * v(5) - \sin(q(7)) * \sin(q(5)) * m_2 * v(9); \\
L(2,8) &= -\sin(q(4)) * (m_1 + m_2) * \sin(q(6)) * v(6) + \cos(q(4)) * (m_1 + m_2) * \cos(q(6)) * v(4); \\
L(2,9) &= -\sin(q(7)) * \sin(q(5)) * m_2 * v(7) + m_2 * \cos(q(7)) * \cos(q(5)) * v(5); \\
L(2,10) &= -\sin(q(4)) * m_2 * \sin(q(6)) * v(6) + \cos(q(4)) * m_2 * \cos(q(6)) * v(4); \\
L(3,1) &= 0; \\
L(3,2) &= 0; \\
L(3,3) &= 0; \\
L(3,4) &= 0; \\
L(3,5) &= 0; \\
L(3,6) &= 0; \\
L(3,7) &= 0; \\
L(3,8) &= 0; \\
L(3,9) &= 0; \\
L(3,10) &= 0; \\
L(4,1) &= 0; \\
L(4,2) &= 0; \\
L(4,3) &= 0; \\
L(4,4) &= (-(-\sin(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(4)) * \cos(q(5))) * \sin(q(7)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2 * v(7) + (1/ \\
& 2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * v(5) + \cos(q(7)) * m_2 * (-\sin(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(4)) * \cos(q(5))) * (q(8) + q(10) + l_1) * v(9) - \\
& (v(1) * \cos(q(4)) + v(2) * \sin(q(4))) * ((m_1 + m_2) * q(8) + q(10) * m_2 + 1/2 * l_1 * (m_1 + 2 * \\
& m_2))) * \cos(q(6)); \\
L(4,5) &= (- \\
& (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * \sin(q(7)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + \\
& l_1) * m_2 * v(7) + (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2 * \cos(q(7)) * (- \\
& \cos(q(4)) * \sin(q(5)) + \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * v(5) + \cos(q(7)) * m_2 * (\cos(q(4)) * \cos(\\
& q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * (q(8) + q(10) + l_1) * v(9)) * \cos(q(6)); \\
L(4,6) &= - \\
& 2 * ((m_1 + m_2) * q(8)^2 + (2 * q(10) * m_2 + l_1 * (m_1 + 2 * m_2)) * q(8) + q(10)^2 * m_2 + 2 * q(\\
& 10) * l_1 * m_2 + 1/3 * l_1^2 * (m_1 + 3 * m_2)) * \cos(q(6)) * v(4) * \sin(q(6)) - (\\
& \cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2 * v(7) + (1/2 \\
& * l_2 + q(9)) * (q(8) + q(10) + l_1) * m_2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin
\end{aligned}$$

$$(q(5)) * v(5) + \cos(q(7)) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (q(8) + q(10) + 11) * v(9) - (v(1) * \sin(q(4)) - v(2) * \cos(q(4))) * ((m1 + m2) * q(8) + q(10) * m2 + 1/2 * 11 * (m1 + 2 * m2))) * \sin(q(6));$$

$$L(4,7) = (-\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(7)) * (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * v(7) - (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * v(5) - \sin(q(7)) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (q(8) + q(10) + 11) * v(9)) * \cos(q(6));$$

$$L(4,8) = (2 * (m1 + m2) * q(8) + 2 * q(10) * m2 + 11 * (m1 + 2 * m2)) * \cos(q(6)) ^ 2 * v(4) + (-\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * v(7) + (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * v(5) + \cos(q(7)) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * v(9) - (v(1) * \sin(q(4)) - v(2) * \cos(q(4))) * (m1 + m2)) * \cos(q(6));$$

$$L(4,9) = (-\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * v(7) + (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * v(5)) * \cos(q(6));$$

$$L(4,10) = (2 * m2 * q(8) + 2 * q(10) * m2 + 2 * 11 * m2) * \cos(q(6)) ^ 2 * v(4) + (-\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * v(7) + (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * v(5) + \cos(q(7)) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * v(9) - (v(1) * \sin(q(4)) - v(2) * \cos(q(4))) * m2 * \cos(q(6));$$

