На правах рукописи

ОЛИВИО АДИЛСОН ПЕДРО

МЕТОД РАСЧЕТА МАНЕВРОВ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ОСНАЩЕННОГО ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

Научная специальность

2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва – 2025

Работа выполнена в инженерной академии ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

Научный руководитель: **Баранов Андрей Анатольевич**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и процессов управления инженерной академии РУДН

Официальные оппоненты: **Старинова Ольга Леонардовна**
доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой динамики полета и систем управления института авиационной и ракетно-космической техники ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Назаров Анатолий Егорович
доктор технических наук, заместитель начальника отдела баллистики и навигации АО «Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина».

Кутоманов Алексей Юрьевич
кандидат технических наук, заместитель начальника Центра управления полетами АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»

Защита диссертации состоится 27.05.2025 в 12:00 на заседании диссертационного совета ПДС 2022.012 по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке РУДН по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Объявление о защите и автореферат диссертации размещены на сайтах http://vak2.ed.gov.ru/ и https://www.rudn.ru/science/dissovet

Автореферат разослан ___.04.2025.

Ученый секретарь диссертационного совета ПДС 2022.012
кандидат технических наук О.Е. Самусенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В настоящее время разработка методов расчета маневров малого космического аппарата (МКА), оснащенного двигателями малой тяги для решения многих исследовательских и прикладных задач, по-прежнему актуальна. Непрекращающийся прогресс космических технологий и повышение исследовательской и практической деятельности в космосе доказывают эту актуальность. С увеличением числа космических миссий (КМ) и усложнением их задач возникает потребность в совершенствовании методов расчета маневров МКА, что способствует их более широкому применению в различных областях.

Типичные примеры задач, требующих разработки более точных и эффективных методов расчета маневров таких КА, включают сближение и стыковку КА, находящихся на околокруговых орбитах, выполнение группового полета нескольких КА, создание заданной конфигурации спутниковых систем, удаление космического мусора, обслуживание КА, а также другие миссии, предполагающие взаимодействие более чем одного КА. Такие задачи решаются с помощью МКА, оснащенных двигателями малой тяги (МТ), применяемых в телекоммуникации, наблюдениях Земли, научных исследованиях и другие. По сравнению с химическими двигателями, двигатели МТ более экономичны, компактны и легки. Однако ограниченные запасы топлива и энергии делают выбор метода расчета маневров критически важным для успешного выполнения КМ.

В связи с тем, что тема исследования "Метод расчета маневров малого космического аппарата, оснащенного двигателями малой тяги" включает в себя значительное количество работ, посвященных теоретическим основам и практическим методам управления движением КА, в литературе широко представлены различные аспекты динамики полета, управления орбитальными маневрами и оптимизации траекторий. В частности, методы решения задач импульсного управления и управления МТ активно исследовались в трудах таких ученых, как R.H. Goddard, W. Hohmann, J.E. Prussing, J.P. Marec, T.N. Edelbaum, D.F. Lawden, Л.С. Понтрягин, В.Н. Лебедев, Ю.А. Ермолов и многих других, разработавших основы оптимального управления.

Методы оптимизации траекторий и расчета маневров для КА с двигателями МТ также получили развитие благодаря работам современных исследователей. В особенности, известны численные методы расчета орбитальных переходов, а также аналитические подходы для определения оптимальных траекторий. В последние годы в исследованиях широко применяются методы математического моделирования и компьютерных симуляций, что позволило значительно продвинуться в точности и эффективности расчета траекторий МКА.

Несмотря на достигнутый прогресс, тема данного исследования остается актуальной и требует дальнейшей проработки. В частности, возникают новые вызовы, связанные с усложнением космических миссий, необходимостью учитывать разнообразные возмущения, действующие на МКА, учитывать ограничения на работу двигательной установки (ДУ), также с развитием новых двигательных технологий и систем управления. В связи с этим, задача оптимального планирования маневров, минимизация расхода топлива и повышение точности управления МКА требуют новых подходов и решений, что подчеркивает необходимость дальнейших исследований в данной области.

Таким образом, актуальность настоящей работы определяется в необходимости:

- укрепления области применения электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) в современных и перспективных космических проектах;
- дальнейшего развития механики космических полетов МКА в окрестности круговой орбиты;

- разработки алгоритмов, решающих задачи оптимизации и проектирования траекторий МКА с ЭРДУ для использования при полетах реальных МКА;
- разработки методов и алгоритмов, позволяющих повысить оптимальность решения задач, упростить процессы расчета параметров маневров и повысить надежность этого процесса;
- углубления исследований по оптимизации маневров МКА с ЭРДУ для решения проблем космического мусора;
- расчета маневров МКА непосредственно на борту МКА в связи с резким увеличением числа маневрирующих МКА.

Объектом исследования являются оптимальные маневры МКА, оснащенных двигателями МТ.

Предметом исследования являются математические модели определения параметров оптимальных маневров перехода и встречи вблизи круговой орбиты выполняемых МКА, оснащенными двигателями МТ.

Целью работы является разработка методов и алгоритмов расчета параметров маневров МКА, оснащенных двигателями малой тяги.

Для достижения этой цели решены следующие **задачи**:

1. Разработка математических моделей оптимального движения МКА с двигателями МТ;
2. Разработка варианта метода продолжения по параметру (ПП) для решения задачи оптимизации траектории МКА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности (ИРОМ-двигателем), при наличии ограничений на ориентацию ДУ МТ;
3. Разработка варианта метода ПП для решения задачи оптимизации траектории МКА с помощью двигателей ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения (ОТСИ-двигателем), с учетом ограничения на ориентацию ДУ МТ;
4. Разработка численно-аналитических алгоритмов решения импульсной компланарной и некомпланарной задачи встречи, выполняемой МКА;
5. Разработка численно-аналитических алгоритмов решения компланарной и некомпланарной задачи встречи, выполняемой МКА, оснащенным двигателем МТ.

Методология и метод исследования

Для решения задачи оптимизации маневров МКА, оснащенного двигателем МТ, применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП). ПМП редуцирует задачу оптимального управления с двигателем МТ к краевой задаче (КЗ). С помощью метода ПП, основанного на ньютоновской гомотопии, данная КЗ сводится к задаче Коши, решение которой может быть найдено аналитически или численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Методы теории линейных дифференциальных уравнений применяются для нахождения их решений. Для решения задачи расчета параметров оптимальных маневров МКА (на компланарных или некомпланарных орбитах) используются аналитические и численно-аналитические методы. Кроме того, используются также теория космического полета, прикладные методы космической баллистики, методы математического моделирования и методы численного интегрирования системы ОДУ.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- получено новое аналитическое решение задачи оптимизации траектории КА с идеально регулируемым двигателем ограниченной мощности (ИРОМ-двигателем), при наличии ограничений на ориентацию ДУ МТ;
- получено новое численное решение задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем, при наличии ограничений на ориентацию ДУ МТ для проверки полученного аналитического решения задачи с ограниченной мощностью (ОМ-задачи);

- получено новое численное решение задачи оптимизации траектории КА, оснащенного двигателем ограниченной тяги и постоянной скоростью истечения (ОТСИ-двигателем), при наличии ограничений на ориентацию ДУ МТ;
- разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи, выполняемой КА при импульсной модели маневров;
- разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи, выполняемой КА, оснащенным двигателем МТ;
- разработан алгоритм решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при фиксировании части маневров.

Практическая значимость работы определяется:

- возможностью использования полученных аналитических решений для проектно-баллистического анализа перспективных КМ, формирования алгоритмов управления относительным движением КА, в качестве начального приближения для решения задач оптимизации траекторий КА с двигателями ограниченной тяги и постоянной скоростью истечения;
- необходимостью использования канальных управлений для решения задач, обусловленных ограниченными возможностями системы управления, требованиями к обеспечению радиосвязи или взаимной видимости сближающихся КА, а также по другим причинам;
- сокращением значительного времени, требующегося для выполнения сложных маневров, что позволит ускорить выполнение масштабных расчетов на этапе концептуального проектирования новых КА благодаря внедрению современных вычислительных методов;
- обеспечением высокой устойчивости при решении задач и достижение требуемой точности при формировании заданных орбит. Этот аспект имеет ключевое значение для баллистического сопровождения реальных миссий КА, основывающегося на современных математических и вычислительных основах;
- на борту таких КА могут быть внедрены специализированные алгоритмы управления движением и маневрами, основанные на предложенных численно-аналитических решениях, что позволит проводить адаптивную корректировку орбиты в реальном времени, что особенно важно для долгосрочных миссий с меняющимися целями или условиями эксплуатации, таких как спутники дистанционного зондирования, навигационные системы и спутниковые группы.

Теоретическая значимость работы

Метод продолжения по параметру для решения задачи оптимизации траектории МКА с идеально-регулируемым двигателем ограниченной мощности распространен на случай наличия ограничений на ориентацию ДУ МТ. Предложен принципиально новый подход к распределению маневрирования между разрешенными для маневрирования витками, позволяющий получить оптимальное решение как в случае, когда маневры выполняются двигателями большой тяги, так и в случае работы двигателей малой тяги.

