

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу

АЛМОХАММАД ХАЛИЛЬ

**“ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
БЕССЕЛЯ-РИССА”**,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация посвящена изучению интегральных свойств обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. Рассмотрены более общие ядра потенциалов и базовые пространства для потенциалов, чем в классических потенциалах Бесселя и Рисса. Так, допускаются нестепенные сингулярности ядер в начале координат и общие весовые пространства Лоренца $L^p(v)$ в качестве базовых пространств для потенциалов. Полученные в результате пространства потенциалов можно трактовать как пространства обобщенной гладкости.

Тема диссертации актуальна, она связана с современными исследованиями по теории функциональных пространств и ее приложений, проводимыми в нашей стране и за рубежом. В связи с этим исследования таких известных специалистов как О. В. Бесов, В. И. Буренков, В. П. Ильин, С. М. Никольский, И. А. Киприянов, П. И. Лизоркин и др. в нашей стране, А. Гогатишвили, Джим Килле Сун, Р. Керман, В. Опиц, Л.-Е. Перссон, Л. Пик, Г. Трибель и др. за рубежом. Представленная диссертация находится в русле исследований М. Л. Гольдмана и его учеников.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии, содержащей ссылки на 72 работы. Общий объем диссертации составляет 101 стр. Во введении приведены необходимые определения, дан краткий обзор известных результатов, обоснована актуальность темы диссертации и сформулированы ее основные результаты.

В Главе 1 диссертации установлены критерии вложений потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и приведены явные описания оптимальных (т.е., минимальных) перестановочно инвариантных пространств, в которые вложены потенциалы. Одним из центральных результатов Главы 1 является теорема 1.4.3 в которой доказано, что при $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ в случае базовых весовых пространств Лоренца $L^p(u)$ для потенциалов оптимальные перестановочно инвариантные пространства, в которые вложены пространства потенциалов, совпадают с весовыми пространствами Лоренца $\Gamma^p(w)$, в которых весовые функции w явно вычисляются через веса u и через функции, описывающие свойства ядер потенциалов. Автор опирается при этом на общие конструкции для убывающих перестановок потенциалов типа Бесселя-Рисса с базовыми перестановочно инвариантными пространствами, развитые в работах М. Л. Гольдмана. Отметим, что конкретизация этих общих построений для случая базовых весовых пространств Лоренца с общими весами требует преодоления значительных аналитических трудностей. Большую роль при этом играет применение результатов А. Гогатишвили, Л.-Е. Перссона и др. о критериях вложений весовых пространств Лоренца вида $L^p(u)$ и $\Gamma^p(u)$ с общими весами. Результат упомянутой теоремы имеет вид некоторой двойственности между пространствами Лоренца $L^p(u)$ и $\Gamma^p(w)$. На мой взгляд, имело бы

смысл рассмотреть подобную задачу в случае, когда исходным базовым пространством является пространство Лоренца $\Gamma^p(u)$.

В Главах 2 и 3 исследованы свойства интегральных операторов типа Харди–Копсона, возникающих при изучении интегральных свойств потенциалов. В связи с использованием в вопросах вложения потенциалов конусов их убывающих перестановок, важную роль играют оценки таких интегральных операторов на конусах всех неотрицательных, а также неотрицательных монотонно убывающих функций из весовых пространств Орлича.

В Главе 2 для операторов типа Харди–Копсона получены критерии справедливости модулярных неравенств при действии операторов из одного весового пространства Орлича в другое. Они существенно упрощают ответы, полученные в случае более общих интегральных операторов, в работах Джим Килле Суна и др.

Третья глава посвящена исследованию свойств операторов типа Харди–Копсона на конусах положительных убывающих функций из весового пространства Орлича. Эти свойства играют важную роль при рассмотрении конусов убывающих перестановок для потенциалов. Автор конкретизирует развитый в работах Э. Г. Бахтигареевой и М. Л. Гольдмана общий подход, связанный с модификацией интегральных операторов при изучении взаимосвязи их свойств на любых неотрицательных функциях из пространств Орлича и на конусе убывающих неотрицательных функций из этих пространств. Это позволило получить критерии справедливости модулярных неравенств для операторов типа Харди–Копсона на конусах в весовых пространствах Орлича в явной компактной форме.

Все результаты диссертации обоснованы доказательствами и представляют собой новые достоверные факты теории потенциалов в функциональных пространствах.

Научная ценность результатов диссертации Алмохаммад Халиль состоит в том, что в диссертации получены существенные новые результаты об интегральных свойствах обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса и о модулярных неравенствах для операторов Харди–Копсона, играющих важную роль при изучении интегральных свойств потенциалов. Таким образом, диссертация вносит существенный вклад в теорию операторов в функциональных пространствах.

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из которых 5 — статьи в журналах из списка ВАК, остальные — в сборниках трудов российских и международных научных конференций.

Автореферат правильно отражает основные положения диссертации.

Имеется ряд замечаний редакционного характера. На стр.11 определяется множество $X(\rho)$ — банахово функциональное пространство, порожденное функциональной нормой ρ , а на стр.13 появляется обозначение $X(\mathbb{R}^n)$, которое не объясняется. Не все работы других авторов, включенные в список литературы, упоминаются в тексте диссертации, так что неясна их связь с результатами диссертации. Работы [20] и [46] в списке литературы дублируют друг друга. Эти замечания носят редакционный характер и не снижают положительной оценки научного уровня диссертации.

Считаю, что диссертация Алмохаммада Халиля “Интегральные свойства обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса” является законченной научно-квалификационной работой, в которой получено новое решение научной задачи об интегральных свойствах обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса, имеющей важное значение в теории интегральных операторов в функциональных пространствах. Работа удовлетворяет требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-

математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Российский университет дружбы народов", утвержденного Ученым советом РУДН протокол №12 от 23.09.2019 г., а ее автор Алмохаммад Халиль заслуживает присуждения ученой степени кандидата наук по специальности 1.1.1.

Официальный оппонент: Осипенко Константин Юрьевич, доктор физико-математических наук (01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ), профессор.

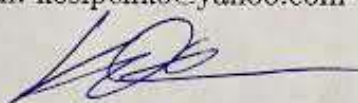
Место работы: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова", Москва 119991, Ленинские горы, д.1, механико-математический факультет, кафедра общих проблем управления.

Должность: профессор.

Домашний адрес, телефон и e-mail: Москва 119618, Боровское ш., д.2А, корп.1, кв.179, тел. +7-916-159-33-94, e-mail: kosipenko@yahoo.com

К. Ю. Осипенко

05.10.2022



Подпись К. Ю. Осипенко удостоверяю.

Декана механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор



А. И. Шафаревич