$$L(5,1) = 0;$$

$$L(5,2) = 0;$$

$$L(5,3) = 0;$$

$$L(5,4) = (-\sin(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(4)) * \cos(q(5))) * (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * v(6) + (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * v(4) - (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * \cos(q(6)) * (-\sin(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(4)) * \cos(q(5))) * (v(8) + v(10));$$

$$L(5,5) = (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * v(6) + (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * (-\cos(q(4)) * \sin(q(5)) + \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * v(4) - (1/2 * 12 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * (v(1) * \cos(q(5)) + v(2) * \sin(q(5)) + \cos(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * (v(8) + v(10));$$

$$L(5,6) = (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (1/2 * 12 + q(9)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(7)) * \cos(q(6))$$

$$\begin{aligned} & *v(6)- \\ & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\ & *\sin(q(5)))*\sin(q(6))*v(4)+(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4)) \\ & *\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(v(8)+v(10)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(5,7)= & -(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*\sin(q(6)) \\ & *v(6)- \\ & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\ & *\sin(q(5)))*\cos(q(6))*v(4)- \\ & 2*m2*\cos(q(7))*(q(9)^2+q(9)*12+1/3*12^2)*v(5)*\sin(q(7))+(1/2*12+q(9))* \\ & m2*\sin(q(7))*(\sin(q(5))*v(1)-\cos(q(5))*v(2)+\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(v(8)+v(10))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(5,8)= & (\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(6)+(1/2*12+q(\\ & 9))*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))*v(4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(5,9)= & (\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(6)+(q(8)+q(\\ & 10)+11)*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))* \\ & v(4)+m2*\cos(q(7))^2*(2*q(9)+12)*v(5)-m2*\cos(q(7))*(\sin(q(5))*v(1)- \\ & \cos(q(5))*v(2)+\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(v(8)+v(10))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(5,10)= & (\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(6)+(1/2*12+q(\\ & 9))*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))*v(4); \end{aligned}$$

$$L(6,1)=0;$$

$$L(6,2)=0;$$

$$L(6,3)=0;$$

$$\begin{aligned} L(6,4)= & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5)) \\ &)-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(7)+(-\sin(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(4))*\cos(q(5)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6)) \\ & *v(5)-(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(9)-(- \\ & v(1)*\sin(q(4))+v(2)*\cos(q(4)))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2* \\ & m2))*\sin(q(6)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(6,5)= & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(6))*\sin(q(7))*(- \\ & \cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(7)+(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\ &)*\sin(q(5)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)- \\ & (q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(- \\ & \cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(9); \end{aligned}$$

$$L(6,6)=(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))-\cos(q(7))*\sin(q(6)))*v(7)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*v(5)+(q(8)+q(10)+11)*m2*(-\sin(q(6))*\sin(q(7))-\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6)))*v(9)-(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))*((m1+m2)*q(8)+q(10)*m2+1/2*11*(m1+2*m2))*\cos(q(6));$$

$$L(6,7)=(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*(-\cos(q(6))*\sin(q(7))+\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)-(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+(q(8)+q(10)+11)*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9);$$

$$L(6,8)=1/12*(2*(12*m1+12*m2)*q(8)+24*q(10)*m2+12*11*(m1+2*m2))*v(6)+(1/2*12+q(9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+m2*(\cos(q(6))*\sin(q(7))-\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9)-(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))*(m1+m2)*\sin(q(6));$$

$$L(6,9)=(q(8)+q(10)+11)*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5);$$

$$L(6,10)=1/12*(24*m2*q(8)+24*q(10)*m2+24*11*m2)*v(6)+(1/2*12+q(9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+m2*(\cos(q(6))*\sin(q(7))-\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9)-(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))*m2*\sin(q(6));$$

$$L(7,1)=0;$$

$$L(7,2)=0;$$

$$L(7,3)=0;$$

$$L(7,4)=(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*\sin(q(6))*v(6)-(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(6))*v(4)-(v(8)+v(10))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*(1/2*12+q(9))*m2;$$

$$L(7,5)=(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(6))*\sin(q(7))*(-$$