Степень достоверности результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается следующими факторами:

- численно-аналитическим моделированием, проведенным с использованием различных математических моделей движения, что позволяет всесторонне оценить точность и устойчивость решения при изменении исходных данных и параметров;
- сравнением с альтернативными методами и результатами других авторов.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на Международных и Всероссийских конференциях и опубликованы в материалах конференций, а также докладывались на научных семинарах в РУДН, в Международном научном обзоре проблем технических наук, математики и информатики, на научных конференциях «принципы построения новой экосистемы: поликультурное пространство», «IAA/AAS SciTech on Space Flight Mechanics and Space Structures and Materials: Advances in the Astronautical Sciences Series» и др.

Положения, выносимые на защиту

1) аналитическое решение задачи оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем и ограничением на ориентацию вектора реактивного ускорения;

2) вариант численного метода ПП решения задачи оптимизации траектории КА с ОТСИ-двигателем, с учетом ограничения на ориентацию вектора реактивного ускорения;

3) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при импульсном моделировании маневров;

4) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА, оснащенного двигателем МТ;

5) численно-аналитический метод решения компланарной и некомпланарной задачи встречи КА при фиксировании части импульсов скорости.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматриваются общие характеристики математических моделей движения КА в окрестности круговой орбиты, приводится вывод и решение линеаризованной системы уравнений модели Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) и линеаризованных уравнений П.Е. Эльясберга.

Для анализа относительного движения КА в окрестности круговых орбит используются специальные математические модели движения. Наиболее популярной математической моделью относительного движения КА в окрестности круговых орбит является модель HCW, которая широко используется для расчета управления КА на низкой околоземной орбите. Модель HCW представляют собой линейные дифференциальные уравнения в орбитальной системе, упрощающие орбитальную динамику и полезна для расчета траекторий КА, движущихся вокруг Земли. Кроме нее, для расчета маневров встречи более эффективным оказалось использование линеаризованных уравнений в цилиндрической системе координат (линеаризованные уравнения П.Е. Эльясберга). После линеаризации уравнений движения КА можно представить в следующим виде:

$$\begin{pmatrix} \dot V_x - 2nV_y - 3n^2x \\ \dot V_y + 2nV_x \\ \dot V_z + n^2 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = V_{\mathrm{x}}, \\ \dot{\mathrm{y}} = V_y - n\mathrm{x}, \\ \dot z = V_z, \\ \dot V_{\mathrm{x}} = \gamma_{\mathrm{x}} + 2nV_y + n^2\mathrm{x}, \\ \dot V_{\mathrm{y}} = \gamma_y - nV_{\mathrm{x}}, \\ \dot V_{\mathrm{y}} = \gamma_z - n^2 z. \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathrm{x}, \mathrm{y}, z$ – координаты КА; $V_{\mathrm{x}}, V_{\mathrm{y}}, V_z$ – компоненты вектора скорости КА; $\gamma_{\mathrm{x}}, \gamma_{\mathrm{y}}, \gamma_z$ – компоненты вектора реактивного ускорения.

Зависимости относительных составляющих скорости от времени для случая постоянного реактивного ускорения для системы (1) и (2) примят следующим образом:

$V_x(t) = 3nx_0 \sin \tau + V_{x0} \cos \tau + 2V_{y0} \sin \tau + \gamma_x \sin \tau + \frac{2\gamma_y}{n}(1 - \cos \tau),$

$V_y(t) = 6(\cos \tau - 1)nx_0 - 2V_{x0} \sin \tau + (4 \cos \tau - 3)V_{y0} + \frac{2\gamma_x}{n}(\cos \tau - 1) + \frac{\gamma_y}{n}[4 \sin \tau - 3\tau],$

$V_z(t) = -z_0 n \sin \tau + V_{z0} \cos \tau + \frac{\gamma_z}{n} \sin \tau,$ (3)

и

$V_x(t) = n\mathrm{x}_0 \sin\vartheta + V_{x0}\cos\vartheta + 2V_{y0}\sin\vartheta + \frac{\gamma_x}{n}\sin\vartheta + \frac{2\gamma_y}{n}(1 - \cos\vartheta),$

$V_y(t) = n\mathrm{x}_0(\cos\vartheta - 1) - V_{x0}\sin\vartheta + V_{y0}(2\cos\vartheta - 1) + \frac{\gamma_x}{n}(\cos\vartheta - 1) + \frac{\gamma_y}{n}(2\sin\vartheta - \vartheta),$

$V_z(t) = -nz_0\sin\vartheta + V_{z0}\cos\vartheta + \frac{\gamma_z}{n}\sin\vartheta.$ (4)

где $x_0, y_0, z_0, V_{x0}, V_{y0}$ и V_{z0} – начальные координаты и начальные составляющие скорости КА в некоторый период времени t_0, τ=nt – безразмерная переменная времени, а $\vartheta = nt$ – невозмущенное значение угла u.

Рассматриваются два варианта задачи оптимизации траектории: задача с идеально-регулируемым (ИР) двигателем ограниченной мощности (ОМ-задача) и ограниченной тяги с постоянной скоростью истечения (ОСИ-задача). Кроме того, рассматривается трехканальное управление (ТКУ) – без ограничения на направление вектора реактивного ускорения и двухканальное управление (ДКУ) – нулевой радиальной компонентой реактивного ускорения. В рамках ОМ-задачи задается мощность реактивной струи q, что является единственным ограничением на величину реактивной тяги и скорости истечения c: $q = \alpha.N_u = \frac{Tc}{2}, \frac{dm}{dt} = -\frac{m^2\gamma^2}{2\beta N_e}$, где α – к.п.д. ЭРДУ, N_u – электрическая мощность ЭРДУ, γ – величина реактивного ускорения. Интегрируя дифференциального уравнения для массового расхода КА по времени от нулевого начального момента времени до текущего времени Δt, получим зависимость массы КА от времени: $m(t) = \frac{m_0}{1 + \frac{J(t)m_0}{N}}$, $J(t) = \int_0^{\Delta t} \frac{\gamma^2}{2\alpha.N_u} dt$, где $m_0 = m(0)$ – начальная масса КА. При предварительном баллистическом анализе полетов КА с электрическими ракетными двигателями (ЭРД) часто используется предположение о постоянстве КПД ЭРД. Это подразумевает, что электрическая мощность ЭРД может рассматриваться как постоянная. При условии постоянной реактивной мощности, когда $\alpha.N_u = 1$, минимизация затрат рабочего тела может быть осуществлена с использованием соответствующего функционала $J(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} \gamma^2\, dt$. После применения ПМП задача оптимального управления сводится к КЗ для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами граничными условиями:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\mathbf{p},\ \dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{A}^T\mathbf{p}, \quad (5)$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния; $\mathbf{x} = [x\ y\ z\ \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]^T$, $\boldsymbol{a} = \left[a_x\ a_y\ a_z\right]^T$, $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор реактивного ускорения, $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{B}_l$, и $\mathbf{B}_m$, – матрицы для обеих моделей.

$\boldsymbol{A}_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{A}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B}_l = \boldsymbol{B}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – для ТКУ и ДКУ.

Для решения этой задачи необходимо определить начальное значение вектора сопряженных переменных $\mathbf{p}_0$, обеспечивающее выполнение следующих краевых условий:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{x}_f. \quad (6)$$

Для ОСИ-задачи требуется найти управление, минимизирующее затраты топлива, определяемые функционалом $J=\int_0^{\Delta t}\delta\frac{T}{c}dt$, при котором управлением являются зависимости $\delta(t)$ и $\mathbf{e}_T(t)$, где δ – релейная функция тяги (δ=1 при работающем двигателе и δ=0 при неработающем двигателе), T – тяга, m – масса КА, $\mathbf{e}_T$ – единичный вектор вдоль вектора тяги. Дифференциальные уравнения оптимального движения КА в окрестности круговой орбиты, после применения принципа максимума можно записать в виде:

$$\begin{cases}\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\mathbf{x}+\delta\frac{T}{m}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{E}_{3\times3}\end{pmatrix}\frac{\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}}{|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|},\\ \frac{dm}{dt}=-\delta\frac{T}{c},\\ \frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\boldsymbol{A}^T\mathbf{p},\\ \frac{d\mathrm{p}_m}{dt}=\delta\frac{T}{m^2}|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|,\end{cases} \tag{7}$$

где $\mathbf{0}_{3\times3}$, $\mathbf{E}_{3\times3}$ – нулевая и единичная матрицы размером 3×3, $\boldsymbol{B}_l=\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{B}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{V}\end{pmatrix}, \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{B}_{3\times3}\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{3\times3}=\boldsymbol{E}_{3\times3}$ для ТКУ и $\boldsymbol{B}_{3\times3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ для ДКУ. Таким образом, для решения этой задачи необходимо вычислить начальные условия $\mathbf{p}(0)$, $\mathrm{p}_m(0)$, при которых удовлетворяются конечные условия:

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\ m(0)=m_0, \mathbf{x}(\Delta t)=\mathbf{x}_f \text{ и } \mathrm{p}_m(\Delta t)=0. \tag{8}$$

Для решения этой КЗ используется метод ПП.

