

**Мамонов Антон Алексеевич**

**Инволютивные алгоритмы вычисления базисов Грёбнера в  
приложении к исследованию модели Лотки–Вольтерры**

Специальность 1.2.2 — «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук

Работа выполнена на кафедре математического моделирования и искусственного интеллекта в Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта факультета физикоматематических и естественных наук Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы (РУДН)

**Салпагаров Солтан Исмаилович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, Институт лазерных и плазменных технологий НИЯУ МИФИ, профессор кафедры прикладной математики,

**Крянев Александр Витальевич,**

доктор физико-математических наук, доцент, Тверской Государственный Университет, профессор кафедры общей математики и математической физики

**Цирулёв Александр Николаевич,**

кандидат физико-математических наук, доцент, Объединённый институт ядерных исследований, начальник сектора №2 научного отдела вычислительной физики старший научный сотрудник

**Айриян Александр Сержикович**

Защита диссертации состоится «25» сентября 2026 г. в 13 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 208.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы по адресу: 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, дом 6.

Автореферат разослан «    » \_\_\_\_\_ 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

ПДС 0200.006,

к.ф.-м.н., доцент

М.Н. Геворкян

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Характерной чертой современных исследований в области математического моделирования является внимание к явлениям, обусловленным их нелинейностью. Одним из самых красивых примеров нелинейных осцилляторов является многовидовая модель конкуренции и миграции типа Вольтерры-Лотки, описывающая эволюцию нескольких взаимодействующих популяций с учётом их миграции между ареалами. Анализ режимов такой системы – поиск точек равновесия, исследование их устойчивости, отыскание периодических траекторий – сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений. Эти исследования естественным образом упираются в необходимость быстро, точно и без потери корней решать системы нелинейных алгебраических уравнений. Возникающие при решении нелинейных систем трудности зачастую закрывают весьма перспективные с теоретической точки зрения подходы, вносят значительные погрешности, которые не дают возможности понять, какие явления обусловлены нелинейностью модели, а какие – погрешностями при решении систем нелинейных уравнений.

Одним из характерных примеров таких систем служат многовидовые модели конкуренции и миграции типа Вольтерра. В частности, в работах [1] рассматриваются модели вида « $k$  конкурентов -  $k$  областей миграции», описываемые нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобные системы допускают несколько стационарных режимов – сосуществование популяций либо вытеснение части из них; вблизи точек равновесия наблюдаются как затухающие переходные процессы, так и периодические колебания. Отыскание стационарных режимов и исследование их устойчивости сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений.

Фундаментальная и, вероятно, неразрешимая проблема состоит в том, что не существует универсального численного метода решения систем нелинейных уравнений с несколькими неизвестными, которые бы не теряли корни, не добавляли новых, правильно учитывали кратности, разрешали близкие корни и т.п. Именно так сформулировали ее авторы знаменитых «Численных рецептов». Такое положение дел требует создания по возможности универсального метода для решения систем нелинейных уравнений без описанных недостатков. Предпосылка к этому решению уже существует — это сочетание численных и символьных алгоритмов. По существу в современных системах компьютерной алгебры, напр., Sage, Maple, Mathematica, реализована схема решения систем нелинейных уравнений, имеющих конечное число решений, которую, несколько огрубляя, можно описать так:

1. от системы уравнений переходят к порожденному ей идеалу и в символьном виде находят его базис Гребнера в лексикографическом порядке,
2. по последнему элементу базиса Гребнера численно находят все значения для самой младшей переменной, подставляют найденные значения в базис Гребнера, затем обычно из предпоследнего уравнения обычно удается найти предпоследнюю переменную и т.д.

Нетрудно заметить, что эти шаги представляют собой обобщения прямого и обратного прохода метода Гаусса решения системы линейных уравнений с той существенной поправкой, что прямой ход делается аналитически, а обратный — численно. Следует заметить, что численно решается уравнение с одной неизвестной, а эта задача хорошо проработана.

**Объектом исследования** данной диссертационной работы являются популяционная динамика, нелинейные математические модели, описывающие взаимодействие популяций, их стационарные и периодические режимы.

**Предметом исследования** этой работы являются методы, алгоритмы и программные средства для исследования нелинейных моделей популяционной динамики — нахождения их стационарных и периодических режимов.

### **Степень разработанности темы**

Со стороны математического моделирования, задача моделирования популяций рассматривалась еще восемьсот лет назад. В работах Леонардо Фибоначчи, "Трактате о счете задача о размножении кроликов положила начало знаменитым числам Фибоначчи. В работах эпохи возрождения, прирост населения рассматривали как геометрическую прогрессию, и стали предлагать различные решения по ограничению такого прироста. Вскоре были сформулированы две основные модели популяционной динамики — модель логистического роста, и модель взаимодействия видов Лотки-Вольтерра.

В дальнейшем на основе этих моделей была построена масса других, более сложных, обобщающих или же специфичных, как в рамках популяционной динамики, так и вне ее. Классическая модель хищник-жертва [2; 3], модели химических реакций [4], и другие.

В конце 20-го века моделирование популяций вышло на новый этап. Индустриализация и взрывной рост население человечества значимо сказались на природных экосистемах, что сделало задачу прогнозирования таких последствий как никогда актуальной. В то же время, развитие вычислительной техники расширило количественный и качественный инструментарий исследователей, что в том числе коснулось и моделирования популяций. Объединение этих факторов вылилось в возникновение и интенсивное развитие имитационного моделирования [5].

Со временем, однако, энтузиазм нового направления был исчерпан. Имитационная модель, по определению стремящаяся имитировать конкретный объект, при переносе на другой объект, даже родственной природы, часто требует внесения значительных изменений. Ограниченные возможности имитационного моделирования подтолкнули сообщество экологов к разумному скептицизму и возрождению интереса к классическому математическому моделированию.

Однако на текущий момент все хорошо изученные математические модели имеют одну общую черту – они являются либо линейными, либо нелинейны лишь в малой степени. Причины тому очевидны – отсутствие способа решать описывающие их системы уравнений. В то же время, масса научно- и практически значимых задач лежит именно в рамках многомерных нелинейных задач – реальные ареалы обитания насчитывают десятки видов, в то время как современные инструменты позволяют уверенно моделировать только однозначное число видов.

Задача об отыскании базиса Гребнера заданного идеала была сформулирована и решена алгоритмически Бухбергером в 1970-х годах. В настоящее время строго доказано, что алгоритм Бухбергера позволяет найти базис Гребнера за конечное число шагов, однако оценка его вычислительной сложности является экспоненциальной [6]. На практике на современном компьютере его удается применять только для решения систем не очень большой степени и с не более чем десятком неизвестных.

