На правах рукописи
УДК 517.929

Иванов Никита Олегович

РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2023

Работа выполнена в Математическом институте имени С. М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Научный руководитель: Скубачевский Александр Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Математического института имени С.М. Никольского Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы

Официальные оппоненты: Демиденко Геннадий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН

Раутиан Надежда Александровна, д.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Ведущая организация Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"

Защита диссертации состоится 19.12.2023 в 17:00 на заседании диссертационного совета ПДС 0200.005 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы (адрес: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3).

С диссертацией можно ознакомиться в Учебно-научном информационном библиотечном центре (Научной библиотеке Российского университета дружбы народов) по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6 и на сайте РУДН в сети интернет (https://www.rudn.ru/science/dissovet).

Автореферат разослан _ ноября 2023 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук А.Ю. Савин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В настоящей работе изучаются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений второго порядка на интервале конечной длины. В уравнениях подобного типа присутствуют не только дифференциальные операторы, но и операторы сдвига, которые могут отображать точки границы интервала внутрь этого интервала.

Современной теории функционально-дифференциальных уравнений, которая началась с работ А. Д. Мышкиса[1,2], посвящен целый ряд трудов, среди которых широко известны работы Л. Э. Эльсгольца[3], Н. Н. Красовского[4], Ю. С. Осипова[5], Р. Беллмана и К. Кука[6], Л. Э. Эльсгольца и С. Б. Норкина[7], Г. А. Каменского и А. Д. Мышкиса[8], А. Г. Каменского[9], Дж. Хейла[10], Г. А. Каменского, А. Д. Мышкиса и А. Л. Скубачевского[11], А. Л. Скубачевского[12] и др. Интерес к таким уравнениям связан со многими важными приложениями: в теории систем управления с последействием[5,4,13,14,15], в теории многослойных пластин и оболочек[16,12], в теории диффузионных процессов[17,12] и др.

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах Ф. Хартмана и Г. Стампакья[18], А. Б. Антоневича[19], В. С. Рабиновича[20] и др.

А. Л. Скубачевским созданы основы общей теории краевых задач для эллиптических

[1] Мышкис А. Д., Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *УМН*, **4**(5): 99–141 (1949).

[2] Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Гостехиздат. М.–Л., 1951.

[3] Эльсгольц Л. Э., Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // *УМН*, **9**(4): 95–112 (1954).

[4] Красовский Н. Н., О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени // *Докл. АН СССР*, **114**(2): 252–255 (1957).

[5] Осипов Ю. С., О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // *Дифференц. уравнения*, **1**(5): 605–618 (1965).

[6] Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.

[7] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971.

[8] Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших члена // *Дифференц. уравнения*, **10**: 409–418 (1974).

[9] Каменский А. Г., Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // *Дифференц. уравнения*, **12**(5): 815–824 (1976).

[10] Хейл Дж., *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[11] Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л., О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // *Укр. матем. журнал*, **37**(5): 581–585 (1985).

[12] Skubachevskii A. L., *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser: Basel–Boston–Berlin, 1997.

[13] Красовский Н. Н., *Теория управления движением. Линейные системы.*, Наука, М., 1968.

[14] Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С., О позиционном моделировании в динамических системах // *Прикл. мат. мех.*, **47** (6): 883–890 (1983).

[15] Скубачевский А. Л., К задаче об успокоении системы управления с последействием // *Докл. АН*, **335** (2): 157–160 (1994).

[16] Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л., Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // *Прикл. мех.*, **15** (5): 39—47 (1979).

[17] Скубачевский А. Л., О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // *Докл. АН СССР*, **307** (2): 287—292 (1989).

[18] Hartman F., Stampacchia G., On some nonlinear elliptic differential-functional equations // *Acta Math.*, **115**: 271—310 (1966).

[19] Антоневич А. Б., Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе // *Дифференц. уравнения*, **8** (2): 309–317 (1972).

[20] Рабинович В. С., О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве // *Докл. АН СССР*, **243** (5): 1134–1137 (1978).

функционально-диффереціальных уравнений[21,12,22]. Было показано, что краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений могут обладать принципиально новыми свойствами в отличие от эллиптических дифференциальных уравнений. К примеру, при наличии сдвигов аргументов в старших производных, отображающих точки границы внутрь области, возникают негладкие решения даже для случая бесконечно дифференцируемой правой части. Однако, гладкость таких решений может сохраняться в подобластях.