Во второй главе приводятся методы расчета маневров КА с двигателями малой тяги. Краевую ОМ-задачу можно решать численно или аналитически. После решения ОМ-задачи аналитически, т.е. интегрирования систему (5) с краевыми условиями (6), можно представить начальное значение вектора сопряженных переменных для движения КА в плоскости орбиты и вдоль нормали к плоскости опорной орбиты в виде:

$$\mathbf{p}_0=\boldsymbol{\psi}^{-1}(t)\left[\boldsymbol{\Phi}(-\Delta t)\mathbf{X}_f-\mathbf{X}_0\right] \text{ и } \mathbf{p}_{0z}=\boldsymbol{\psi}_0{}^{-1}(t)\left[\boldsymbol{\Phi}(-\Delta t)\mathbf{X}_{zf}-\mathbf{X}_{0z}\right], \tag{9}$$

где $\mathbf{p}_0$ – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения в плоскости опорной орбиты, $\mathbf{p}_{0z}$ – начальное значение вектора сопряженных переменных для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты, при $t=0$, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ – фундаментальная матрица и $\boldsymbol{\psi}(t)$ - матрица свертки для движения в плоскости орбиты, $\boldsymbol{\psi}_0(t)$ – матрица свертки для движения вдоль нормали к плоскости опорной орбиты.

Явные виды фундаментальных матриц (для обеих моделей движения КА) можно записаться в виде:

$$\boldsymbol{\Phi}_l(t)=\begin{pmatrix}4-3\cos t&0&\sin t&2-2\cos t\\ 6\sin t-6t&1&2\cos t-2&4\sin t-3t\\ 3\sin t&0&\cos t&2\sin t\\ 6\cos t-6&0&-2\sin t&4\cos t-3\end{pmatrix}, \boldsymbol{\Phi}_m(t)=\begin{pmatrix}2-\cos t&0&\sin t&2-2\cos t\\ 2\sin t-3t&1&2\cos t-2&4\sin t-3t\\ \sin t&0&\cos t&2\sin t\\ \cos t-1&0&-\sin t&2\cos t-1\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{0l}(t)=\boldsymbol{\Phi}_{0m}(t)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\ -\sin t&\cos t\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Таким образом, явные выражения для матриц $\boldsymbol{\psi}_3(t)$ и $\boldsymbol{\psi}_{03}(t)$ (для обеих моделей движения КА), полученные аналитически для случая ТКУ примут следующий вид:

$$\boldsymbol{\psi}_{3l}(t)=\begin{pmatrix}\psi_{11l}(t)&\psi_{12l}(t)\\ \psi_{21l}(t)&\psi_{22l}(t)\end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{\psi}_{3m}(t)=\begin{pmatrix}\psi_{11m}(t)&\psi_{12m}(t)\\ \psi_{21m}(t)&\psi_{22m}(t)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\psi}_{03l}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}t-sc&-\mathrm{s}^2\\ -\mathrm{s}^2&t+sc\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Вводя обозначения c=cost, s=sint, получим вырожения $\psi_{11l}(t), \psi_{12l}(t), \psi_{21l}(t), \psi_{22l}(t)$ и $\psi_{11m}(t), \psi_{12m}(t), \psi_{21m}(t), \psi_{22m}(t)$ в виде:

$$\psi_{11l}(t)=\begin{pmatrix}\frac{13t+3cs}{2}-8s & 3(t-s)^2\\ 3(t-s)^2 & 14t-32s+3t^3+24tc-6cs\end{pmatrix},\psi_{12l}(t)=\begin{pmatrix}\frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 14s-3cs-11t\\ 5t-8s+6tc-3cs & 4c-\frac{9t^2}{2}+6c^2+12ts-10\end{pmatrix},$$

$$\psi_{21l}(t)=\begin{pmatrix}\frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 5t-8s+6tc-3cs\\ 14s-3cs-11t & 4c-\frac{9t^2}{2}+6c^2+12ts-10\end{pmatrix},\psi_{22l}(t)=\begin{pmatrix}\frac{5t-3cs}{2} & 3(c-1)^2\\ 3(c-1)^2 & 19t+6cs-24s\end{pmatrix},$$

$$\psi_{11m}(t)=\psi_{11l}(t),\ \psi_{12m}(t)=\begin{pmatrix}\frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 6s-\frac{3cs+9t}{2}\\ 5t-8s+6tc-3cs & 4c-\frac{3t^2}{2}+3c^2+6ts-7\end{pmatrix},$$

$$\psi_{21m}(t)=\begin{pmatrix}\frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 5t-8s+6tc-3cs\\ 6s-\frac{3cs+9t}{2} & 4c-\frac{3t^2}{2}+3c^2+6ts-7\end{pmatrix},\psi_{22m}(t)=\begin{pmatrix}\frac{5t}{2}-\frac{6cs}{4} & 3(c-1)^2\\ \frac{(c-1)(3c-1)}{2} & \frac{7}{2}t+\frac{3cs}{2}-4s\end{pmatrix}.$$

Аналогично, можно вычислить явные выражения для матриц $\boldsymbol{\psi}_2(t)$ и $\boldsymbol{\psi}_{02}(t)$ (для обеих моделей движения КА), полученные аналитически для случая ДКУ. Таким образом, используя ПМП к задаче оптимального управления в случае, когда КА оснащен ИРОМ-двигателем (ОМ-задачу), было получено решение КЗ аналитически. Однако для ОСИ-задачи найти аналитическое решение крайне сложно. По этой причине введем метод ПП и применим его для решения этой КЗ.

Рассматриваемый в этой работе метод ПП принадлежит к классу численных методов, основанных на ньютоновской гомотопии между искомой КЗ и некоторой специально сконструированной КЗ с известным решением. Метод ПП редуцирует рассматриваемую КЗ к задаче Коши. Для КЗ (5) и (7) с краевыми условиями (6) и (8) предполагается, что конечные краевые условия выражены в виде нелинейной системы уравнения для вектора невязок $\mathbf{g}(\boldsymbol{z})$: $\mathbf{g}(\mathbf{z})=0$, где $\mathbf{z}$ - вектор неизвестных параметров КЗ. Задается некоторое начальное приближение $\mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_0$, для которого вычисляется вектор невязок $\mathbf{g}(\mathbf{z}_0)=\mathbf{b}$. Это позволит представить данную задачу как однопараметрическое семейство нелинейных уравнений в виде:

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(\lambda))=(1-\lambda)\mathbf{b}, \tag{14}$$

где λ – параметр продолжения ($\lambda\in[0,1]$). Далее потребуется, чтобы равенство (14) выполнялось для любого $0\le\lambda\le1$. Очевидно, что при $\lambda=0$ уравнение (14) будет равно $\mathbf{g}(\mathbf{z}(0))=\mathbf{b}$, а при $\lambda=1$ – с уравнением для невязок для искомой КЗ ($\mathbf{g}(\mathbf{z}(1))=0$). Уравнение (14), безусловно, представляет собой ньютоновскую гомотопию между системой уравнений $\mathbf{g}(\mathbf{z})-\mathbf{b}=0$ с известным решением $\mathbf{z}=\mathbf{z}_0$ и исходной системой уравнений $\mathbf{g}(\mathbf{z})=0$.

Таким образом, дифференцируя уравнение (14) по параметру продолжения λ и выражая $dz/d\lambda$, исходная КЗ сводится к задаче Коши в следующим виде:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\lambda}=-\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{z}}\right)^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{z}(0)=\mathbf{z}_0,\ 0\le\lambda\le1 \tag{15}$$

Уравнениями, полученными в (15) являются система дифференциальных уравнений метода продолжения. При интегрировании выражения (15) по λ, варьируя от 0 до 1, в силу выражений $\mathbf{g}(\mathbf{z}_0)=\mathbf{b}$ и (14), получим решение исходной КЗ (искомый вектор неизвестных параметров КЗ ($\mathbf{g}(\mathbf{z})=\mathbf{0}$) в виде $\mathbf{z}=\mathbf{z}(1)$).

Конечно, для успешного применения метода продолжения необходимо, чтобы матрица частных производных $\partial\mathbf{g}/\partial\mathbf{z}$ существовала и оставалась невырожденной на всём интервале продолжения $\lambda\in[0,1]$. В некоторых случаях целесообразно включать параметр продолжения λ в правые части дифференциальных уравнений движения и в краевые условия. В таком случае функция невязок $\mathbf{g}$ будет явно зависеть от λ, а дифференциальные уравнения, используемые в методе продолжения, будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}=-\left(\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{z}}\right)^{-1}\left(\mathbf{b}+\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\lambda}\right) \tag{16}$$

Для вычисления матрицы чувствительности $\partial g/\partial z$ или вектора $\partial g/\partial\lambda$ можно использовать метод конечных разностей, метод комплексного шага или другие. Однако применение метода конечных разностей снижает эффективность алгоритма метода продолжения из-за низкой точности и шума в численных данных. Метод комплексного шага, напротив является перспективным вариантом метода продолжения, обеспечивающим простое и устойчивое вычисление производных, повышая быстродействие, несмотря на увеличение порядка системы уравнений (которые вычисляются в комплексной области). Более того, для обеспечения устойчивости решения КЗ используется сглаженное представление релейной функции тяги с параметрами, регулирующими значение параметра продолжения.