В 1990-х годах были разработаны различные улучшения алгоритма по нахождению базиса Гребнера. Многие из них являются коммерческими, и недоступны для большинства исследователей. Среди свободного программного обеспечения выгодно выделяется отечественная разработка – система GInv. В основе этой системы лежит оригинальная концепция инволютивного базиса идеала, возникшая при сравнении алгоритма Бухбергера и методов, используемых при исследовании совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных. Сама концепция была описана в работах Жаркова, Гредта и Блинкова [7–11]. Ей была посвящена докт. дисс. Блинкова [12], где приведены все необходимые теоремы и их доказательства, а самое современное изложение дано в [13].

Названная альтернатива алгоритму Бухбергера была реализована на компьютере Гердтом и Блинковым в ЛИТ ОИЯИ (Дубна) в 2000-х годах, что привело к созданию 1-ой версии системы GInv, написанной на C. В 2020-х годах Блинков продолжил работу над этой системой, уделяя особое внимание работе с длинной арифметикой и сборке мусора, так появилась 2-ая версия GInv, доступная в репозитории [14]. Совсем недавно появилась версия, написанная полностью на Python и доступная на том же репозитории. Параллельно с этим, в рамках этого диссертационного исследования, на базе GInv была разработана система GInvDist [A10], поддерживающая дистанционное развертывание через репозиторий PyPI.

В настоящее время вычисление инволютивного базиса в реальных задачах может занимать несколько дней, требовать десятки ГБ памяти. При этом пользователь не видит никаких сообщений, системный монитор тоже ему не помогает: после быстрого занятия десятка ГБ памяти наступает долгое время затишья, когда работает 1 ядро и кажется, что все «зависло». Фактически вычисления, проводившиеся несколько дней, могут быть остановлены пользователем как бесперспективные за минуту до получения ответа. Поэтому прогнозирование времени, необходимого для завершения вычислений, является очень важной задачей. К ее решению нельзя привлекать экспоненциальные оценки, полученные в теории, но можно и нужно привлекать методы машинного обучения.

За последние два десятилетия было высказано множество гипотез о том, как ускорить вычисления инволютивного базиса и/или сэкономить ресурсы. Это привело к возникновению различных версий и форков, что требует создания удобного инструмента, позволяющего на репрезентативной базе сравнивать эти версии друг с другом. Такая база тестовых примеров была собрана ещё в 2000-х годах Гердтом и Блинковым, однако до сих пор не создано никакого инструмента для автоматического тестирования и сравнения этих версий. Поэтому совершенно необходимо разработать инструмент для автоматического тестирования, сравнения и отбраковки таких идей. Создание такого программного обеспечения позволит в течение месяцев решить вопрос об удачности той или иной гипотезы, направленной на ускорение вычислений или экономию ресурсов.

**Целью** данной работы является разработка эффективного численного метода для изучения нелинейных математических моделей популяции, таких как модель Лотки-Вольтерры, на основе инволютивного алгоритма вычисления базиса Гребнера, и тестирование этого метода в виде реализации программного комплекса.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод для исследования математических моделей популяционной динамики на основе численно-символьного решения системы нелинейных уравнений через нахождение базиса Гребнера.
2. Изучить обобщения понятия деления многочленов; построить оригинальное изложение теории инволютивного деления на основе понятия линейного деления.
3. Разработать программный инструмент для выполнения инволютивного алгоритма вычисления базиса, а также автоматического тестирования алгоритмов и сбора данных о полиномиальных идеалах..

4. Используя разработанный инструмент сравнить эффективность классического алгоритма Бухбергера (Sage) и инволютивного алгоритма (GInvDist).
5. Выполнить оригинальное исследование о нахождении стационарных решений для популяционных моделей, найденных через вычисление базиса Гребнера.
6. Выполнить оригинальное исследование о нахождении периодических решений для динамических систем, найденных по методу Кагана, также через вычисление базиса Гребнера.

#### **Научная новизна:**

1. Предложен оригинальный численно-символьный метод исследования моделей популяционной динамики.
2. На основе системы GInv создана оригинальная система GInvDist, с внесением правок в модули: poly, gb, Janet; и поддержкой установки в виде библиотеки открытого кода.
3. С использованием разработанного инструментария получены оригинальные результаты для шестимерной модели "четыре конкурента, два ареала миграции".
4. Было выполнено оригинальное исследование зависимости времени вычисления для различных алгоритмов нахождения базисов Гребнера, в зависимости от различной конфигурации оборудования, программного обеспечения, и выбранных мономиальных порядков.

#### **Практическая значимость**

1. Практическая значимость проведенного исследования заключается в разработке и программной реализации алгоритма для нахождения стационарных и периодических режимов для моделей популяционной динамики. Для ряда моделей были получены результаты, соответствующие ранее полученным другими авторами, но с демонстрацией выигрыша по времени вычислений. Для шестимерной модели "четыре конкурента - два ареала миграции" получены ранее не доступные результаты.
2. Сформированная в рамках диссертации база тестов из систем нелинейных уравнений и специализированного скрипта представляет собой в достаточной степени универсальный инструмент для верификации и оценки эффективности различных программных реализаций алгоритмов нахождения базиса Гребнера. Созданные программные средства собраны в пакет GInvDist и опубликованы в открытом репозитории библиотек PyPI (Python Package Index). Подобная форма публикации позволила существенно снизить порог вхождения для использования системы и расширить круг потенциальных пользователей среди специалистов в области математического моделирования.

3. Разработанные методы предсказания времени вычислений на основе численных характеристик полиномиальных идеалов могут быть использованы для оптимизации распределения ресурсов в высокопроизводительных вычислительных системах.
4. Результаты диссертации могут быть использованы при создании учебных курсов по темам «Математическое моделирование» и «Компьютерная алгебра».

### **Методология и методы исследования.**

В работе использовались методы математического моделирования, популяционной динамики, компьютерной алгебры. Также использовались технологии разработки программного обеспечения. Собрана и опубликована база примеров и набор данных об их решениях в разных конфигурациях, в формате JSON. Символьные и численные вычисления выполнялись в системах компьютерной алгебры  $GInv$  и Sage; созданные в рамках диссертационного исследования инструменты были объединены в пакет  $GInvDist$ .