Ученики А. Л. Скубачевского продолжили исследование краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Так, краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучались в работах[23,24,25,26,27], краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов рассматривались в работах[28,29], а для дифференциально-разностных уравнений с вырождением в[30]; краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиям аргументов и растяжениями-сжатиями изучались в работах[31,32]. Кроме того, вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения исследовалась в работе[33], а смешанные задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений второго порядка со сдвигами по пространственным переменным в старших производных рассматривались в работах[34,35,36].

В работе[37] исследовались эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с

---

[21] Skubachevskii A. L., The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // *J. Differential Equations*, **63** (3): 332—361 (1986).

[22] Скубачевский А. Л., Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // *УМН*, **71** (5): 3—112 (2016).

[23] Цветков Е. Л., Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // *Матем. заметки*, **51** (1): 107—114 (1992).

[24] Цветков Е. Л., О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения // *Укр. мат. ж.*, **45** (8): 1140–1150 (1993).

[25] Неверова Д. А., Скубачевский А. Л., О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // *Матем. заметки*, **94** (5): 702—719 (2013).

[26] Neverova D. A., Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations // *Funct. Differ. Equat.*, **21**: 47—65 (2014).

[27] Неверова Д. А., Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **66** (2): 272—291 (2020).

[28] Иванова Е. П., О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **62**: 85—99 (2016).

[29] Иванова Е. П., О гладких решениях дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // *Матем. заметки*, **105** (1): 145—148 (2019).

[30] Попов В. А., Скубачевский А. Л., Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **36**: 125—142 (2010).

[31] Россовский Л. Е., Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **54**: 3—138 (2014).

[32] Россовский Л. Е., Тасевич А. Л., Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах // *Дифференц. уравнения*, **53** (12): 1679—1692 (2017).

[33] Селицкий А. М., Скубачевский А. Л., Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **26**: 324–347 (2007).

[34] Лийко В. В., Скубачевский А. Л., Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **65** (4): 635—654 (2019).

[35] Лийко В. В., Скубачевский А. Л., Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре // *Матем. заметки*, **107** (5): 693—716 (2020).

[36] Liiko V. V., Mixed boundary value problem for strongly elliptic differential difference equations in a bounded domain // *Russian J. Math. Phys*, **28** (2): 270—274 (2021).

[37] Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu., *Elliptic theory and noncommutative geometry. Nonlocal elliptic operators*, Birkhäuser: Basel–Boston–Berlin, 2008.

преобразованиями переменных, отображающими область в себя. Статьи[38,39] посвящены краевым задачам для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в полупространстве. Нелинейные эллиптические функционально-дифференциальные уравнения изучались в работах[40,41].

В диссертации основное место уделяется исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на конечном интервале.

Обобщенные решения первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале $Q = (0, d)$ впервые рассматривались в работах[8,9]. В работах[11,12] рассматривалась первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами на конечном интервале. Используя теорему об изоморфизме пространства Соболева $\mathring{W}_2^1(Q)$ и подпространства $W_2^1(Q)$, состоящего из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям, исходная краевая задача для дифференциально-разностного уравнения была сведена к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Такой подход позволил в явном виде получить условия ортогональности правой части уравнения конечному числу линейно независимых функций в $L_2(Q)$, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале. Гладкость обобщенных решений на всем интервале конечной длины в случае первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами ранее не рассматривалась.

В работах[25,26] для первой и второй краевых задач исследован вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения гладкость обобщенных решений сохраняется на всем интервале для любой правой части. Обобщенные решения третьей краевой задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах[23,24].

Вопрос о нахождении условий на правую часть уравнения, обеспечивающих гладкость обобщенных решений второй краевой задачи и краевой задачи со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения на конечном интервале ранее не изучался.

Цели и задачи

Цель работы заключается в исследовании обобщенных решений первой и второй краевых задач, а также краевой задачи со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на интервале конечной длины. Одним из принципиальных свойств краевых задач для дифференциально-разностных уравнений является наличие негладких решений. Гладкость обобщенных решений таких задач может нарушаться на сдвигах концов интервала внутрь интервала даже при условии бесконечно дифференцируемой правой части дифференциально-разностного уравнения и сохраняться лишь на подынтервалах, образующихся выбрасыванием орбит концов рассматриваемого интервала, порожденных группой целочисленных сдвигов. Для указан-

[38] Муравник А. Б., Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // *Матем. заметки*, **105** (5): 747—762 (2019).