В третьей главе приводятся алгоритмы решения импульсной задачи встречи КА, находящихся на компланарных орбитах, и компланарная задача встречи КА, оснащенного двигателем малой тяги. Первый алгоритм расчета параметров маневров этой задачи основан на следующих шагах:

1. Определяются параметры перехода между близкими околокруговыми орбитами, предполагая применение импульсов скорости в импульсной постановке, в условиях невозмущенного кеплеровского движения и устанавливаем число витков N, на которых допускается маневрирование.

2. Распределяются значения импульсов скорости ΔV1t, и ΔV2t по виткам:

$$\Delta V_{1t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti}\,,\ \Delta V_{2t} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti}. \tag{17}$$

3. Предполагается, что импульсы скорости меняются линейно по виткам:

$$\Delta V_{1ti} = \Delta V_{1t1} + (\mathrm{i}-1)(\Delta V_{1tN} - \Delta V_{1t1})/(N-1), \tag{18}$$

$$\Delta V_{2ti} = \Delta V_{2t1} + (\mathrm{i}-1)(\Delta V_{2tN} - \Delta V_{2t1})/(N-1). \tag{19}$$

4. Вычисляются импульсы скорости ΔV_{1tN} и ΔV_{2tN}, подставляя выражения (18) и (19) в (17):

$$\Delta V_{1tN} = 2\Delta V_{1t}/N - \Delta V_{1t1},\ \ \Delta V_{2tN} = 2\Delta V_{2t}/N - \Delta V_{2t1}. \tag{20}$$

5. Перебирается в заданных пределах значение переменной ΔV_{1t1}, чтобы находить значение переменной ΔV_{2t1}. Затем вычисляются значения всех импульсов скорости с использованием формул (21) и (22):

$$\Delta V_{1ti} = 2\Delta V_{1t}(\mathrm{i}-1)/N(N-1) + \Delta V_{1t1}[1 - 2(\mathrm{i}-1)/(N-1)], \tag{21}$$

$$\Delta V_{2ti} = 2\Delta V_{2t}(\mathrm{i}-1)/N(N-1) + \Delta V_{2t1}[1 - 2(\mathrm{i}-1)/(N-1)]. \tag{22}$$

- коэффициенты при импульсах скорости известны благодаря заданным углам их приложения θ_{1i} и θ_{2i}, которые рассчитываются по следующей формуле:

$$\theta_{1i} = \theta_e + 2\pi(N_\mathrm{i} - N),\ \theta_{2i} = \theta_e + \pi + 2\pi(N_i - N). \tag{23}$$

6. Подбираются ΔV_{1t1}, и ΔV_{2t1} так, чтобы минимизировать суммарную характеристическую скорость (СХС) маневров:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N} (|\Delta V_{1ti}| + |\Delta V_{2ti}|). \tag{24}$$

- находим минимальное значение СХС. Такое решение принимается в качестве решения компланарной задачи встречи. Если СХС найденного решения совпадает с СХС решения задачи перехода, то было найдено решение с минимально возможной СХС.

7. Рассчитывается продолжительность каждого маневра:

$$\Delta\varphi_i = \frac{\omega_c}{\omega}\Delta V_i, \tag{25}$$

где ω_c - центростремительное ускорение опорной круговой орбиты ($\omega_c = V_0^2/r_0$), ω – ускорение ДУ ($\omega = \mathrm{T/m}$).

8. Если продолжительность максимального импульса скорости составляет не более 20°, решение приближается к импульсному, и задачу можно считать решенной. В случае, когда продолжительность маневров велика, переходим к решению с использованием МТ.

9. Для каждого витка вычисляются изменения эксцентриситета и большой полуоси (БПО), вызванные импульсами скорости, рассчитанными для этого витка:

$$\Delta e_i = 2\Delta V_{1ti} - 2\Delta V_{2ti}, \quad \Delta a_i = 2\Delta V_{1ti} + 2\Delta V_{2ti}. \tag{26}$$

далее рассчитывается продолжительность маневров МТ, обеспечивающих те же изменения:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\omega_c \Delta a}{4\omega n} + 2\arcsin\left[\frac{\omega_c \Delta e}{8wn\cos\left(\frac{\omega_c \Delta a}{8\omega n}\right)}\right], \tag{27}$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\omega_c \Delta a}{4\omega n} - 2\arcsin\left[\frac{\omega_c \Delta e}{8wn\cos\left(\frac{\omega_c \Delta a}{8\omega n}\right)}\right]. \tag{28}$$

Итак, виток за витком находим продолжительность всех маневров. Задача с МТ корректно решена. Подтверждено, что при значении аргумента арксинуса, превышающем единицу, решение задачи невозможно в рамках имеющихся параметров тяги и массы КА для заданного числа витков.

Ранее предложенный алгоритм оказался недостаточным для эффективного решения задачи встречи КА с двигателем малой тяги при низких значениях тяги. Основная трудность заключается в том, что при снижении тяги продолжительность отдельных маневров, особенно последних, возрастает сверх необходимого для корректировки эксцентриситета. Для оптимизации процесса уменьшаем длительность этих маневров, ограничивая их величину так, чтобы они обеспечивали максимальное изменение эксцентриситета (не превышая 180 градусов), одновременно перераспределяя недостающую тягу на внутренние маневры. При этом корректируем траекторию, учитывая влияние фиксированных импульсов, что позволяет минимизировать промах в точке встречи.

В четвертой главе приводится алгоритм решения задачи встречи между некомпланарными орбитами. Решение задачи встречи предполагает последовательное выполнение нескольких этапов. На первом этапе осуществляется решение задачи импульсного перехода между некомпланарными орбитами. После этого распределение параметров задачи перехода производится среди витков, разрешенных для маневрирования, с целью обеспечения выполнения условия по времени. Для более точного определения параметров маневров используется итерационная процедура, учитывающая различные возмущения, такие как влияние сжатия Земли, атмосферы и другие.

Рассмотрим данный алгоритм более детально. Исходя из всей совокупности ранее найденных решений задачи перехода выбирается то, которое обеспечивает минимальную СХС. Далее все параметры этого решения будут обозначены индексом «m»: $\Delta V_{t1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z1\mathrm{m}}$, $\theta_{1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{t2\mathrm{m}}$, $\Delta V_{z2\mathrm{m}}$, $\theta_{2\mathrm{m}}$. При решении задачи встречи величины импульсов скорости $\Delta V_{t1\mathrm{m}}$, $\Delta V_{t2\mathrm{m}}$, определенные при решении задачи перехода, распределяются между разрешенными для маневрирования N витками:

$$\Delta V_{1t\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{1ti}\,, \ \Delta V_{2t\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} \Delta V_{2ti}. \tag{29}$$

Боковые составляющие распределяются пропорционально трансверсальным:

$$\mathbf{\Delta V_{1zi}} = \frac{|\mathbf{\Delta V_{1ti}}|}{|\mathbf{\Delta V_{1t}}|}\mathbf{\Delta V_{1zm}}, \quad \mathbf{\Delta V_{2zi}} = \frac{|\mathbf{\Delta V_{2ti}}|}{|\mathbf{\Delta V_{2t}}|}\mathbf{\Delta V_{2zm}}. \tag{30}$$

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы подобрать такое распределение величин импульсов скорости по виткам, чтобы было выполнено уравнение по времени. Чтобы существенно упростить решение задачи предполагаем, что величины импульсов скорости по виткам меняются линейно, аналогично случаю компланарных орбит. Исходя из этого получим линейное уравнение с двумя неизвестными $\Delta V_{1t1}, \Delta V_{2t1}$. Коэффициенты при импульсах скорости известны, так как известны их углы приложения:

$$\theta_{1i} = \theta_{1m} + 2\pi(N_i - N), \theta_{2i} = \theta_{2m} + \pi + 2\pi(N_i - N). \quad (31)$$

Перебирая в заданных пределах значение переменной ΔV_{1t1}, находим значение переменной ΔV_{2t1}. Затем, используя (31), находим величины всех импульсов скорости с помощью следующего соотношения:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{N}\left(\sqrt{\Delta V_{1ti}^2 + \Delta V_{1zi}^2} + \sqrt{\Delta V_{2ti}^2 + \Delta V_{2zi}^2}\right). \quad (32)$$

На основании уравнения (32) вычисляется СХС для текущего решения. Далее процесс продолжается аналогично решению компланарной задачи встречи КА.