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для математических моделей в популяционной динамике предложен оригинальный численно-символьный метод для изучения стационарных и периодических режимов, путем нахождения базиса Гребнера.
2. Дано обобщение понятия деления в полиномиальных идеалах в виде понятия линейного деления. На его основе представлено оригинальное изложение теории инволютивного деления в полиномиальных идеалах.
3. Реализован программный комплекс  $GInvDist$ , объединяющий систему компьютерной алгебры  $GInv$  с системой тестирования и модулем для прогнозирования времени вычисления и выбора оптимальных параметров на основе структурных характеристик полиномиального идеала.
4. На основе результатов компьютерных экспериментов выполнено сравнение эффективности классического алгоритма вычисления базиса Гребнера (алгоритм Бухбергера) в системе Sage и инволютивного алгоритма в системе  $GInv$ , показано влияние выбора мономиального порядка и типа деления на вычислительную сложность задачи. Показана необходимость предварительной классификации полиномиальных идеалов для оптимизации проводимых вычислений.
5. Проведено оригинальное исследование стационарных и периодических режимов многовидовой модели конкуренции и миграции типа Вольтерра с использованием разработанных инструментов. Показано, что система  $GInv$  позволяет более эффективно находить искомые режимы, по сравнению с стандартным алгоритмом Бухбергера.

**Достоверность** результатов диссертации опирается на проверку выдвигаемых гипотез компьютерными экспериментами. Полученные результаты были опубликованы в рецензируемых журналах. Везде, где это возможно, проводилось сравнение теоретических изысканий с результатами компьютерных экспериментов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: международной конференции по полиномиальной компьютерной алгебре, РСА, Санкт-Петербург, 2024-2025 гг.; международной конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения", Казань, 27 июня – 1 июля 2024 г.; конференции имени Трифонова «Программирование и вычислительная математика», посвященная 100-летию со дня рождения Николая Павловича Трифонова.

**Личный вклад.** Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, выполнил оригинальное расширение исследования шестимерной модели "четыре конкурента - два ареала миграции" на основе работы [1], реализовал численно-символьный метод исследования моделей популяционной динамики, доказал ряд теорем о свойствах инволютивного деления, самостоятельно разработал и реализовал систему GInvDist, провел серию компьютерных экспериментов, разработал метод для предсказания времени нахождения базисов Гребнера.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 7 работах – в 5 печатных изданиях, в том числе в 2 изданиях, индексируемых в Web of Science (Q1) и Scopus (Q1), в 3 изданиях, входящих в перечень РУДН; а также в двух свидетельствах о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации 131 страниц текста с 26 рисунками и 13 таблицами. Список литературы содержит 52 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена математическому моделированию популяционной динамики. Рассматривается эволюция данного направления, от первых моделей, к современным работам. Приводятся примеры различного применения моделей, в том числе за пределами моделирования непосредственно популяций, например, для циклических химических реакций.

Особое внимание уделяется моделям типа "к конкурентов – k ареалов миграции и производным от них моделям.

Одна из основных моделей популяционной динамики — модель Лотки-Вольтерры была создана в середине 1920-х годов двумя выдающимися учеными. Альфред Лотка разработал свою собственную версию этой модели в 1925 году [2], и Вито Вольтерра независимо друг от друга создали аналогичную модель в 1926 году [3].

В диссертационной работе Васильевой И.И. [1] исследуется семейство многомерных моделей типа "к конкурентов - k областей миграции". Для простого случая рассмотрим  $k = 2$ : два конкурирующих вида обитают в основном ареале и могут мигрировать в соответствующие миграционные убежища. Упрощенная четырехмерная модель (два конкурента - два убежища) задается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - px_1^2 - rx_1x_3 + \beta x_2 - \beta x_1, \\ \dot{x}_2 = ax_2 - px_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2, \\ \dot{x}_3 = ax_3 - px_3^2 - rx_1x_3 + \delta x_4 - \delta x_3, \\ \dot{x}_4 = ax_4 - px_4^2 + \delta x_3 - \delta x_4 \end{cases} \quad (1)$$

где  $x_1, x_3$  плотности популяций конкурирующих видов в общем ареале обитания;  $x_2, x_4$  плотности популяций этих видов в миграционных убежищах;  $a$  – коэффициент естественного прироста, в данном случае одинаковый для всех популяций;  $p$  – коэффициент внутривидовой конкуренции, также одинаковый для обоих видов;  $r$  – коэффициент межвидовой конкуренции;  $\beta, \delta$  коэффициенты миграции. В [1], методом дифференциальной эволюции получают следующие значения для параметров модели:  $a = 4.656449$ ,  $p = 0.582056$ ,  $r = 2.561047$ ,  $\beta = 4.365421$ ,  $\delta = 2.037196$ .

В диссертационном исследовании демонстрируется применение численно-символьного метода решения системы нелинейных уравнений на основе поиска базиса Гребнера. Нахождение базиса в лексикографическом порядке позволяет найти корни для одной переменной и, через обратную подстановку, найти решения для всей системы. В контексте моделей популяционной динамики это позволяет находить стационарные режимы изучаемой модели.

Состояния равновесия системы 1 являются корнями полиномиальной алгебраической системы, полученной путем приравнивания левых частей к нулю – нулевые производные популяций означают отсутствие изменений, что и является состоянием равновесия для модели.

Альтернативой является использование метода с построением базиса Гребнера [6; 15]. Зададим идеал  $I = [f_1, \dots, f_m]$  в кольце многочленов  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Тогда базис Гребнера такого идеала, с использованием лексикографического порядка, будет иметь вид треугольной (ступенчатой) декомпозиции системы: последний элемент базиса будет зависеть только

Таблица 1 — Состояния равновесия для **1**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$S_1$	0	0	0	0
$S_2$	0	0	8.000	8.000
$S_3$	8.000	8.000	0	0
$S_4$	0	0	2.436	-1.436
$S_5$	0	0	-1.436	2.436
$S_6$	1.419	3.522	4.021	6.625
$S_7$	5.788	6.843	0.813	5.062
$S_8$	1.000	3.000	5.000	7.000

от одного неизвестного -  $x_n$ . Одно из предшествующих значений в свою очередь будет зависит только от  $x_n$  и  $x_{n-1}$ , и так далее. Это позволяет последовательно находить все корни с помощью процедуры обратной подстановки.

Дополнительным преимуществом является точность. Корни последнего элемента базиса в системе SageMath представлены в виде алгебраических чисел: система представляет значения в виде корней алгебраического уравнения и может вычислять их числовое значение с произвольной заданной точностью (команда **n(x, digits=k)**).

Воспроизведем систему **1** в окружении SageMath. Для простейшего случая можно использовать встроенную функцию **variety()**:

```
x = var('x1, x2, x3, x4')
a = 4.656449; p = 0.582056; r = 2.561047
b = 4.365421; d = 2.037196
eqs = [
    a*x1 - p*x1^2 - r*x1*x3 + b*x2 - b*x1,
    a*x2 - p*x2^2 + b*x1 - b*x2,
    a*x3 - p*x3^2 - r*x1*x3 + d*x4 - d*x3,
    a*x4 - p*x4^2 + d*x3 - d*x4
]
Dics = (QQ[x]*eqs).variety(AA)
```

Команда **variety(AA)** непосредственно находит все вариации значений переменных  $x$ , которые превращают порождающие идеала,  $eqs$ , в ноль. Аргумент AA определяет использование алгебраических чисел. Результаты расчетов представлены в табличном виде.