[39] Муравник А. Б., Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // *Матем. заметки*, **108** (5): 764—770 (2020).

[40] Солонуха О. В., Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57** (3): 417–428 (2017).

[41] Солонуха О. В., Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **60** (12): 2085–2097 (2020).

ных задач исследуются условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, гарантирующие гладкость обобщенных решений на всем интервале конечной длины.

Научная новизна

В работе получены новые результаты о гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами, рассматриваемых на конечном интервале.

Для первой и второй краевых задач, а также краевой задачи со смешанными граничными условиями получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенных решений на всем интервале.

Теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер, а ее результаты оказывают влияние на развитие общей теории нелокальных краевых задач, а также могут быть использованы для анализа результатов численного моделирования решений подобных задач.

Методология и методы исследования

Изучение краевых задач для дифференциально-разностных уравнений основано на комбинации методов исследования дифференциальных уравнений, свойствах разностных операторов и теории пространств Соболева.

Для исследования гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами был разработан метод сведения дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами и однородными условиями Дирихле к обыкновенному дифференциальному уравнению с многоточечными краевыми условиями[11,12]. Однако, указанный подход невозможен в случае дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами, так как разностный оператор с переменными коэффициентами и однородными условиями Дирихле не коммутирует с оператором дифференцирования первого порядка.

Для преодоления подобных трудностей при изучении краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами был разработан более универсальный подход, основанный на представлении первых производных решения на концах интервала Q в виде линейных ограниченных функционалов в пространстве Лебега $L_2(Q)$, зависящих от правых частей дифференциально-разностного уравнения.

Впервые данный подход был разработан в работах[42,43] при исследовании гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами. Необходимость использования данного подхода была обусловлена невозможностью сведения дифференциально-разностного уравнения с условиями второго рода к обыкновенному дифференциальному уравнению с нелокальными условиями[34,35].

[42] Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // *Соврем. мат. Фундам. направл.*, **67** (3): 576–595 (2021).

[43] Скубачевский А. Л., Иванов Н. О., Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины // *Матем. заметки*, **111** (6): 873–886 (2022).

Положения, выносимые на защиту

1) Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами.
2) Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами.
3) Доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами со смешанными граничными условиями.

Степень достоверности и апробация результатов

Степень достоверности полученных в диссертации результатов обеспечивается строгостью доказательств, имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются в международных базах данных, а также выступлениями на семинарах, конференциях и школах.

Результаты, представленные в диссертационной работе, были доложены на следующих международных конференциях:

- XXVII Международная конференция “Математика. Экономика. Образование”. XI Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”, Новороссийск, 27 мая – 3 июня 2021.
- Международная конференция “XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам” (КРОМШ), Алушта, 17–26 сентября 2021.
- Международная конференция “The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations” (DFDE), Москва, 28 июня – 5 июля 2022.
- Международная школа-семинар “The 7th International Conference “Nonlinear Analysis and Extremal Problems” (NLA), Иркутск, 15–22 июля 2022.
- Международная конференция “Уфимская осенняя математическая школа” (УОМШ), Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022.
- Международная конференция “Понтрягинские чтения — XXXIV” в рамках Международной Воронежской весенней математической школы “Современные методы теории краевых задач” (ВВМШ), Воронеж, 3–9 мая 2023.

Результаты диссертационной работы докладывались на следущих научных семинарах:

- Научный семинар Математического института им. С.М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям, рук. А. Л. Скубачевский, 24.05.2022, 31.05.2022.
- Научный семинар “Кинетические и нелинейные уравнения математической физики” Математического института им. С.М. Никольского РУДН им. П. Лумумбы, рук. С. Б. Куксин, А. Л. Пятницкий, А. Л. Скубачевский, 28.10.2023
- Научный семинар кафедры теории динамических систем МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. О. Н. Агеев, Е. А. Асташов, И. А. Богаевский, А. А. Давыдов, М. Е. Липатов, 02.10.2023.
- Научный семинар “Избранные вопросы математического анализа” Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, рук. Г. В. Демиденко, 09.10.2023.