Рассмотрена некомпланарная задача встречи КА, оснащенного двигателем малой тяги. Предполагается, что ориентация ДУ при исполнении маневра фиксируется в орбитальной системе координат. Для каждого витка находим какие изменения эксцентриситета и БПО производят найденные импульсы скорости, определенные на этом витке:

$$\Delta e_{1ix} = 2\Delta V_{1ti}\cos\theta_{1i} + 2\Delta V_{2ti}\cos\theta_{2i}, \Delta e_{1iy} = 2\Delta V_{1ti}\sin\theta_{1i} + 2\Delta V_{2ti}\sin\theta_{2i}, \quad (33)$$

$$\Delta a_i = 2\Delta V_{1ti} + 2\Delta V_{2ti}, \quad (34)$$

$$\Delta V_{iz} = \Delta V_{1zi}\cos\theta_{1i} + \Delta V_{2zi}\cos\theta_{2i}, \Delta z_i = \Delta V_{1zi}\sin\theta_{1i} + \Delta V_{2ti}\sin\theta_{2i}. \quad (35)$$

Достаточно сложно обеспечить переменную ориентацию ДУ в процессе исполнения маневра, поэтому очень надежно, когда выбирается управление, которое можно реализовать при фиксированной ориентации в орбитальной или инерциальной системах координат. В связи с этим, будем учитывать эти ограничения при решении задачи. Затем определяем нужную продолжительность маневров МТ, которые произведут такое же изменение эксцентриситета и угла между плоскостями:

$$\Delta\varphi_1 = 2\arcsin\left(\frac{\omega_c\,\Delta V_1}{2\omega}\right), \quad (36)$$

$$\Delta\varphi_2 = 2\arcsin\left(\frac{\omega_c\,\Delta V_2}{2\omega}\right). \quad (37)$$

Решение, полученное с применением двигателя МТ, обеспечивает такое же изменение вектора эксцентриситета и ориентации плоскости орбиты, как и исходное импульсное решение, поскольку середины длительных маневров совпадают с моментами выполнения импульсных воздействий на скорость. Однако, сложность состоит в том, что изменение БПО оказывается избыточным, поскольку оно происходит более эффективно при изменении орбитальной ориентации, чем при воздействии на эксцентриситет. В результате маневров возникает отклонение от требуемого значения БПО. Для устранения этого отклонения может быть использована следующая итерационная процедура:

1) пусть начальное отклонение параметров БПО обозначено как $\Delta a_0 = a_f - a_0$ (например, $\Delta a_0 > 0$), и наблюдаются отклонения, такие как $\Delta a_0, \Delta e_{x0}, \Delta e_{y0}, \Delta i_0$;

2) после расчета параметров маневров сформируется новое значение БПО a_1 ($a_1 > a_f$);

3) на следующей итерации будут использоваться отклонения $\Delta a_1 = \Delta a_0 + a_f - a_1, \Delta e_{x0}, \Delta e_{y0}, \Delta i_0$;

4) на последующих будут применяться отклонения $\Delta a_2 = \Delta a_1 + a_f - a_2$, и т. д., до тех пор, пока БПО не будет приведена к значению с заданной точностью.

Разработан алгоритм решения встречи КА на некомпланарных орбитах при фиксировании части импульсов скорости, аналогичный алгоритму для случая компланарной задачи встреч КА на компланарных орбитах.

В пятой главе рассмотрены оптимизации траектории КА с использованием двигателя малой тяги. Для оптимизации траектории КА с ИРОМ-двигателем (ОМ-задачи) минимизация массы топлива эквивалентна задаче минимизации определенного функционала. Рассмотрим систему уравнения (1) и (2) как динамическую модель, которую можно представить в пространстве состояний в виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}, \tag{38}$$

требуется перевести системы (1) и (2) из заданного начального положения в $t = 0$: $\mathrm{x}(0) = \mathrm{x}_0, \mathrm{y}(0) = \mathrm{y}_0, \mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0, \mathrm{v}_x(0) = \mathrm{v}_{x0}, \mathrm{v}_y(0) = \mathrm{v}_{y0}, \mathrm{v}_z(0) = \mathrm{v}_{z0}$, в конечное положение, заданное в фиксированный момент времени Δt: $\mathrm{x}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{x}_f, \mathrm{y}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{y}_f, \mathrm{z}(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{z}_f, \mathrm{v}_x(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{xf}, \mathrm{v}_y(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{yf}, \mathrm{v}_z(\Delta\mathrm{t}) = \mathrm{v}_{zf}$ с минимальными затратами топлива.

Далее разделится задача оптимального управления (1) и (2) на две независимые подзадачи: для движения КА в плоскости орбиты (с индексом “in”) и вдоль оси z (с индексом “out”). Движение в плоскости орбиты можно представить системой дифференциальных уравнений: $\frac{d\mathrm{x}_{\mathrm{in}}}{dt} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{in}}\mathbf{x}_{\mathrm{in}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{in}}$ с функционалом $J_{\text{ом}}^{\mathrm{in}} = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta\mathrm{t}} a_{\mathrm{in}}^2\,dt$, где

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{v_x} \\ \mathrm{v_y} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{in}l} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{in}m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{in}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, a_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{a}_{\mathrm{in}}|$ для ТКУ и $\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T, a_{\mathrm{in}} = a_y$ для ДКУ. Краевые условия, с учетом (6) и (7), можно записать в виде:

$$\mathbf{x}_{\mathrm{in}}(0) = \mathbf{x}_0^{\mathrm{in}}, \mathbf{x}_{\mathrm{in}}(\Delta t) = \mathbf{x}_f^{\mathrm{in}}. \tag{39}$$

Движение вне плоскости орбиты определяется системой ОДУ: $\frac{d\mathbf{x}_{\mathrm{out}}}{dt} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{out}}\mathbf{x}_{\mathrm{out}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{out}}\boldsymbol{a}_z$, с функционалом $J_{\text{ом}}^{\mathrm{out}} = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} a_z^2 dt$, где $\mathbf{x}_{\mathrm{out}} = \begin{pmatrix} z \\ \mathrm{v}_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_{\mathrm{out}l} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{out}m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, и с краевыми условиями

$$\mathbf{x}_{\mathrm{out}}(0) = \mathbf{x}_0^{\mathrm{out}}, \mathbf{x}_{\mathrm{out}}(\Delta t) = \mathbf{x}_f^{\mathrm{out}}. \tag{40}$$

Матрицы $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ (для обеих моделей движения КА) легко были вычислены аналитически по формулам (10) - (15), перепишем только одну из них (для ТКУ) в следующим виде:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{in}}(t) = \begin{pmatrix} 4-3c & 0 & s & 2(1-c) \\ 6(s-1) & 1 & 2(c-1) & 4s-3t \\ 3s & 0 & c & 2s \\ 6(c-1) & 0 & -2s & 4c-3 \end{pmatrix} \text{и } \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{out}}(t) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{in}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{13t+3sc}{2} - 8s & 3(t-s)^2 & \frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 14s-3sc-11t \\ 3(t-s)^2 & 14t-32s+3t^3+24tc-6sc & 5t-8s+6tc-3sc & 4c-\frac{9}{2}t^2+6c^2+12ts-10 \\ \frac{(1-c)(3c-5)}{2} & 5t-8s+6tc-3sc & \frac{5t-3sc}{2} & 3(c-1)^2 \\ 14s-3sc-11t & 4c-\frac{9}{2}t^2+6c^2+12ts-10 & 3(c-1)^2 & 19t+6sc-24s \end{pmatrix}$$

После вычисления начального вектора сопряженных переменных, можно определить оптимальное управление по формуле (41), оптимальную траекторию вычисляется с использованием выражения (42) и значения функционала на оптимальных траектория (43). В силу этого, имеем следующие выражения:

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Phi}^T(-\Delta t)\mathbf{p}_0 \text{ и } \boldsymbol{a}_z(t) = \boldsymbol{B}_0{\boldsymbol{B}_0}^T{\boldsymbol{\Phi}_0}^T(-\Delta t)\mathbf{p}_0, \tag{41}$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)[\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\psi}(\Delta t)\mathbf{p}_0] \text{ и } \mathbf{x}_z(t) = \boldsymbol{\Phi}_0(t)[\mathbf{x}_{0z} + \boldsymbol{\psi}_0(\Delta t)\mathbf{p}_{0z}], \tag{42}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} \boldsymbol{a}^T\,\boldsymbol{a}(t)dt \to min \text{ и } J_z = \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t} {\boldsymbol{a}_z}^T\,\boldsymbol{a}_z(t)dt \to min \tag{43}$$

Таким образом успешно решили ОМ-задачу. Далее применим это решение как начальное приближение, чтобы решить ОСИ-задачу.

Рассмотрена оптимизация траектория КА с ОТСИ-двигателем (ОСИ-задача). Для ОСИ-задачи, требуется перевести систему (38) из заданного начального состояния при t=0 ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,

$\mathrm{m}(0) = \mathrm{m}_0$) в заданное конечное состояние при t=Δt ($\mathbf{x}(\Delta t) = \mathbf{x}_f, \mathrm{p}_m(\Delta t) = 0$).

После применения ПМП, рассматриваемая задача оптимального управления (38), (39), (40) и (8) сводится к КЗ для системы ОДУ (7) с краевыми условиями (6) и (8). Для решения этой КЗ используется метод ПП, который принадлежит к классу численных методов, основанных на ньютоновской гомотопии между искомой КЗ и некоторой специально сконструированной КЗ с известным решением (между задачами оптимизации ОМ- и ОСИ-траекторий).