Таким образом, метод находит 8 равновесных состояний **1**, из которых 3 не содержат нулевых популяций. В [1] численными методами также были обнаружены три состояния равновесия с ненулевыми составляющими:  $S_8(0.99, 2.99, 5.06, 7.04)$ ,  $S_9(1.44, 3.55, 4.00, 6.64)$ ,  $S_{10}(5.81, 6.87, 0.81, 5.08)$ . Сравнение показывает, что точки  $S_6, S_7, S_8$  в настоящей работе соответствуют точкам  $S_{10}, S_9, S_8$  и легко узнаваемы.

В работе также рассматривается более сложный пример – шестимерная модель "четыре конкурента - две области миграции" ((3.7) из работы [1] с предлагаемым набором параметров).

Задается система:

```
x=var('x1,x2,x3,x4,x5,x6')
a1=9.87107026, a2=9.97602024, a3=9.94653833
a4=9.96876543, a5=1.42213144, a6=7.54755514
p11=0.10331098, p22=0.10190956, p33=0.14403938
p44=0.10093958, p55=2.44771688, p66=4.59652965
p13=0.12519358, p31=0.10242677, p56=0.97589257
p65=0.27400194, q15=0.10455808, q16=0.10524564
q35=0.11179302, q36=0.1032072, d15=6.31530649
d35=7.24952535, d16=8.66821615, d36=8.96873736
b=3.47237116, g=3.53131469, d=3.15533821, e= 3.04329167
eqs = [
    a1*x1 - p11*x1^2 - p13*x1*x3 - q15*x1*x5 - q16*x1*x6 + b*x2 - g*x1,
    a2*x2 - p22*x2^2 + g*x1 - b*x2,
    a3*x3 - p33*x3^2 - p31*x1*x3 - q35*x3*x5 - q36*x1*x6 + e*x4 - d*x3,
    a4*x4 - p44*x4^2 + d*x3 - e*x4,
    a5*x5 - p55*x5^2 - p56*x5*x6 + d15*x1*x5 + d35*x3*x5,
    a6*x6 - p66*x6^2 - p65*x5*x6 + d16*x1*x6 + d36*x3*x6,
]
```

Далее объявляется кольцо полиномов переменных и над ним задается идеал в соответствии с уравнениями:

```
P = PolynomialRing(QQ, variables, order='lex')
J=P*[P(eq) for eq in eqs]
```

Находится базис Гребнера:

```
B=J.groebner_basis()
```

Последний элемент базиса всегда зависит лишь от одного неизвестного:

```
B[-1]
```

$$x_6^{33} - 148 \dots 872/801 \dots 385 * x_6^{32} - \dots$$

Моном  $x_6^{32}$  здесь имеет коэффициент с 182 знаками в числителе и 179 знаками в знаменателе.

Теперь, для нахождения корней уравнения, соответствующего последнему элементу базиса, выполним следующую команду:

```
Roots = QQ[x6](B[-1]).roots(AA, multiplicities=False)
```

```
Roots
```

```
[-148.94?, -142.45?, -77.77?, -77.16?, -74.88?, -30.17?, -13.25?, -13.18?, 0, 0.55?, 0.74?, 1.64?, 1.64?, 10.97?, 12.27?, 21.05?, 37.41?, 38.28?, 52.34?, 70.07?, 100.89?]
```

Теперь можно приступить к процедуре обратной замены, воссоздавая полные корни для нашей системы.

Также отмечается, что в рамках решения этой вычислительной задачи было выполнено сравнение классического алгоритма нахождения базиса Гребнера (в системе Sage построение базиса заняло 205 секунд) и инволютивного алгоритма (в системе GInvDist вычисления выполнились за 0,67 секунды). Получаем для данной задачи и параметров оборудования выгоду в использовании инволютивного алгоритма в  $\tilde{300}$  раз.

Далее в работе рассматривается представление модели популяции в виде нелинейного осциллятора и поиск ее периодических режимов по схеме Кагана и по схеме средней точки.

Так, например, для уравнения:

$$x'' = F(x)$$

Которое также можно записать в виде:

$$x' = y,$$

$$y' = F(x).$$

Используемая схема средней точки:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{dt}{2}(y_{k+1} + y_k),$$

$$y_{k+1} - y_k = F\left(\frac{y_{k+1} + y_k}{2}\right)dt.$$

Эта схема дает периодическую последовательность с периодом  $ndt$  в том и только в том случае, когда

$$x_n = 0, y_n = y_0$$

Таким образом, для построения приближенного периодического решения необходимо определить количество точек  $N$ , после чего построить систему нелинейных уравнений. Эти уравнения можно записать в виде  $2N$  полиномов, которые, в свою очередь, можно объединить в идеал, для которого найти базис Гребнера, что сведет решение системы нелинейных уравнений к решению одного нелинейного уравнения.

Ниже представлен код для одного из рассматриваемых в диссертации примеров, где  $N = 5$ :

```

def get_osc_5():
    return [
        10*x1 - T*y1 - T,
        -10*x1 + 10*x2 - T*y1 - T*y2,
        -10*x2 + 10*x3 - T*y2 - T*y3,
        -10*x3 + 10*x4 - T*y3 - T*y4,
        -10*x4 - T*y4 - T,
        40*y1 - 40 + T*x1**3,
        -40*y1 + 40*y2 + T*x1**3 + T*x2**3
            + 3*T*x1**2*x2 + 3*T*x1*x2**2,
        -40*y2 + 40*y3 + T*x2**3 + T*x3**3
            + 3*T*x2**2*x3 + 3*T*x2*x3**2,
        -40*y3 + 40*y4 + T*x3**3 + T*x4**3
            + 3*T*x3**2*x4 + 3*T*x3*x4**2,
        -40*y4 + 40 + T*x4**3
    ]

```

Объявим полиномиальное кольцо над 9 переменными, а от него – идеал с полученными полиномами. Выполним поиск базиса Гребнера реализованным в Sage алгоритмом Бухбергера, при этом засекая затраченное время.

```

В [29]: R.<x1, x2, x3, x4, y1, y2, y3, y4, T> = PolynomialRing(GF(32003))
I = R.ideal(get_osc_5(), order='deglex')

now = datetime.datetime.now()
print('Start', now)
G = buchberger(I)
now = datetime.datetime.now()
print('Finish', now)
print(G)

Start 2025-04-30 13:30:41.159108
Finish 2025-04-30 13:52:12.779552
Polynomial Sequence with 192 Polynomials in 9 Variables

```

Рисунок 1 — Результат вычислений Sage для осциллятора ( $N = 5$ )

Из результатов вычислений [1](#) видно, что общее время вычислений заняло 21.5 минут, или 1291 секунд. В диссертации также приведена решения для данной задачи на системе GInvDist, выполняющая построение за 273 секунды при запуске на том же оборудовании [2](#).