- Научный семинар “Функционально-дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения и их приложения” МГУ им. М.В. Ломоносова, рук. А. С. Шамаев, Н. А. Раутиан, 16.10.2023.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 11 работах, из них 5 статей в научных журналах, индексируемых в международных базах данных и 6 — в тезисах докладов на международных конференциях. Их список приведён в конце автореферата. Результаты совместных работ, включённые в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 113 страниц, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 76 наименований.

Основное содержание работы

Глава 1 состоит из 6 параграфов и посвящена исследованию разрешимости первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале, а также исследованию гладкости обобщенных решений такой задачи.

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер, а определения и обозначения, содержащиеся в нем, используются во всей диссертационной работе. В данном параграфе приводятся результаты, посвященные разностным операторам на конечном интервале $Q = (0, d)$, где $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$. Вводится разбиение интервала на подынтервалы, образующиеся выбрасыванием орбит концов рассматриваемого интервала, порожденных группой целочисленных сдвигов разностного оператора. Приводятся свойства разностных операторов в $L_2(Q)$ и в пространствах Соболева, которые необходимы для формулировки результатов о разрешимости и гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений.

Рассмотрим уравнение.

$$-\left(R_Q u'\right)' = f(x), \qquad x \in Q, \tag{1}$$

где $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция. Оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ задан формулой

$$R_Q = P_Q R I_Q,$$

где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ – оператор продолжения нулем функций из $L_2(Q)$ в $\mathbb{R} \setminus Q$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ – оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R})$ на Q, а оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ определен по формуле

$$(Ru)(x) = \sum_{j=-N}^{N} a_j(x) u(x + j),$$

где $a_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – комплекснозначные функции.

Если $\theta = 1$, то мы исследуем один класс непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k-1, k)$, $k = 1, ..., N + 1$, если же $0 < \theta < 1$, то мы рассматриваем два класса непересекающихся подынтервалов $Q_{1k} = (k - 1, k - 1 + \theta)$, $k = 1, ..., N + 1$, и $Q_{2k} = (k - 1 + \theta, k)$, $k = 1, ..., N$.

Введем ассоциированные с разностным оператором матрицы $R_s = R_s(x)$ ($s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$) с элементами $r^s_{ij}(x) = a_{j-i}(x + i - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, ..., N(s)$, где

$N(1) = N+1$, $N(2) = N$. Через $G^1_j = G^1_j(x)$ $(G^2_j = G^2_j(x))$, $j = 1, ..., N+1$, обозначим j-ые столбцы матрицы порядка $N \times (N+1)$, полученной из матрицы R_1 вычеркиванием первой (последней) строки.

Будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, т. е. справедливо неравенство

$$Re(R_s Y, Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geqslant c\|Y\|^2_{\mathbb{C}^{N(s)}} \tag{2}$$

для всех $x \in \overline{Q}_{s1}$, s и $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$, где $s = 1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, если $0 < \theta < 1$; $c > 0$ не зависит от x и Y. Данное условие используется во всех основных результатах о разрешимости и гладкости обобщенных решений краевых задач, приведенных в диссертационной работе.

Параграф 1.2 посвящен изложению некоторых определений и результатов из вариационной теории краевых задач, необходимых в исследовании разрешимости краевых задач для дифференциально-разностного уравнения.

В **параграфе 1.3** формулируется первая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения, и исследуется ее разрешимость. А именно, рассматривается задача

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q, \tag{3}$$

$$u(0) = u(d) = 0, \tag{4}$$

где $Q = (0, d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

Введем пространство $\mathring{W}^1_2(Q) = \{u \in W^1_2(Q) : u(0) = u(d) = 0\}$ и сформулируем определение обобщенного решения задачи (3), (4).

Определение 1.3.2. Функция $u \in \mathring{W}^1_2(Q)$ является обобщенным решением задачи (3), (4), если для всех $v \in \mathring{W}^1_2(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u', v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}.$$

Определим на $\mathring{W}^1_2(Q)$ полуторалинейную форму $b_R(u, v)$ по формуле

$$b_R(u, v) = (R_Q u', v')_{L_2(Q)}.$$

Из (2) следует секториальность формы $b_R(u, v)$, что позволило доказать следующую теорему.

Теорема 1.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (2)*. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_2(Q)$ задачи* (3), (4)*, при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q)},$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от f.

В **параграфе 1.4** доказана **Теорема 1.4.1.** о гладкости обобщенных решений задачи (3), (4) на подынтервалах.