$$\begin{aligned} & \cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(6)- \\ & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\ & *\sin(q(5)))*\cos(q(6))*v(4)-(- \\ & \sin(q(7))*\sin(q(5))*v(1)+\sin(q(7))*\cos(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*\sin(q(7))*(- \\ & \cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6)))*(1/2*12+q(9))*m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(7,6)= & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\ & *\sin(q(5)))*\cos(q(6))-\cos(q(7))*\sin(q(6)))*v(6)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(6)) \\ & *v(4)-(v(8)+v(10))*(-\cos(q(6))*\cos(q(7)))- \\ & \sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*(1/2*12+q(9)) \\ & *m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(7,7)= & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*(- \\ & \cos(q(6))*\sin(q(7))+\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))) \\ &))*v(6)- \\ & (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*v(4)- \\ & (\cos(q(7))*\cos(q(5))*v(1)+\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*(\cos(q(7)) \\ & *(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7))))*(\\ & 1/2*12+q(9))*m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(7,8)= & (1/2*12+q(9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos \\ & (q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(6)-(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(6))*v(4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(7,9)= & (q(8)+q(10)+11)*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))* \\ & \cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(6)-(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(6))*v(4)+m2*(2* \\ & q(9)+12)*v(7)- \\ & (\sin(q(7))*\cos(q(5))*v(1)+\sin(q(7))*\sin(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*(\sin(q(7))* \\ & (\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))- \\ & \cos(q(7))*\sin(q(6))))*m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(7,10)= & (1/2*12+q(9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))* \\ & \cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(6)-(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(6))*v(4); \end{aligned}$$

$$L(8,1)=0;$$

$$L(8,2)=0;$$

$$L(8,3)=0;$$

$$\begin{aligned} L(8,4)= & -\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)- \\ & (1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*(-\sin(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(4))*\cos(q(5)))*v(5)+\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\ & \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*m2*v(9)- \end{aligned}$$

$$(m1+m2)*\sin(q(4))*\cos(q(6))*v(1)+(m1+m2)*\cos(q(4))*\cos(q(6))*v(2);$$

$$L(8,5)=-\sin(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)-(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(5)+\cos(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*m2*v(9);$$

$$L(8,6)=-(-\cos(q(6))*\cos(q(7))-\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)+(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+m2*(\cos(q(6))*\sin(q(7))-\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9)-(m1+m2)*\cos(q(4))*\sin(q(6))*v(1)-(m1+m2)*\sin(q(4))*\sin(q(6))*v(2);$$

$$L(8,7)=-(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7)))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)+(1/2*12+q(9))*m2*\sin(q(7))*\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5)+(-\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m2*v(9);$$

$$L(8,8)=0;$$

$$L(8,9)=-(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))-\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m2*v(7)-m2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5);$$

$$L(8,10)=0;$$

$$L(9,1)=0;$$

$$L(9,2)=0;$$

$$L(9,3)=0;$$

$$L(9,4)=-(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(6)+\cos(q(7))*m2*(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*(q(8)+q(10)+11)*\cos(q(6))*v(4)+(v(8)+v(10))*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*m2;$$

$$L(9,5)=-((q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(6)+(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))*v(4)+(-\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(1)+\cos(q(7))*\cos(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*\cos(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6)))*m2;$$

$$L(9,6)=(q(8)+q(10)+11)*m2*(-\sin(q(6))*\sin(q(7))-$$

$$\begin{aligned} & \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * \cos(q(6))) * v(6) - \\ & \cos(q(7)) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (q(8) + q(10) + 11) * \sin(q(6)) * v(4) + (v(8) + v(10)) * (\cos(q(6)) \\ &) * \sin(q(7)) - \\ & \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(9,7) = & (q(8) + q(10) + 11) * m2 * (\cos(q(6)) * \cos(q(7)) + \sin(q(6)) * \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \\ & \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * v(6) - (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (q(8) + q(10) + 11) * m2 * \cos(q(6)) * v(4) + (- \\ & \sin(q(7)) * \cos(q(5)) * v(1) - \sin(q(7)) * \sin(q(5)) * v(2) + (v(8) + v(10)) * (- \\ & \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * \cos(q(6)) + \cos(q(7)) * \sin(\\ & q(6)))) * m2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(9,8) = & m2 * (\cos(q(6)) * \sin(q(7)) - \\ & \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * v(6) + \cos(q(7)) \\ &) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * v(4); \end{aligned}$$