Таким образом, для решения системы уравнений по задаче об эллиптическом осцилляторе, с параметром  $N = 5$ , система GInvDist дает результат в 4.73 раза быстрее, чем классический алгоритм, выполненный через Sage.

```

user@pcrd1:~/notebooks/ginv/pyginv6 python3 osc.py
Grobner Basis:
y2*-1 + y3,
y1*-1 + y4,
x3*20 + x4*-20 + T*-1,
x2*20 + x4*20 + T,
x1*-1 + x4*-1,
y4*T*-1 + x4*-10 + T*-1,
y3*T*2 + x4*-20 + T*-1,
y3*y4*-2 + y4**2*-2 + y3*2 + y4 + 1,
y3**2*-2 + y4**2*2 + y3*-1 + y4,
x4*y3*-2 + x4*y4*-2 + x4*-1,
T**4 + y4**3*27200000 + y4**2*238080000 + y3*-130880000 + y4*-248640000 + -165760000,
x4**3 + y4**3*-3840000 + y4**2*-2816000 + y3*1600000 + y4*3056000 + 2000000,
x4**2*T**2 + y4**3*32000 + y4**2*20800 + y3*-12800 + y4*-24000 + -16000,
x4**2*T + y4*-40 + 40,
y4**4*40 + y4**3*-132 + y4**2*-24 + y3*64 + y4*117 + 55,
x4**y4**3*400 + x4*y4**2*260 + x4*y4*-140 + x4*-125 + T*-1,
x4**2*y4**2*4000 + x4**2*y4*-1400 + x4**125 + T**2,
x4**2*y4*40000 + x4**3*-54000 + x4**2*T*-5400 + x4**T**2*-125 + T**3*-1,
x4**4*-1 + y4**2*-4 + 4,
y2, y1, x3, x2, x1, y4*T, y3*T, y3*y4, y3**2, x4*y3, T**4, x4**3, x4**2*T**2, x4**3*T, y4**4, x4*y4**3, x4**2*y4**2, x4**3*y4
+ x4**4
crit1 = 2773 crit2 = 3835
time: 273.06
user@pcrd1:~/notebooks/ginv/pyginv6

```

Рисунок 2 — Результат вычислений GInv для осциллятора ( $N = 5$ )

Во второй главе излагается математическая основа численно-символьного метода для решения систем нелинейных уравнений, используемого для исследования моделей. Приводятся базовая терминология, касающаяся базисов Гребнера полиномиальных идеалов и процесса их построения. Далее дается оригинальное изложение теории инволютивного деления, используемого для построения инволютивного базиса, сводимого к базису Гребнера.

Одним из ключевых понятий в рассматриваемых алгоритмах будет упорядочение мономов. Если в случае полиномов от одной переменной задача порядка является тривиальной, то для полиномов от нескольких переменных необходимо четко обозначить используемый порядок. Такое упорядочение должно быть линейным и должно сохранять порядок между мономами при домножении на одинаковые термы. Таким образом,

**Определение 1.** Линейное отношение порядка  $<$  на множестве мономов называется допустимым, если выполнены следующие условия:

1.  $(\forall u \in M)[1 < u]$ ;
2.  $(\forall u, v, w \in M)[u < v \rightarrow uw < vw]$ .

Имея заданный порядок, мы можем обозначить  $lm(p)$  как старший моном полинома  $p$ , т.е. первый моном по всем выбранным порядкам,  $lt(p)$  – старший терм, т.е. старший моном без коэффициента,  $lc(p)$  – наоборот, старший коэффициент.

Примером допустимого мономиального упорядочения может служить упорядочение мономов от одной переменной по степени. Его наиболее применяемыми обобщениями на случай многих переменных являются: лексикографическое ( $< lex$ ) и сначала по полной степени и затем обратное лексикографическое ( $< degrevlex$ ).

Для полиномов от одной переменной было достаточно перебрать все возможные редукций с использованием стандартного деления. Для полиномов от многих переменных это сделать невозможно, так как в данном случае деление мономов не имеет линейного упорядочения по умолчанию.

Возможна ситуация, когда образующие идеала имеют старшие мономы, которые не позволяют провести взаимную редукцию непосредственно, но при этом редукция может быть осуществлена с помощью определенной комбинации этих образующих. В таком случае дополним определение базиса с помощью выбираемого упорядочения:

**Определение 2.** Для допустимого упорядочения  $\prec$  конечное множество  $G \subset R$  называется базисом Гребнера идеала  $(G) \in R$ , если

$$(\forall f \in (R))(\exists g \in G)[lm(g)|lm(f)].$$

Алгоритмическое решение задачи построения базисов Гребнера было предложено Бухбергером [15]. Для этого было введено определение  $S$ -полинома:

**Определение 3.** [15]  $S$ -полиномом для  $f, g \in R$  называется комбинация

$$Spoly(f, g) = (lcm(lm(f), lm(g))/lt(f))f - (lcm(lm(f), lm(g))/lt(g))g.$$

Эту комбинацию будем считать остатком от деления  $f$  на  $g$ .

**Теорема 1.** [15] Пусть  $(G)$  — некоторый полиномиальный идеал. Тогда базис  $G = g_1, \dots, g_m$  идеала  $(G)$  является базисом Гребнера тогда и только тогда, когда для всех пар  $i \neq j$  остаток от деления  $Spoly(g_i, g_j)$ , где  $g_i, g_j \in G$ , равен нулю.

Исходя из этой теоремы, можно предложить алгоритм построения базисов Гребнера. Как и в случае полиномов от одной переменной, задача о принадлежности идеалу решается в два этапа.

**Определение 4.** Алгоритм Бухбергера для нахождения базиса полиномиального идеала  $I$  с образующими от кольца  $F[x_1, \dots, x_n]$ :

1.  $G = F$ .
2. Для каждой пары полиномов  $g_i, g_j \in G$  найдем результат редукции  $Spoly(g_i, g_j)$  - остаток от деления полиномов.
3. Продолжим редуцировать  $Spoly$ , рассматривая для этого различные комбинации полиномов из  $G$  пока не получим не редуцируемый остаток. Если он не равен нулю, добавим его к  $G$ .
4. Повторим шаги 2 и 3 для всех возможных пар полиномов в  $G$ , включая новые полиномы, добавляемые на шаге 3.