Теорема 1.4.1. *Пусть уравнение* (3) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (2)*, и пусть $u \in \mathring{W}^1_2(0, d)$ – обобщенное решение задачи* (3), (4)*. Тогда $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1, ..., N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, $k = 1, ..., N(s)$, если $0 < \theta < 1$, при этом*

$$\|u\|_{W^2_2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ не зависит от f.

Параграфы 1.5 и **1.6** посвящены исследованию гладкости обобщенных решений задачи (3), (4) на всем интервале Q.

Введем ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения $D(A_R^0) = \{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), u(0) = u(d) = 0\}$, действующий по формуле

$$A_R^0 u = -(R_Q u')', \qquad u \in D(A_R^0).$$

Предположим, что в случае $\theta = 1$

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{5}$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(1) \neq 0$. При выполнении условия (5) доказана **Теорема 1.5.1.** о гладкости обобщенного решения задачи (3), (4) на конечном интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\theta = 1$, и пусть выполнены условия* (2) *и* (5).

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно независимы, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если столбцы $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ линейно зависимы, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Если же $0 < \theta < 1$, то в предположении, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+\theta-k)| \neq 0, \tag{6}$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, доказана **Теорема 1.6.1.** о гладкости обобщенного решения задачи (3), (4) на конечном интервале $Q = (0,d)$ при $0 < \theta < 1$.

Теорема 1.6.1. *Пусть $0 < \theta < 1$, и пусть выполнены условия* (2) *и* (6).

Если $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Если $G_1^1(0) = 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) = 0$, то ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ фредгольмов и $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Основные результаты первой главы опубликованы в работе [4] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 2 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале, а также гладкости обобщенных решений такой задачи.

Параграф 2.1 посвящен постановке второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения, а также исследованию ее разрешимости.

Рассматривается задача

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q, \tag{7}$$

$$(R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0, \tag{8}$$

где $Q = (0,d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

В пространстве $W_2^1(Q) \times W_2^1(Q)$ вводится полуторалинейная форма $b_R(u,v)$ по формуле

$$b_R(u,v) = (R_Q u', v')_{L_2(Q)},$$

которую можно представить в виде

$$b_R(u,v) = \langle A_R u, v \rangle, \quad u, v \in W_2^1(Q),$$

где $A_R : W_2^1(Q) \to (W_2^1(Q))'$ – линейный ограниченный оператор.

Определение 2.1.2. Функцию $u \in W_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (7), (8), если для всех $v \in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$b_R(u,v) = (f,v)_{L_2(Q)}.$$

Теорема 2.1.1 *Если уравнение* (7) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности* (2), *то вторая краевая задача* (7), (8) *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^d f(x)dx = 0,$$

при этом существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q)$ задачи (7), (8), *удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_0^d u(x)dx = 0.$$

Параграф 2.2 посвящен доказательству теоремы о гладкости обобщенных решений задачи (7), (8) на подынтервалах.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняется условие сильной эллиптичности* (2), *$u \in W_2^1(0,d)$ – решение операторного уравнения $(A_R + \lambda_0 I)u = f$ с $Re\lambda_0 > 0$ и $f \in L_2(0,d)$. Тогда $u \in W_2^2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1, ..., N+1$, если $\theta = 1$, и $s = 1, 2$, $k = 1, ..., N(s)$, если $0 < \theta < 1$. При этом справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ не зависит от f.

В **параграфе 2.3** исследуется гладкость обобщенных решений задачи (7), (8) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$.

Для формулировки основных результатов введем блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+2)\times(2N+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ – матрицы порядка $(N+2)\times(N+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} R_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1(1) \end{pmatrix},$$

при этом 0 обозначает нулевую строку длины $N+1$. Через $\mathbf{R}_1^1$ ($\mathbf{R}_1^2$) обозначим матрицу порядка $(N+2)\times(2N+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}_1^0$ матрицу порядка $(N+2)\times 2N$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Введенные матрицы необходимы для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (7), чтобы обеспечить гладкость обобщенного решения задачи (7), (8) на всем интервале целой длины.