В качестве начального приближения для неизвестного вектора $\mathbf{p}(0)$ используются значения сопряженных переменных, полученные при оптимизации ОМ-траектории с теми же краевыми условиями. Начальное приближение для $\mathrm{p}_m(0)$ выбирается равным 0. Для реализации метода ПП уравнения (44) погружаются в однопараметрическое семейство, зависящее от параметра продолжения λ:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{E}_{3\times3}\end{pmatrix}\frac{(1-\lambda+\lambda\delta T)\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}}{1-\lambda+\lambda m|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|},\ \frac{dm}{dt} = -\lambda\delta\frac{T}{c},\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\boldsymbol{A}^T\mathbf{p},\ \frac{d\mathrm{p}_m}{dt} = \lambda\delta\frac{T}{m^2}|\boldsymbol{B}^T\mathbf{p}|. \qquad (44)$$

При начальном значении параметра продолжения λ=0 уравнения (44) совпадают с уравнениями оптимального движения в ОМ-задаче, а при конечном значении λ=1 – с уравнениями оптимального движения для ОСИ-задачи. Метод продолжения позволяет свести решение КЗ к интегрированию некоторой системы ОДУ по λ, для вычисления правых частей которых требуется интегрировать уравнения (44).

В рассматриваемой работе используется сглаженное представление релейной функции тяги δ(S), чтобы обеспечить устойчивость решения КЗ. Это необходимо, поскольку в ОСИ-задаче правые части дифференциальных уравнений содержат релейную функцию тяги δ (ступенчатую функцию включения-выключения). Такая функция вызывает разрывы в решении, что противоречит требованиям метода ПП, как указано в уравнении (45). Для применения данного метода требуется сглаженное управление, так как разрывность системы вызвана исключительно моментами включения и выключения двигателя. В качестве сглаженной функции тяги δ(S) можно использовать следующую форму:

$$\delta(S,\varepsilon) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{S}{\sqrt{S^2 + c_2\varepsilon^2}}\right], \qquad (45)$$

где $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0(1-\lambda) + \lambda\varepsilon_f$ - малый параметр, который может зависеть от λ, $c_2 = 2(\sqrt{2}+1)$. Вид функции (45) для различных значений ε представлен на рисунке 1.

В шестой главе приведены численные примеры решения различных задач. Для решения задачи оптимизации траектории с ИРОМ-двигателем был использован формализм ПМП, позволяющий редактировать задачу оптимального управления к КЗ. Данная ОМ-краевая задача была решена аналитически. На основе полученных графиков оптимальные ОМ-траектории практически неразличимы для случаев ДКУ и ТКУ, поэтому можно визуализировать некоторые из них. На рис. 2 и 3 представлены оптимальные ОМ-траектории и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ДКУ и ТКУ в плоскости опорной орбиты.

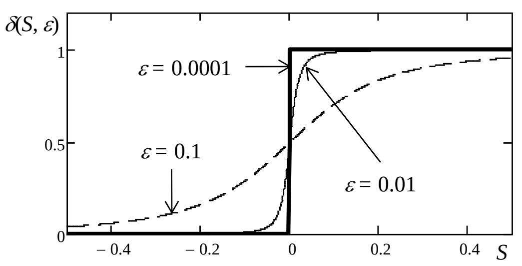

Рис. 1. Сглаженное представление релейной функции $\delta(S)$.

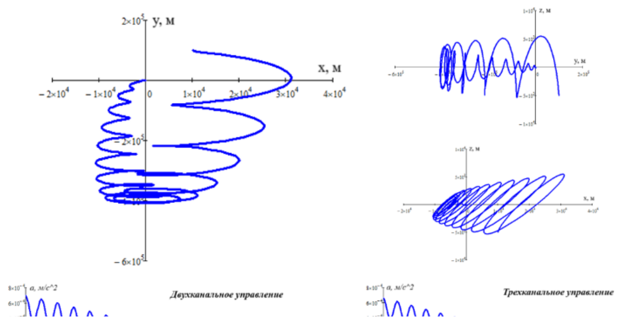

Рис. 2. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ТКУ в плоскости опорной орбиты (Модель HCW).

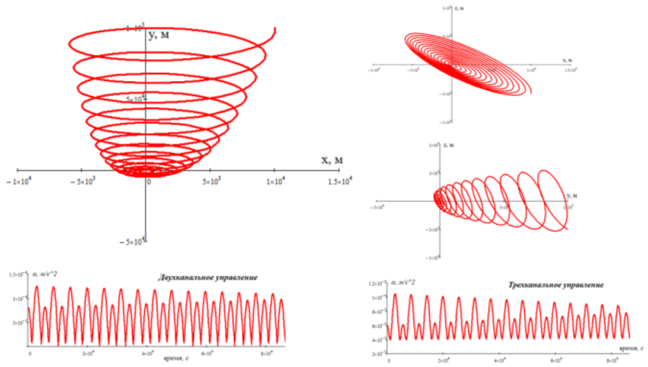

Рис. 3. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ТКУ в плоскости опорной орбиты (у Эльясбега)

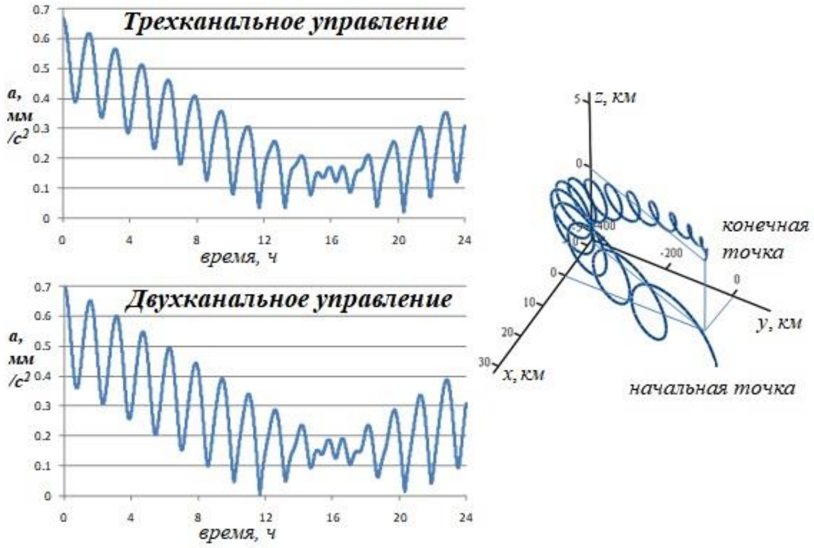

Рис. 4. Оптимальная ОМ-траектория и оптимальные зависимости ускорения тяги от времени для ТКУ и ДКУ

Для численного решения задачи оптимизации траектории с ИРОМ-двигателем и задача оптимизации траектории с ОТСИ-двигателем использовался метод непрерывного ПП, основанный на ньютоновской гомотопии с нулевым начальным приближением для неизвестных начальных значений сопряженных переменных. Этот метод позволил формально редуцировать КЗ для системы ОДУ к задаче Коши, при этом требовалось интегрировать вложенные системы ОДУ. На рис. 4 представлена оптимальная ОМ-траектория (траектория КА с двигателем МТ), которая визуально практически неразличима для случая ТКУ и ДКУ, а также зависимости от времени реактивного ускорения для ТКУ и ДКУ.

Результаты расчета оптимальных ОСИ-траекторий для разных значений максимальной тяги (от 0.362 Н до 100 Н) и для ДКУ и ТКУ представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Параметры оптимальных ОСИ-траекторий относительно максимальной величины тяги

T, Н	$m_{р3}$, Кг	$V_{хар3}$, м/с	$m_{р2}$, Кг	$V_{хар2}$, м/с	$\Delta m_р = m_{р2} - m_{р3}$, Кг	$\Delta m_р / m_{р3}$
0.362	12.7264	27.632946	14.3657	31.21824	1.63933	0.12881
0.37	12.2472	26.586017	13.1469	28.55205	0.89972	0.07346
0.4	11.1081	24.099413	11.4948	24.94324	0.38664	0.03481
…	…	…	…	…	…	…
5	6.6696	14.437615	6.7023	14.50864	0.03271	0.00490
10	6.5675	14.215871	6.5933	14.2719	0.02583	0.00393
100	6.5392	14.154412	6.5648	14.21001	0.02565	0.00392

На основе данных из табл. 1 можно заметить, что при минимальной тяге (когда двигатель практически не выключается) ТКУ позволяет снизить расход топлива почти на 13% по сравнению с ДКУ. При увеличении тяги разница в расходе топлива между ДКУ и ТКУ уменьшается: при тяге 1 Н этот показатель составляет 0,573%, а при дальнейшем увеличении тяги стремится к пределу, равному примерно 0,39%. Таким образом, с точки зрения расхода топлива ДКУ становится почти идентичным ТКУ при ускорении более 0,001 м/с².