После исчерпания всех возможных пар,  $G$  — базис Гребнера.

Данный алгоритм имеет экспоненциальную вычислительную сложность, а также использует экспоненциальные объемы памяти.

Далее в диссертации вводится обобщающее понятие линейного деления для полиномов.

Условимся обозначать как  $P_{fin}(M)$  множество всех конечных подмножеств множества  $M$ , причем для определенности будем считать, что

$\emptyset \in P_{fin}(M)$ , и что в рассматриваемых подмножествах ни один из элементов  $M$  не повторяется дважды.

Пусть  $k$  — произвольное поле,  $X = [x_1, \dots, x_n]$  — список независимых переменных, а  $M$  — множество всех мономов кольца  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Тогда любое множество  $G \in P_{fin}(k[x_1, \dots, x_n])$  порождает идеал, который мы будем обозначать как  $\langle G \rangle$ . При этом  $G$  называется базисом идеала  $\langle G \rangle$ .

Пусть на  $M$  задан некоторый мономиальный порядок ( $<$ ) и пусть

$$\text{lm } G = \{\text{lm}(g) \quad \forall f \in G\}.$$

Будем всюду предполагать, что в  $G$  нет двух многочленов, имеющих один и тот же старший моном, тогда

$$G \in P_{fin}(k[x_1, \dots, x_n]) \Rightarrow \text{lm } G \in P_{fin}(M).$$

Заметим, что базис идеала нетрудно преобразовать так, чтобы выполнялось указанное условие.

**Определение 5.** Линейное деление  $L$  — это бинарное отношение на множестве  $U \times M$ , обладающее следующими свойствами: для любых  $u, v \in U \in P_{fin}(M)$  и  $w \in M$  верно

1. если  $uLw$ , то  $u$  делит  $w$  в обычном смысле,
2.  $uLu$ ,
3. если  $uLw$  и  $vLw$ , то  $uLv$  или  $vLu$ ,
4. если  $uLv$  и  $vLw$ , то  $uLw$

*Замечание.* Символ  $L$  мы будем использовать так же, как символ обычного деления  $|$ . В символьном выражении символ  $L$  имеет наивысший приоритет по сравнению с арифметическими действиями и вычислением с старшего монома и т.п.

В кольце  $k[x_1]$  обычное деление удовлетворяет аксиомам, определенным для инволютивного деления в тексте диссертации, и является линейным. Однако, при  $n > 1$  обычное деление не является линейным и это и явилось препятствием на пути применения алгоритма Евклида в кольцах многочленов многих переменных.

Следует подчеркнуть, что в силу аксиомы 1

$$uLw \Rightarrow u|w,$$

но

$$u|w \not\Rightarrow uLw.$$

Не всякий обычный делитель является делителем в смысле линейного деления. Это — плата за единственность делителя, указанную в аксиоме 3 определения 5.

Далее, в диссертационном исследовании приводятся ряд теорем и их доказательства для линейного деления. Так, например, доказываются теоремы о редуцируемых суммах, остатках от деления, симметрии относительно перестановок, цепном критерии.

**Определение 6.** Конечную сумму, где каждое слагаемое в сумме представляет собой произведение константы  $c \in k$ , монома  $m \in M$  и многочлена  $g \in G'$ , причем  $\text{lm } g$  делит линейно произведение  $m \cdot \text{lm } g$ , будем называть редуцируемой суммой.

Условимся, что в редуцируемой сумме слагаемые вида  $cmg$  и  $c'mg$  всегда приведены к  $(c + c')mg$ . Множество всех редуцируемых сумм образует бесконечномерное линейное пространство, будем обозначать как  $R(G)$ .

Приняв это определение, мы можем сказать, что остаток  $r$  обладает следующими свойствами:

1.  $f = r + s$ , где  $s$  — редуцируемая сумма или нуль,
2. все мономы, входящие в  $r$ , не делятся на мономы  $\text{lm } G$  в смысле определения 5.

**Лемма 1.** Пусть  $f$  — ненулевая редуцируемая сумма, тогда в ней найдется такое слагаемое  $cmg$ ,  $c \in k$ ,  $m \in M$ ,  $g \in G'$ , что

$$\text{lt}(f) = cm \text{lt}(g).$$

*Доказательство.* Пусть

$$f = \sum cmg \in R.$$

Тогда для некоторого  $g \in G'$  верно

$$\text{lm}(f) = m \text{lm}(g).$$

Вообще говоря, в сумме может быть несколько слагаемых, дающих старший моном. Допустим, что

$$\text{lm}(mg) = \text{lm}(m'g'), \quad g \neq g'.$$

Обозначим этот моном как  $w$ , тогда

$$\text{lm}(g)Lw, \quad \text{lm}(g')Lw.$$

В силу аксиомы 3 определения 5 это означает, что или  $\text{lm } g$  делит  $\text{lm } g'$ , или  $\text{lm } g'$  делит  $\text{lm } g$ . Ни то, ни другое невозможно, поскольку  $g, g' \in G'$ . Поэтому старший член дает в точности одно слагаемое.  $\square$

**Теорема 2.** Остаток от деления  $f$  на  $G$  равен нулю тогда и только тогда, когда  $f$  — редуцируемая сумма.

*Доказательство.* В одну сторону теорема уже доказана выше. Для доказательства в обратную сторону, допустим, что

$$f = \sum cmg \in R.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\text{lt}(f) = cm \text{lt}(g).$$

Но тогда на первом шаге алгоритма Евклида мы избавимся от одного из слагаемых из суммы. Следующие шаги избавят нас от оставшихся слагаемых ровно по тем же причинам.  $\square$

**Теорема 3.** Остаток от деления на  $G$  суммы двух многочленов равен сумме их остатков.

*Доказательство.* Положим  $f_3 = f_1 + f_2$ , тогда в силу теоремы 2

$$f_i = r_i + s_i, \quad s_i \in R, \quad i = 1, 2, 3,$$

поэтому

$$r_1 + r_2 - r_3 = s, \quad s \in R.$$

Если сумма  $s$  – ненулевая, то в силу леммы 1 ее старший моном равен  $m \text{lm } g$ , то есть делится на  $\text{lm } g$  в смысле определения 5. С другой стороны старший моном  $r_1 + r_2 - r_3$  является одним из мономов  $r_1, r_2$  или  $r_3$ . По построению ни один из этих мономов не делится  $\text{lm } g$  в смысле определения 5. Поэтому  $r_1 + r_2 - r_3 = 0$ .  $\square$

Далее в диссертации определяются коническое и инволютивное деление, как производные от линейного. Рассматриваются разные виды инволютивного деления. Для них также доказываются соответствующие теоремы, наследуемые от линейного деления, а также определяется характеристические петли и рассматривается цепной критерий Гердта-Блинкова.