Предположим, что выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{N} \left(|a_k(0)| + |a_{-k}(N+1)|\right) \neq 0. \tag{9}$$

Лемма 2.3.1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (9). *Тогда $rank\boldsymbol{R}_1 = N+2$ и $rank\boldsymbol{R}_1^0 \geqslant N+1$.*

Рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{R}_1^0\Phi^0 = -\varphi_0 H_1 + \psi_{N+1} H_2, \tag{10}$$

где $\Phi^0 := (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T$, $H_1 := (a_0(0), a_{-1}(1), \dots, a_{-N}(N), 0)^T$, $H_2 := (0, a_N(1), \dots, a_1(N), a_0(N+1))^T$.

Лемма 2.3.2. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (9). *Пусть, кроме того,* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, *при этом* $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$. *Тогда система уравнений* (10) *совместна тогда и только тогда, когда справедливо равенство* $\varphi_0 = \alpha_H \psi_{N+1}$, *где* $0 \neq \alpha_H \in \mathbb{C}$.

Предположим также, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{11}$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ и $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, а также, что в случае линейной зависимости столбцов $G_1^1(0)$ и $G_{N+1}^2(1)$ существует такое $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, что

$$G_{N+1}^2(1) = \alpha G_1^1(0).$$

Введем ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{ u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), (R_Q u')(0) = (R_Q u')(d) = 0 \right\},$$

действующий по формуле $A_R^0 u = A_R u$, $u \in D(A_R^0)$.

Теорема 2.3.1 *Пусть выполнены условия* (2) *и* (9), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно независимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$. *Если к тому же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$; *если же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 < max\left\{rank\boldsymbol{R}_1^1, rank\boldsymbol{R}_1^2\right\}$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

Теорема 2.3.2 *Пусть выполнены условия* (2), (9) *и* (11), *а* $\theta = 1$. *Предположим, что столбцы* $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно зависимы. Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$ *и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$, *при этом справедливы следующие утверждения:*

1. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1$ *или* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
2. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$ *и* $\alpha \neq \alpha_H$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.
3. *Если* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = N+1$, $rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+2$ *и* $\alpha = \alpha_H$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

Параграф 2.4 посвящен исследованию гладкости обобщенных решений задачи (7), (8) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $0 < \theta < 1$.

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k(0)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(N+\theta)| \neq 0, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0. \tag{13}$$

Теорема 2.4.1. *Пусть выполнены условия* (2), (12) *и* (13), *а* $0 < \theta < 1$. *Тогда оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $1 \in \mathcal{N}(A_R^0)$, $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 1$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 3$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [1-3] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Глава 3 состоит из 4 параграфов и посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале со смешанными граничными условиями, а также гладкости обобщенных решений такой задачи.

Параграф 3.1 посвящен постановке краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями, а также исследованию ее разрешимости.

Рассмотрим задачу

$$-(R_Q u')' = f(x), \quad x \in Q, \tag{14}$$

$$u(0) = 0, \tag{15}$$

$$(R_Q u')(d) = 0. \tag{16}$$

где $Q = (0, d)$, $d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$, $f \in L_2(Q)$ – комплекснозначная функция.

Введем пространство $W^1_{2,0}(Q) = \{u \in W^1_2(Q) : u(0) = 0\}$.

Определение 3.1.2. Функцию $u \in W^1_{2,0}(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (14)–(16), если для всех $v \in W^1_{2,0}(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u', v')_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}.$$

Теорема 3.1.1. *Пусть выполняется условие* (2). *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in W^1_{2,0}(Q)$ *задачи* (14)–(16), *при этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{W^1_2(Q)} \leqslant c\|f\|_{L_2(Q)},$$

где $c > 0$ *– постоянная, не зависящая от* f.

В **параграфе 3.2** исследуется вопрос о гладкости обобщенного решения задачи (14)–(16) на подынтервалах.

Теорема 3.2.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (2). *Если* $u \in W^1_{2,0}(0, d)$ *– обобщенное решение задачи* (14)–(16), *тогда* $u \in W^2_2(Q_{sk})$, $s = 1$, $k = 1, ..., N+1$, *если* $\theta = 1$, *и* $s = 1, 2$, $k = 1, ..., N(s)$, *если* $0 < \theta < 1$; *при этом*

$$\|u\|_{W^2_2(Q_{sk})} \leqslant c\|f\|_{L_2(0,d)},$$

где $c > 0$ *не зависит от* f.

В **параграфе 3.3** исследуется гладкость обобщенных решений краевой задачи (14)–(16) на всем интервале $Q = (0, d)$ при $\theta = 1$.