На рис. 5 представлены оптимальные ОСИ-траектории для ТКУ (слева) и ДКУ (справа), а также соответствующие оптимальные управления. На изображении слева траектория показана как проекция на плоскость опорной орбиты: участки с выключенным двигателем отображены тонкими линиями, а с работающим двигателем – толстыми. Для ТКУ двигатель включается 10 раз. В начале траектории угол тангажа колеблется около 180 градусов, что обеспечивает разгон КА, а к концу приближается к 0 градусам, что соответствует торможению. На среднем участке (между 14 и 17 часами) угол тангажа изменяется от -180 до 180 градусов. Угол рыскания также изменяется, достигая амплитуды около 60 градусов в интервале от 13 до 20 часов. Для сравнения, на траектории справа, реализованной с ДКУ, двигатель включается всего два раза, а единственный пассивный участок длится менее четверти часа. В условиях ДКУ радиальное реактивное ускорение отсутствует, поэтому угол тангажа принимает значения только 0 или 180 градусов.

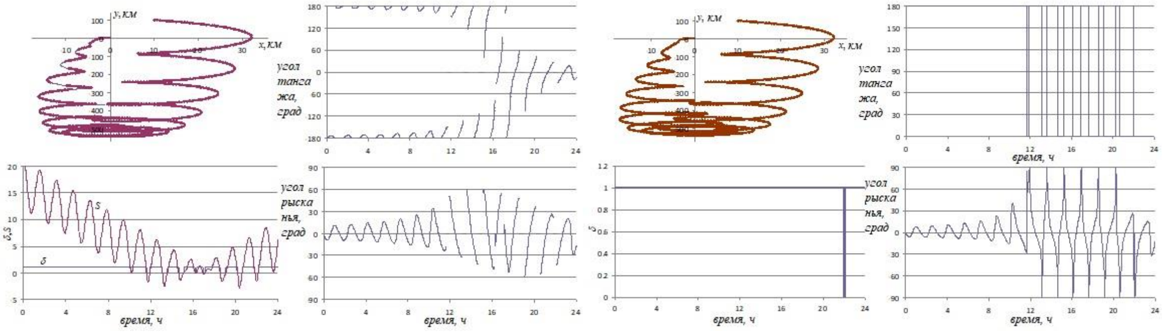

Рис. 5. Оптимальная ОСИ-траектория с ТКУ и ДКУ, и оптимальное ДКУ и ТКУ (T = 0.362 N)

Согласно данным, представленным в табл. 1 и на рис. 5, структура оптимальной траектории может существенно варьироваться в зависимости от выбранного режима управления. Ярким примером является различие в ТКУ и ДКУ при высокой тяге (100 Н). На рисунке 6 показаны зависимости функций $\delta(t)$ и $S(t)$ для ТКУ и ДКУ. Для ТКУ достаточно всего трех включений двигателя, и конечная точка достигается за менее чем 2 часа. В то время как при ДКУ требуется 31 включение двигателя и полное время перелета (24 часа).

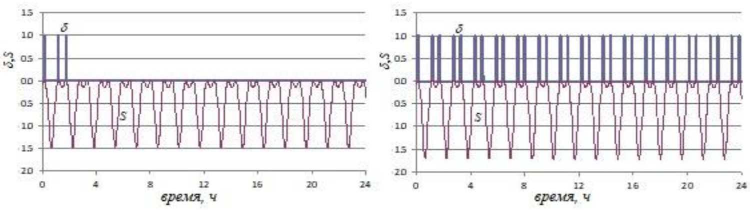

Рис. 6. Оптимальная тяга и функции переключения для ТКУ (слева) и ДКУ (T = 1000 N)

Примеры решения задач с помощью алгоритма, описанного в четвертой главе. На первом этапе рассчитывается оптимальный маневр перехода между некомпланарными орбитами. Далее рассматривается многоимпульсная встреча, где перелет осуществляется за N=15 витков, а тяга варьирует в диапазоне от 1 до 100 Н. При решении задачи угол приложения первого импульса скорости перебирался в границах от 0 до 360º с шагом 0.75º. Результаты расчетов параметров оптимального двухимпульсного перехода между некомпланарными орбитами, то есть, величины трансверсальных и боковых составляющих импульсов скорости, углы приложения первого и второго импульса, представлены следующим образом: θ_1=155º, θ_2=55.851º, ΔV_{t1}=-3.452 м/с, ΔV_{t2}=2.367 м/с, ΔV_{t2}=2.367 м/с, ΔV_{z1}=0.637 м/с, ΔV_{z2}=6.372 м/с, ΔV_t=5.819 м/с, ΔV_z=7.01 м/с, ΔV_1=3.51 м/с, ΔV_2=6.798 м/с, ΔV=10.308 м/с. Можно видеть, что минимальная величина характеристической скорости, которую должен иметь КА для маневра перехода, составляет 10,308 м/с.

Для многоимпульсного решения задачи встречи величина первого импульса скорости перебирается в границах от -3.452м/с до 0.5 м/с с шагом 0.023 м/с. Для получения импульсного решения задачи встречи импульсы скорости двухимпульсного решения распределяются между 15 витками, так чтобы было выполнено условие по времени. На рис. 7 показано распределение двухимпульсного решения по 15 виткам для выполнения условия встречи.

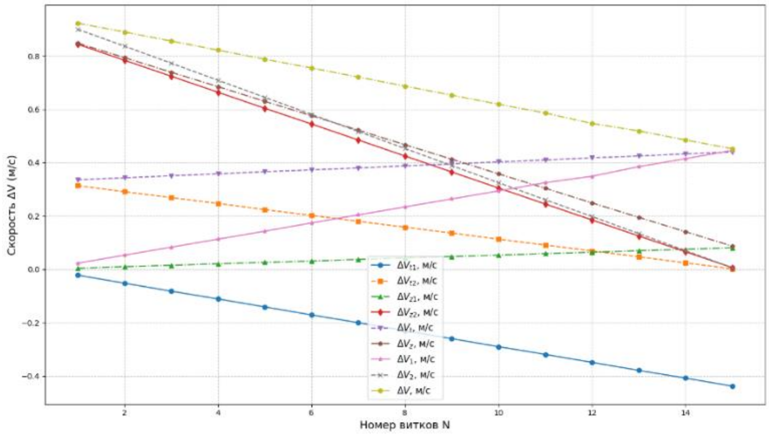

Рис. 7. Распределение двухимпульсного решения по 15 виткам

В табл. 2 приведены отклонения элементов орбиты по виткам, соответствующие влиянию распределенных импульсов скорости.

Таблица 2 – Результаты отклонений элементов орбиты по виткам

N	$\Delta e_{1ix} * 10^{-4}$	$\Delta e_{1iy} * 10^{-4}$	$\Delta e_i * 10^{-4}$	θ_{ei} °	$\Delta a_{0i} * 10^{-4}$	$\Delta V_{zi} * 10^{-4}$	$\Delta z_i * 10^{-4}$	θ_{zi} °
1	-0.41	-0.71	0.816	59.877	0.765	-0.627	0.915	55.578
2	-0.306	-0.691	0.755	66.096	0.629	-0.589	0.847	55.163
3	-0.203	-0.675	0.705	73.302	0.492	-0.552	0.779	54.68
…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.833	-0.521	0.983	-32.057	-0.872	-0.176	0.097	29.028
14	0.936	-0.506	1.064	-28.395	-1.009	-0.138	0.029	11.991
15	1.04	-0.491	1.15	-25.267	-1.145	-0.1	-0.039	-21.159

Далее вычисляются продолжительности маневров, которые для реальной малой тяги «1Н» обеспечивают вычисленные изменения элементов орбиты на каждом витке. После четырех итераций уточнения коррекции большой полуоси были получены следующие результаты, представленные в таблицах 2-4.

Таблица 3 – Продолжительность маневров при N=15

N	$\Delta\varphi_{1i}$ °	$\Delta\varphi_{2i}$ °	$\Delta\varphi_i$ °
1	2.273	60.18	62.453
2	3.991	55.573	59.564
3	5.999	51.128	57.127
…	…	…	…
13	24.499	8.401	32.9
14	26.406	4.437	30.843
15	28.463	0.832	29.295
∑	227.192	444.773	671.965

Рассчитываются затраты СХС, соответствующей найденным продолжительностям маневров, они представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Затраты СХС решения с малой тягой при N=15

N	ΔV_{t1}, м/с	ΔV_{t2}, м/с	ΔV_{z1}, м/с	ΔV_{z2}, м/с	ΔV_t, м/с	ΔV_z, м/с	ΔV_1, м/с	ΔV_2, м/с	ΔV, м/с
1	0.035	0.33	-0.006	0.888	0.365	0.894	0.036	0.947	0.983
2	0.062	0.305	-0.011	0.82	0.367	0.831	0.063	0.875	0.938
3	0.093	0.28	-0.017	0.755	0.373	0.772	0.095	0.805	0.900
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	0.379	0.046	-0.07	0.124	0.425	0.194	0.385	0.132	0.518
14	0.409	0.024	-0.075	0.065	0.433	0.14	0.416	0.069	0.485
15	0.441	0.005	-0.081	0.012	0.446	0.093	0.448	0.013	0.461
∑	3.518	2.44	-0.647	6.564	5.958	7.211	3.577	7.003	10.580

Аналогичным образом рассчитываются маневры для различных значений тяг. Результаты приведены в сводной таблице 5.