$$L(9,9) = 0;$$

$$\begin{aligned} L(9,10) = & m2 * (\cos(q(6)) * \sin(q(7)) - \\ & \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * v(6) + \cos(q(7)) \\ &) * m2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * v(4); \end{aligned}$$

$$L(10,1) = 0;$$

$$L(10,2) = 0;$$

$$L(10,3) = 0;$$

$$\begin{aligned} L(10,4) = & -\sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * (1/2 * l2 + q(9)) * m2 * v(7) - \\ & (1/2 * l2 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * \cos(q(6)) * (-\sin(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(4)) * \cos(q(5))) * v(5) + \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * m2 * v(9) - \\ & m2 * \sin(q(4)) * \cos(q(6)) * v(1) + m2 * \cos(q(4)) * \cos(q(6)) * v(2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(10,5) = & -\sin(q(7)) * (- \\ & \cos(q(4)) * \sin(q(5)) + \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * (1/2 * l2 + q(9)) * m2 * v(7) - \\ & (1/2 * l2 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * \cos(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) \\ &) * v(5) + \cos(q(7)) * (- \\ & \cos(q(4)) * \sin(q(5)) + \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \cos(q(6)) * m2 * v(9); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(10,6) = & -(-\cos(q(6)) * \cos(q(7)) - \\ & \sin(q(6)) * \sin(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * (1/2 * l2 + q(9)) \\ & * m2 * v(7) + (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\ & \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (1/2 * l2 + q(9)) * m2 * \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * v(5) + m2 * (\cos(q \\ & (6)) * \sin(q(7)) - \\ & \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * v(9) - \\ & m2 * \cos(q(4)) * \sin(q(6)) * v(1) - m2 * \sin(q(4)) * \sin(q(6)) * v(2); \end{aligned}$$

$$L(10,7)=-$$

$$(\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7)))*(1/2*12+q(9))*m^2*v(7)+(1/2*12+q(9))*m^2*\sin(q(7))*\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5)+(-\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m^2*v(9);$$

$$L(10,8)=0;$$

$$L(10,9)=-(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))-\cos(q(7))*\sin(q(6)))*m^2*v(7)-m^2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5);$$

$$L(10,10)=0;$$

$$F(1)=g*\sin(\alpha)*(m_0+m_1+m_2);$$

$$F(2)=0;$$

$$F(3)=0;$$

$$F(4)=1/24*(24*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(7)+24*(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)-24*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(9)-24*(-v(1)*\sin(q(4))+v(2)*\cos(q(4)))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m^2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(6))*v(6)+(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*v(7)+(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5)+\cos(q(7))*m^2*(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*(q(8)+q(10)+11)*v(9)-(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m^2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\cos(q(6))*v(4)-(v(8)+v(10))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*(1/2*12+q(9))*m^2*v(7)-(1/2*12+q(9))*m^2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*(-\sin(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(4))*\cos(q(5)))*(v(8)+v(10))*v(5)+(v(8)+v(10))*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6))*m^2*v(9)-((m_1+m_2)*v(8)+v(10)*m^2)*\sin(q(4))*\cos(q(6))*v(1)+((m_1+m_2)*v(8)+v(10))*m^2*\cos(q(4))*\cos(q(6))*v(2)-g*\sin(\alpha)*\sin(q(4))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m^2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\cos(q(6));$$

$$F(5)=1/24*(24*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\sin(q(6))*\sin(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(7)+24*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*(1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)-24*(q(8)+q(10)+11)*m^2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(9))*v(6)+(-$$