Для формулировки основных результатов введем блочную матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $(N+1) \times (2N+2)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \left(\widetilde{R}_1 | \widetilde{R}_2\right),$$

где $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ — матрицы порядка $(N+1) \times (N+1)$, которые имеют вид

$$\widetilde{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-2}(1) & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-3}(2) & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_{-1}(N) & a_0(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{R}_2 = R_1(1).$$

Через $\mathbf{R}^1_1$ ($\mathbf{R}^2_1$) введем матрицу порядка $(N+1) \times (2N+1)$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через $\mathbf{R}^0_1$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого и последнего столбцов.

Лемма 3.3.1. *Пусть выполнено условие сильной эллиптичности* (2). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N$.

Введем ограниченный оператор $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ с областью определения

$$D(A_R^0) = \left\{u \in W_2^2(0,d) : R_Q u' \in W_2^1(0,d), u(0) = (R_Q u')(d) = 0\right\},$$

действующий по формуле

$$A_R^0 u = -(R_Q u')', \qquad u \in D(A_R^0).$$

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N+1-k)| \neq 0, \tag{17}$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(1) \neq 0$. При выполнении условий (17) доказана **Теорема 3.3.1.** о гладкости обобщенного решения задачи (14)–(16) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $\theta = 1$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\theta = 1$, *и пусть выполнены условия* (2) *и* (17).

1. Если столбцы $G_1^1(0)$ *и* $G_{N+1}^2(1)$ *линейно независимы, то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов и* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$. *Если к тому же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N+1$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$; *если же* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, *то* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

2. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ *и при этом* $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2$, *т. е.* $G_1^1(0) \neq 0$ *и* $G_{N+1}^2(1) \neq 0$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

3. Если $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ *и при этом либо* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $G_1^1(0) = 0$ *или* $G_{N+1}^2(1) = 0$, *либо* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$ *и* $G_{N+1}^2(1) = 0$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Если $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$, *а* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

В **параграфе 3.4** излагаются результаты о гладкости обобщенных решений краевой задачи (14)–(16) на всем интервале $Q = (0,d)$ при $0 < \theta < 1$.

Введем матрицу $\mathbf{R}_1$ порядка $N \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix}$$

и матрицу $\mathbf{R}_2$ порядка $(N+1) \times (2N+1)$ вида

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-2}(1+\theta) & a_{-1}(1+\theta) & \dots & a_{N-1}(1+\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_0(N-1+\theta) & a_{-N+1}(N-1+\theta) & \dots & a_1(N-1+\theta) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+\theta) & \dots & a_0(N+\theta) \end{pmatrix}.$$

Через $\mathbf{R}_1^1$ обозначим матрицу порядка $N \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_1$ вычеркиванием первого столбца, а через $\mathbf{R}_2^2$ матрицу порядка $(N+1) \times 2N$, полученную из матрицы $\mathbf{R}_2$ вычеркиванием последнего столбца.

Лемма 3.4.1. *Пусть выполнено условие* (2). *Тогда* $rank\boldsymbol{R}_1 = rank\boldsymbol{R}_1^1 = N+1$ *и* $rank\boldsymbol{R}_1^0 = rank\boldsymbol{R}_1^2 \geqslant N$.

Предположим, что

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} |a_k(N-k+\theta)| \neq 0, \tag{18}$$

т. е. $G_1^1(0) \neq 0$ или $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$. При выполнении условий (18) доказана **Теорема 3.4.1.** о гладкости обобщенного решения задачи (14)–(16) на всем интервале $Q = (0, d)$ при $0 < \theta < 1$.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, *и пусть выполнены условия* (2) *и* (18).

1. Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 2$.

2. Если $G_1^1(0) \neq 0$, $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

3. Если $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ *или* $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = rank\boldsymbol{R}_2 = N+1$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 1$.

4. Если $G_1^1(0) = 0$ *и* $rank\boldsymbol{R}_2^2 = N$, *то оператор* $A_R^0 : W_2^2(0,d) \supset D(A_R^0) \to L_2(0,d)$ *фредгольмов,* $dim\mathcal{N}(A_R^0) = 0$ *и* $codim\mathcal{R}(A_R^0) = 0$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [5] из списка публикаций автора по теме диссертации.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами на интервале конечной длины получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

2. Для второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами на интервале конечной длины исследована разрешимость, а также гладкость обобщенного решения. Получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале конечной длины.