Таблица 5 – Параметры решения относительно максимальной величины тяги

Т, Н	1	2	5	10	100
ΔV, м/с	10.580	10.377	10.32	10.318	10.308
М, кг	4.892	4.798	4.772	4.771	4.766

Таким образом, было получено решение некомпланарной задачи встречи КА, оснащенного двигателем МТ.

ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

В ходе проведенных исследований решена задача встречи, выполняемой КА, оснащенным двигателем МТ, аналитическими, численно-аналитическими и численными методами.

Получены следующие результаты:

1. Аналитические методы решения ОМ-краевой задачи оптимального управления КА как для общего случая, когда на ориентацию вектора реактивного ускорения не накладывается ограничений (ТКУ), и для случая, когда радиальная компонента реактивного ускорения равна нулю (ДКУ). Установлено, что ДКУ и ТКУ по всем анализируемым параметрам оказались очень близки друг к другу.

2. Вариант метода ПП (ньютоновская гомотопия), использующий нулевое начальное приближение для неизвестных сопряженных переменных и позволяющий преобразовать КЗ к задаче Коши, решаемой численным интегрированием вложенных систем ОДУ.

3. Вариант численного метода ПП для проверки аналитических решений. Сравнение аналитических и численных решений показало их совпадение с точностью до ошибки вычислений (до 8 значащих цифр).

4. Вариант численного метода ПП для анализа оптимальных траекторий КА с ограниченной тягой, который показал, что при работе двигателя в течение не более чем 20% от общего времени перелета разница в затратах топлива между ДКУ и ТКУ составляет десятые доли процента. Однако, если двигатель работает бóльшую часть времени, топливные затраты при ДКУ могут превышать затраты для ТКУ более чем на 10%.

5. Численно-аналитические методы расчета параметров маневров:

- многоимпульсных встреч на компланарных и некомпланарных орбитах;
- многовитковых встреч на компланарных и некомпланарных орбитах с использованием двигателя МТ.

Главным достоинством предложенных численно-аналитических методов решения задач встречи является их простота в расчетах и надежность, что позволяет использовать их не только в наземных центрах управления, но и на борту КА.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Баранов А.А., Оливио А.П. Компланарная многовитковая встреча на околокруговой орбите с помощь двигателей малой тяги // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 4. С. 1-13. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-4-00-00.

2. Баранов А.А., Оливио А.П. Некомпланарная встреча на околокруговой орбите с помощь двигателя малой тяги // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 1. С. 7-20. https://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-1-7-20 .

3. Оливио А.П. Компланарная встреча двух космических аппаратов на околокруговой орбите с применением двигателя малой тяги // Международный научно-исследовательский журнал. 2024. № 4 (142). С. 1-10. https://doi.org/10.23670/IRJ.2024.142.155.

4. Olivio A.P. Optimizing the trajectory of a spacecraft using an ideally regulated engine in the vicinity of a circular orbit // Международный научно-исследовательский журнал. 2024. № 6(144). С.1-10. DOI: https://doi.org/10.60797/IRJ.2024.144.24.
5. Petukhov V.G., Olivio A.P. Optimization of the finite-thrust trajectory in the vicinity of a circular orbit // Advances in the Astronautical Sciences. 2021. Vol. 174. № 95. P.5-15. IAA-AAS-SciTech- AAS 19-951.2.
6. Оливио А.П. Аналитическое решение дифференциальных уравнений Клохесси-Уилтшира-Хилла «частный случай» // Научный электронный Меридиан. 2020. № 9 (43). С. 1-9.
7. Оливио А.П., Ермаков Д.Н. Исторические Аспекты построения оптимального алгоритма управления сближением двух спутников с использованием непрерывной малой тяги // Издательский дом Среда. 2021. Стр. 1-16. DOI: 10.31483/r-983334
8. Оливио А.П. Сравнение задачи оптимизации траектории космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем для двух- и трехканального управления в окрестности круговой орбиты: монография, глава 9 // Издательский дом Среда. 2022. Стр. 1-16. DOI 10.31483/r-102734.
9. Оливио А.П. Обзор маневров космических аппаратов на околокруговых орбитах // Интерактивная наука. 2023. № 5 (81). С. 9-15. ISSN 2414-9411. DOI 10.21661/r-560004.

АННОТАЦИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Данная диссертационная работа посвящена разработке методов расчета маневров малого космического аппарата (МКА), оснащенного двигателем малой тяги, чтобы обеспечить эффективные и точные решения задачи определения параметров маневрирования для МКА с учетом таких критериев, как энергоэффективность и точность расчета и поиска оптимальных траекторий перелета между заданными орбитами с целью минимизации расхода топлива. Для этого разрабатываются математические модели управляемого относительного движения МКА, математические модели движения МКА с двигателем малой тяги, математические постановки задачи расчета параметров маневров МКА, оснащенного двигателем малой тяги и численно-аналитические методы для решения задачи оптимального маневрирования МКА, оснащенного двигателем малой тяги. В рамках решения задачи оптимизации траектории МКА, при наличии ограничении на ориентацию вектора реактивного ускорения (трех- и двухканальное управление) используются принцип максимума Понтрягина и метод продолжения по параметру, чтобы получить аналитическое и численное решение задачи оптимизации траектории КА с двигателем ограниченной мощности и ограниченной тяги. Метод продолжения по параметру, основанный на ньютоновской гомотопии между искомой системой нелинейных уравнений и системой нелинейных уравнений с известным решением позволяет редуцировать краевую задачу для рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений к задаче Коши, при которой требуется интегрировать вложенные системы дифференциальных уравнений. Для решения задачи оптимального маневрирования, аналитические и числено-аналитические методы позволяют вычислить параметры маневров, выполняемых на нескольких витках с применением двигателя малой тяги. Эти маневры направлены на обеспечение перелета активного КА в пределы заданной области пассивного космического объекта. Данные подходы отличаются простотой и высокой надежностью в определении параметров маневров, что делает их применимыми на борту КА. Параметры маневров могут быть уточнены с помощью итерационной процедуры, чтобы учесть все возмущения. Основной акцент данной работы сделан на последовательном применении аналитических, численных и численно-аналитических методов для решения различных задач механики полета КА с ДУ малой тяги. В результате работы удалось разработать комплекс аналитических, численных и численно-аналитических методов для решения широкого круга оптимизационных задач маневрирования КА с ЭРДУ с улучшенными характеристиками по сходимости, затратам топлива и скорости. Практическая область применения полученных результатов относится к решению задач сближения и стыковки КА, движущихся по околокруговым орбитам, реализации группового полета нескольких КА, формирования заданной конфигурации спутниковых систем, при удалении космического мусора, при обслуживании КА и другие.

DISSERTATION ABSTRACT

This dissertation is dedicated to the development of methods for calculating the maneuvers of small spacecraft (SSC) equipped with low-thrust engines to ensure effective and accurate solutions for determining maneuvering parameters. The focus is on criteria such as energy efficiency and calculation accuracy, as well as finding optimal transfer trajectories between given orbits to minimize fuel consumption. To achieve these objectives, the following are developed: mathematical models of controlled relative motion of SSCs, mathematical models of SSC motion with low-thrust engines, mathematical formulations for calculating SSC maneuver parameters, and numerical-analytical methods for solving the optimal maneuvering problem of SSCs equipped with low-thrust engines. In the context of optimizing SSC trajectories, under constraints on the orientation of the thrust acceleration vector (three- and two-axis control), Pontryagin's maximum principle and the parameter continuation method are employed to obtain analytical and numerical solutions to the optimization problem for spacecraft trajectories with limited thrust and power. The parameter continuation method, based on Newtonian homotopy between the desired system of nonlinear equations and a system with a known solution, allows reducing the boundary value problem for the considered system of ordinary differential equations to a Cauchy problem, requiring the integration of nested systems of differential equations. For solving the optimal maneuvering problem, analytical and numerical-analytical methods are developed to compute the parameters of maneuvers performed over several revolutions using low-thrust engines. These maneuvers aim to ensure the transfer of an active SSC to the vicinity of a designated passive space object. The proposed approaches are characterized by simplicity and high reliability in determining maneuver parameters, making them suitable for onboard implementation on spacecraft. The maneuver parameters can be refined using an iterative procedure to account for all perturbations. The main emphasis of this work is placed on the consistent application of analytical, numerical, and numerical-analytical methods to solve various problems in spacecraft flight mechanics with low-thrust propulsion. As a result of the research, a set of analytical, numerical, and numerical-analytical methods has been developed for solving a wide range of optimization problems related to SSC maneuvering with electric propulsion systems. These methods demonstrate improved convergence characteristics, reduced fuel consumption, and faster execution. The practical application of the results extends to solving problems such as rendezvous and docking of spacecraft moving in near-circular orbits, conducting group flights of multiple SSCs, forming a specified configuration of satellite systems, removing space debris, spacecraft servicing, and other related missions.