$$\begin{aligned}
& (\cos(q(4))\cos(q(5))+\sin(q(4))\sin(q(5)))\sin(q(7))*(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*v(7)+ \\
& (1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*\cos(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(5)+\cos(q(7))*m_2*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))* \\
& (q(8)+q(10)+11)*v(9))*\cos(q(6))*v(4)-(-\sin(q(7))*\sin(q(5))*v(1)+\sin(q(7))*\cos(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*\sin(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6)))* \\
& (1/2*l_2+q(9))*m_2*v(7)-(1/2*l_2+q(9))*m_2*\cos(q(7))*(v(1)*\cos(q(5))+v(2)*\sin(q(5))+\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))* \\
& (v(8)+v(10))))*v(5)+(-\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(1)+\cos(q(7))*\cos(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*\cos(q(7))*(-\cos(q(4))*\sin(q(5))+\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(6)))*m_2*v(9)- \\
& g*m_2*\sin(\alpha)*\sin(q(5))*(1/2*l_2+q(9))*\cos(q(7));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(6)= & 1/24*(24*(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*(\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))- \\
& \cos(q(7))*\sin(q(6)))*v(7)+24*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))* \\
& (1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*\cos(q(7))*\cos(q(6))*v(5)+24*(q(8)+q(10)+11)*m_2*(-\sin(q(6))*\sin(q(7))- \\
& \cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6)))*v(9)-24*(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))* \\
& ((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\cos(q(6))*v(6)-((m_1+m_2)*q(8)^2+(2*q(10)*m_2+11*(m_1+2*m_2))*q(8)+q(10)^2*m_2+2*q(10)*11*m_2+1/3*11^2*(m_1+3*m_2))*\cos(q(6))*v(4)^2*\sin(q(6))-(-\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*v(7)+(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(5)+\cos(q(7))*m_2*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))* \\
& (q(8)+q(10)+11)*v(9)-(v(1)*\sin(q(4))-v(2)*\cos(q(4)))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(6))*v(4)-(v(8)+v(10))*(-\cos(q(6))*\cos(q(7))-\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*(1/2*l_2+q(9))*m_2*v(7)+(1/2*l_2+q(9))*m_2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))* \\
& (v(8)+v(10))*v(5)+(v(8)+v(10))*(\cos(q(6))*\sin(q(7))-\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*m_2*v(9)-((m_1+m_2)*v(8)+v(10)*m_2)*\cos(q(4))*\sin(q(6))*v(1)-((m_1+m_2)*v(8)+v(10)*m_2)*\sin(q(4))*\sin(q(6))*v(2)+g*(-\sin(\alpha)*\cos(q(4))*((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\sin(q(6)))-((m_1+m_2)*q(8)+q(10)*m_2+1/2*11*(m_1+2*m_2))*\cos(\alpha)*\cos(q(6)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(7)= & 1/24*(24*(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*(-\cos(q(6))*\sin(q(7))+\cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)-24*(\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))* \\
& (1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*\sin(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+24*(q(8)+q(10)+11)*m_2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9))*v(6)+(-\cos(q(4))*\sin(q(5))-\cos(q(5))*\sin(q(4)))*\cos(q(7))*(1/2*l_2+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m_2*v(7)-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/2*12+q(9))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4)) \\
& *\sin(q(5)))*v(5)-\sin(q(7))*m2*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*v(9))*\cos(q(6))*v(4)- \\
& (\cos(q(7))*\cos(q(5))*v(1)+\cos(q(7))*\sin(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*(\cos(q(7)) \\
& *(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\sin(q(6))*\sin(q(7))))*(\\
& 1/2*12+q(9))*m2*v(7)- \\
& m2*\cos(q(7))*(q(9)^2+q(9)*12+1/3*12^2)*v(5)^2*\sin(q(7))+(1/2*12+q(9))* \\