3. Для краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде с переменными коэффициентами со смешанными граничными условиями на интервале конечной длины доказана разрешимость, а также гладкость обобщенного решения на подынтервалах и на всем интервале. Получены условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения такой задачи на всем интервале конечной длины.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и большую признательность научному руководителю Скубачевскому А. Л. за постановку задачи, поддержку и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115)

Работы автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах

1. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2021. — Т. 67, №. 3. — С. 576–595.
2. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.* — 2021. — Т. 500. — С. 74–77.
3. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины // *Матем. заметки* — 2022. — Т. 111, №. 6. — С. 873–886.
4. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Обобщенные решения первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения в дивергентном виде на интервале конечной длины // *Дифференц. уравнения* — 2023. — Т. 59, №. 7. — С. 881–892.
5. Иванов Н. О. Гладкость обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка со смешанными граничными условиями // *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2023. — Т. 69, №. 3. — С. 399–417.

Тезисы конференций

1. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. "Гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа," *Материалы XXVII Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". XI Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения"*, Ростов н/Д, 2021, ISBN 978-5-907361-58-4.
2. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. "Гладкость обобщенных решений 2-й краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа," *Сборник материалов международной конференции КРОМШ- 2021*, Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2021, ISBN 978-5-6046943-4-3.
3. Ivanov N. O. "Smoothness of generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations on an interval of non-integer length," *Девятая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва, Россия, 28 июня – 5 июля 2022 г."*, Москва: РУДН, 2022, ISBN 978-5-209-11108-5.
4. Ivanov N. O. "On generalized solutions of the second boundary value problem for differential-difference equations with variable coefficients," *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022)*, Irkutsk : ISDCT SB RAS, 2022, ISBN 978-5-6041814-2-3.
5. Иванов Н. О., Скубачевский А. Л. "Гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами," *Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022 г.)*, Уфа: РИЦ БашГУ, 2022, ISBN 978-5-7477-5533-8.
6. Иванов Н. О. "Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами," *Материалы международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения — XXXIV"*, Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023, ISBN 978–5-9273-3782-8.

Никита Олегович Иванов

Регулярность решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений на конечном интервале

В диссертационной работе в одномерном случае исследуются первая и вторая краевые задачи, а также краевая задача со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами. Для указанных задач приводятся теоремы о разрешимости, а также о гладкости обобщенных решений на подынтервалах, образованных выбрасыванием орбит концов рассматриваемого интервала, порождаемых группой целочисленных сдвигов разностного оператора. Для исследования гладкости обобщенных решений краевых задач на всем интервале $Q = (0, d)$ ($d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$) осуществляется поиск условий на функцию $f \in L_2(Q)$ в правой части дифференциально-разностного уравнения. При некоторых естественных условиях на коэффициенты дифференциально-разностного уравнения проведен анализ коразмерности подпространства функций $f \in L_2(Q)$. Показано, что обобщенные решения соответствующих краевых задач принадлежат пространству Соболева $W_2^2(Q)$, т. е. обладают соответствующей гладкостью, при условии ортогональности правой части дифференциально-разностного уравнения конечному числу линейно независимых функций в $L_2(Q)$.

Nikita Olegovich Ivanov

Regularity of solutions of boundary value problems for differential-difference equations on a finite interval

The dissertation is devoted to the first and second boundary value problems, as well as the boundary value problem with mixed boundary conditions for differential-difference equations with variable coefficients in the one-dimensional case. There are given the solvability theorems, as well as the theorems of the smoothness of generalized solutions on the subintervals obtained by deleting the orbits of the ends of the interval generated by the group of integer shifts of the difference operator. To study the smoothness of generalized solutions of boundary value problems over the entire interval $Q = (0, d)$ ($d = N + \theta$, $N \in \mathbb{N}$, $0 < \theta \leqslant 1$) we investigate conditions for the function $f \in L_2(Q)$ on the right-hand side of the differential-difference equation. Under some natural conditions on the coefficients of the differential-difference equation, the codimension of the subspace of functions $f \in L_2(Q)$ is analyzed. It is shown that the generalized solutions of the corresponding boundary value problems belong to the Sobolev space $W_2^2(Q)$, i.e. they have the corresponding smoothness, provided that the right-hand side of the differential-difference equation is orthogonal to a finite number of linearly independent functions in $L_2(Q)$.