**Третья глава** посвящена описанию комплекса программ, разработанного в ходе диссертационного исследования, и используемого для построения инволютивных базисов полиномиальных идеалов. Разделе 3.1 описывается система  $G\text{Inv}$ , разработанная Блинковым Ю.А., а также работа разработка и реализация системы  $G\text{InvDist}$  – авторского развития программного комплекса.

$G\text{Inv}$  - это программная система, предназначенная для нахождения инволютивного базиса идеалов над кольцами многочленов. Она основана на вариации алгоритма Бухбергера для нахождения базиса Гребнера для полиномиальных идеалов. Гердт, Жарков и Блинков предложили новую версию алгоритма Бухбергера, основанную на инволютивном делении, которая подробно обсуждалась в первой главе диссертации Блинкова. В

2000-х годах для реализации этого алгоритма было создано программное обеспечение GInv, которое использовалось для решения ряда задач математической физики. Недавно это программное обеспечение было обновлено, протестировано и модифицировано для использования в более широких областях.

Текущая обновленная версия системы GInv работает на языке Python, версии Python3.1 и более поздней. Для этого требуется установка библиотек NumPy и SymPy для численных и символьных вычислений, а также библиотеки GraphViz, которая используется для визуализации в некоторых случаях использования. Использование библиотеки GraphViz опционально, и может быть опущено – в таком случае не будет выполняться визуализация построения деревьев Жакане, однако основной функционал будет сохранен.

Основные классы системы – Monom, Poly и GB - отражают суть мономов, или, скорее, термов, многочленов и базиса Гребнера, соответственно. Их основные компоненты и взаимосвязи отражены на диаграмме классов 3.

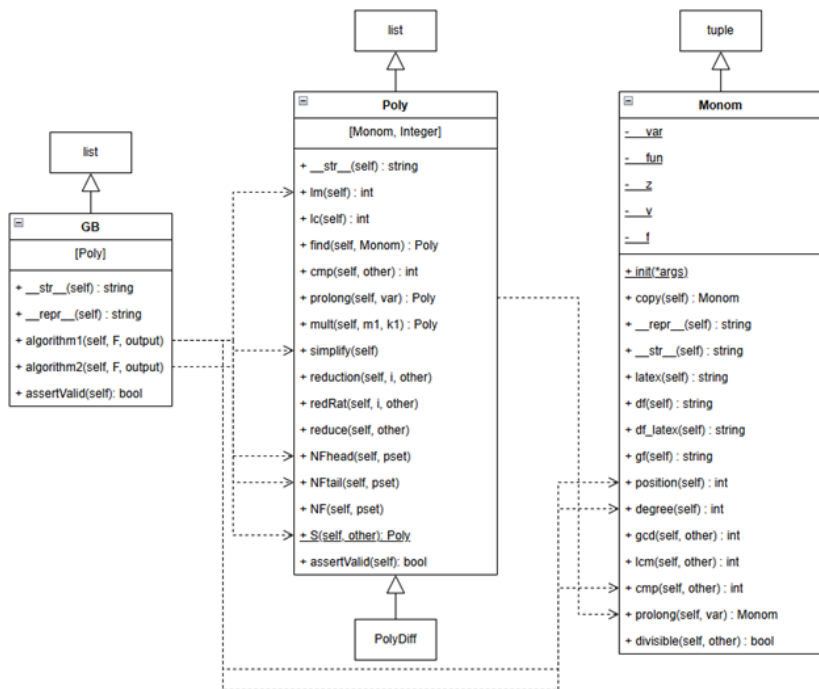


Рисунок 3 — Диаграмма основных классов системы GInv.

В диссертации также подробно рассматривается работа ключевых функций программного комплекса. Например, последовательность выполнения команд различными классами в процессе работы `algorithm2` продемонстрирована на диаграмме последовательности действий 4, с первым шагом более подробно разобранным на блок-схеме 5.

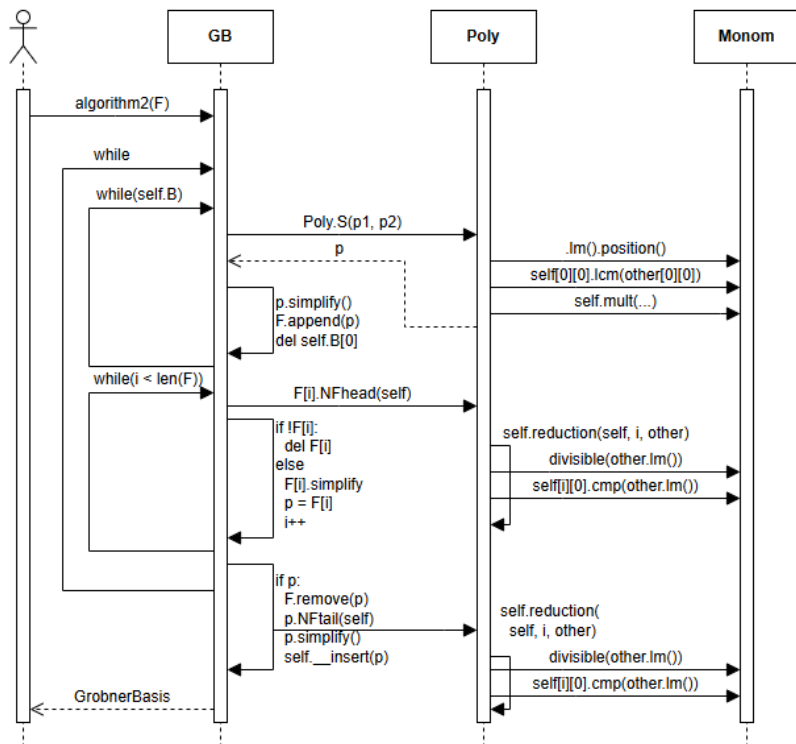


Рисунок 4 — Последовательность работы функции `algorithm2`

В рамках диссертационного исследования актуальная версия системы `GInv` была доработана, дополнена комментариями, приведена в стабильное состояние, и выложена на отдельном репозитории [A10], под именем `GInvDist`.

Далее, эта версия системы была сжата в пакет и опубликована в `PyPI` – открытом репозитории библиотек на языке `Python`.