& m2*\sin(q(7))*(\sin(q(5))*v(1)-\cos(q(5))*v(2)+\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(v(8)+v(10)))*v(5)+(-\sin(q(7))*\cos(q(5))*v(1)- \\
& \sin(q(7))*\sin(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*(- \\
& \sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))+\cos(q(7))*\sin \\
& (q(6))))*m2*v(9)+g*(-m2*\sin(\alpha)*\cos(q(5))*(1/2*12+q(9))*\sin(q(7))- \\
& (1/2*12+q(9))*m2*\cos(\alpha)*\cos(q(7)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(8)= & 1/24*(2*(12*m1+12*m2)*q(8)+24*q(10)*m2+12*11*(m1+2*m2))*v(6)^2+ \\
& 1/24*(24*(1/2*12+q(9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q \\
& (4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)+24*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(1/2*12+q(9))*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5)+24*m2*(c \\
& \cos(q(6))*\sin(q(7))- \\
& \cos(q(7))*\sin(q(6))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(9)- \\
& 24*(v(1)*\cos(q(4))+v(2)*\sin(q(4)))*(m1+m2)*\sin(q(6))*v(6)+1/2*(2*(m1+ \\
& m2)*q(8)+2*q(10)*m2+11*(m1+2*m2))*\cos(q(6))^2*v(4)^2+(- \\
& (\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(1/2*12+q(9))*m2*v(7)+(1/2*12+q(9))*m2*c \\
& \cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(5)+\cos(q(7))*m2*(\cos \\
& (q(4))*\sin(q(5))- \cos(q(5))*\sin(q(4)))*v(9)-(v(1)*\sin(q(4))- \\
& v(2)*\cos(q(4)))*(m1+m2))*\cos(q(6))*v(4)+g*(\sin(\alpha)*\cos(q(4))*(m1+m \\
& 2)*\cos(q(6))-(m1+m2)*\cos(\alpha)*\sin(q(6)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(9)= & 1/24*(24*(q(8)+q(10)+11)*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\co \\
& s(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5))))*v(7)+24*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(q(8)+q(10)+11)*m2*\cos(q(7))*\sin(q(6))*v(5))*v(6)+(- \\
& (\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*\sin(q(7))*(q(8)+q(10)+11)*m2*v(7)+(q(8)+q(10)+11)*m \\
& 2*\cos(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*v(5))*\cos(q(6))*v(4)+ \\
& 1/2*m2*(2*q(9)+12)*v(7)^2- \\
& (\sin(q(7))*\cos(q(5))*v(1)+\sin(q(7))*\sin(q(5))*v(2)+(v(8)+v(10))*(\sin(q(7))* \\
& (\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q(4))*\sin(q(5)))*\cos(q(6))- \\
& \cos(q(7))*\sin(q(6))))*m2*v(7)+1/2*m2*\cos(q(7))^2*(2*q(9)+12)*v(5)^2- \\
& m2*\cos(q(7))*(\sin(q(5))*v(1)- \\
& \cos(q(5))*v(2)+\cos(q(6))*(\cos(q(4))*\sin(q(5))- \\
& \cos(q(5))*\sin(q(4)))*(v(8)+v(10)))*v(5)+g*(m2*\sin(\alpha)*\cos(q(5))*\cos(q \\
& (7))-m2*\cos(\alpha)*\sin(q(7)));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(10)= & 1/24*(24*m2*q(8)+24*q(10)*m2+24*11*m2)*v(6)^2+1/24*(24*(1/2*12+q \\
& (9))*m2*(\cos(q(6))*\cos(q(7))+\sin(q(6))*\sin(q(7))*(\cos(q(4))*\cos(q(5))+\sin(q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4)) * \sin(q(5))) * v(7) + 24 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * (1/2 * l_2 + q(9)) * m^2 * \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * v(5) + 24 * m^2 * (\cos(q(6)) * \sin(q(7)) - \\
& \cos(q(7)) * \sin(q(6)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5)))) * v(9) - \\
& 24 * (v(1) * \cos(q(4)) + v(2) * \sin(q(4))) * m^2 * \sin(q(6)) * v(6) + 1/2 * (2 * m^2 * q(8) + 2 \\
& * q(10) * m^2 + 2 * l_1 * m^2) * \cos(q(6)) ^ 2 * v(4) ^ 2 + (- (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \\
& \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * \sin(q(7)) * (1/2 * l_2 + q(9)) * m^2 * v(7) + (1/2 * l_2 + q(9)) * m^2 * \cos(q(7)) * (\cos(q(4)) * \cos(q(5)) + \sin(q(4)) * \sin(q(5))) * v(5) + \cos(q(7)) * m^2 * (\cos(q(4)) * \sin(q(5)) - \cos(q(5)) * \sin(q(4))) * v(9) - (v(1) * \sin(q(4)) - v(2) * \cos(q(4))) * m^2 * \cos(q(6)) * v(4) + g * (\sin(\alpha) * \cos(q(4)) * m^2 * \cos(q(6)) - m^2 * \cos(\alpha) * \sin(q(6)))));
\end{aligned}$$

$$Hc(1,1)=0;$$

$$Hc(1,2)=0;$$

$$Hc(1,3)=0;$$

$$Hc(1,4)=0;$$

$$Hc(1,5)=0;$$

$$Hc(1,6)=0;$$

$$Hc(1,7)=0;$$

$$Hc(1,8)=2 * q(8);$$

$$Hc(1,9)=2 * q(9);$$

$$Hc(1,10)=2 * q(10);$$

$$Hc(2,1)=0;$$

$$Hc(2,2)=0;$$

$$Hc(2,3)=0;$$

$$Hc(2,4)=0;$$

$$Hc(2,5)=0;$$

$$Hc(2,6)=2 * q(6) - 2/3 * \pi;$$

$$Hc(2,7)=2 * q(7) - 4/3 * \pi;$$

$$Hc(2,8)=0;$$

$$Hc(2,9)=0;$$

$$Hc(2,10)=0;$$

$$Hc(3,1)=-A * k * \cos(k * q(1));$$

$$Hc(3,2)=1;$$

$$Hc(3,3)=0;$$

$$Hc(3,4)=0;$$

$$Hc(3,5)=0;$$

$$Hc(3,6)=0;$$

$$Hc(3,7)=0;$$

$$Hc(3,8)=0;$$

$$Hc(3,9)=0;$$

$$Hc(3,10)=0;$$

$$Hhol(1,2)=1;$$

$$Hhol(1,1)=-\tan(q(3));$$

$$Hhol(1,3)=0;$$

$$Hhol(1,4)=0;$$

$$Hhol(1,5)=0;$$

$$Hhol(1,6)=0;Hhol(1,7)=0;Hhol(1,8)=0;Hhol(1,9)=0;Hhol(1,10)=0;$$

$$Hc1=[Hc;Hhol];$$

$$Ht=[H,Hc1';Hc1,zeros(4)];$$

$$Lcon(1,1)=0;Lcon(1,2)=0;Lcon(1,3)=0;Lcon(1,4)=0;Lcon(1,5)=0;Lcon(1,6)=0;Lcon(1,7)=0;Lcon(1,8)=2*v(8);Lcon(1,9)=2*v(9);Lcon(1,10)=2*v(10);$$

$$Lcon(2,1)=0;Lcon(2,2)=0;Lcon(2,3)=0;Lcon(2,4)=0;Lcon(2,5)=0;Lcon(2,6)=2*v(6);Lcon(2,7)=2*v(7);Lcon(2,8)=0;Lcon(2,9)=0;Lcon(2,10)=0;$$

$$Lcon(3,1)=A*k^2*v(1)*\sin(k*q(1));Lcon(3,2)=0;Lcon(3,3)=0;Lcon(3,4)=0;Lcon(3,5)=0;Lcon(3,6)=0;Lcon(3,7)=0;Lcon(3,8)=0;Lcon(3,9)=0;Lcon(3,10)=0;$$

$$Lcon(4,1)=-0.5*v(3)/\cos(q(3))^2;Lcon(4,2)=0;Lcon(4,3)=-0.5*v(1)/\cos(q(3))^2;Lcon(4,4)=0;Lcon(4,5)=0;Lcon(4,6)=0;Lcon(4,7)=0;Lcon(4,8)=0;Lcon(4,9)=0;Lcon(4,10)=0;$$

$$Lt=[L;Lcon];$$

$$f(1)=q(8)^2+q(9)^2+q(10)^2-a0^2;$$

$$f(2)=(q(6)-\pi/3)^2+(q(7)-2*\pi/3)^2-\delta^2;$$

$$f(3)=q(2)-A*\sin(k*q(1));$$

$$f(4)=v(2)-v(1)*\tan(q(3));$$

$$Ft=[F';Stab*f'];$$

```
a=inv(Ht)*(Ft-Lt*v);
```

```
at(1)=a(1);at(2)=a(2);at(3)=a(3);at(4)=a(4);at(5)=a(5);at(6)=a(6);at(7)=a(7);at(8)=a(8);at(9)=a(9);at(10)=a(10);
```

```
q=q+v*h;
```

```
v=v+at'*h;
```

```
sqrt((f*f')^2)
```

```
x(i)=q(1);
```

```
y(i)=q(2);
```

```
fi0(i)=q(3);
```

```
t(i+1)=t(i)+h;
```

```
fte(i)=tan(fi0(i))-A*k*cos(k*x(i));
```

```
end
```

```
t(N+1)=[];
```