Для установки данной библиотеки достаточно выполнить команду `pip install ginvdist`. Это автоматически обновляет требуемые для работы системы `GInv` библиотеки – `NumPy`, `SymPy` и `GraphVis`. При использовании классических сред разработки, например `PyCharm`, необходимо выполнить

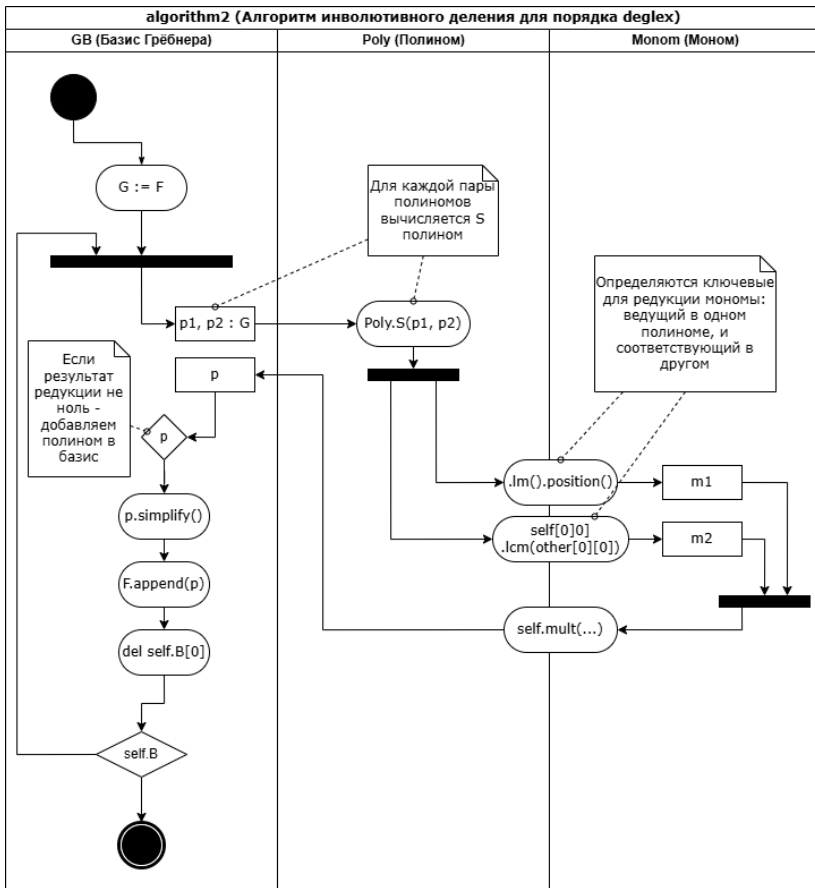


Рисунок 5 — Блок-схема первой ступени algorithm2

данную команду в системном терминале. Для сред на основе интерактивных блокнотов, таких как Jupyter Notebook или Google Colab, ту же команду можно выполнить в блоке кода, с указанием «!» в начале:

```
!pip install ginvdist
```

Во всех разделах диссертации, при работе с популяционными моделями или же при проведении вычислительных экспериментов, использование инволютивного алгоритма выполняется посредством именно системы GInvDist. В разделах 3.2 и 3.3 приводится порядок и результаты тестирования данной системы.

В **четвертой главе** приведено описание ряда вычислительных экспериментов, выполненных с использованием системы GInvDist. Был сформулирован ряд гипотез о зависимости вычислительной сложности построения

базисов полиномиального идеала от различных параметров проводимых вычислений, будь то конфигурация оборудования, или же параметры используемого алгоритма.

Основной набор тестов состоит из 135 тестовых файлов. В список тестов включены вариации известных задач, таких как: система Роуза, модель общего экономического равновесия; обобщенная задача о собственных значениях; система Лоренца, и другие. Эти тесты включают в себя задачи по алгебраическим системам из теории кодирования, химической кинетики и робототехники. Тесты хранятся в файлах формата JSON.

Общее время успешно проведенных вычислений среди всех платформ – 270134, секунд, что соответствует 75 часов непрерывных вычислений. При этом значительное количество времени было потрачено на вычисления, не увенчавшиеся успехом.

*Замечание.* Большинство тестов, решаемых классическим алгоритмом за разумное время, решаются им на порядок быстрее, чем инволютивным. В то же время, существуют тесты, решаемые за разумное время только с использованием инволютивного деления. Из полученных результатов заметно, что рост вычислительной сложности для инволютивного алгоритма имеет более градиентный вид, в то время как для классического алгоритма происходит крайне резкий всплеск вычислительной сложности.

Все полученные результаты отображены на следующем графике 6:

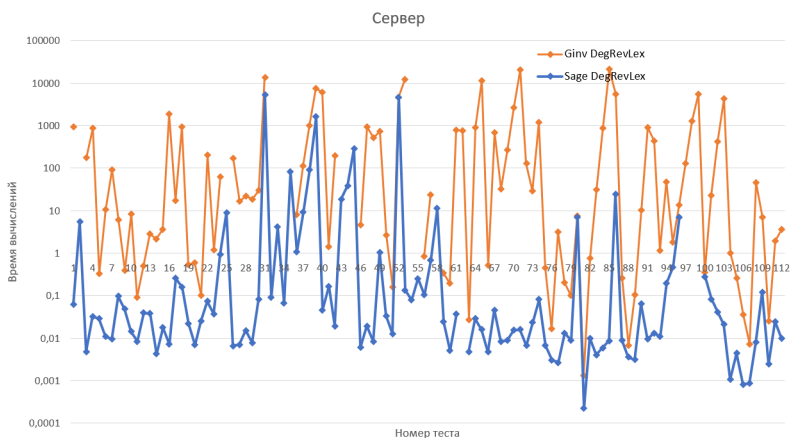


Рисунок 6 — Зависимость времени вычисления от длины базиса

На основе полученных по результатам экспериментов данных ставится вопрос о возможной предварительно классификации задач по вычислительной сложности или же наиболее подходящим для выполнения вычислений параметрам.

В диссертации вводится следующее определение:

**Определение 7.** Внешней характеристикой идеала будем считать какое-либо числовое значение, вычисляемое за полиномиальное время на основе образующих идеал полиномов.

Далее рассматривается ряд таких характеристик, как встречающихся в работах других авторов, так и предложенных самостоятельно. С полученным набором характеристик и имеющимися данными о времени и используемой памяти для вычисления базисов, проводится корреляционный анализ.

Наиболее высокое значение корреляция Пирсона имеет для разбиения по классам на решенные и нерешенные (т.е. превысившие максимальное время вычислений в два часа) для следующих характеристик: среднее количество мономов на полином, среднее и максимальное количество литеров в мономе. Среднее количество литеров в мономе достигает рекордного значения корреляции = 0.49.

В совокупности, результаты, полученные в ходе исследования выдвинутых гипотез, позволяют задаться вопросом о реализации автоматизированной системы для классификации вычислительных задач и алгоритмов [A2], и их последующего сопоставления.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

Достигнута цель исследования, заключающаяся в разработке эффективного численного метода для изучения нелинейных математических моделей популяции, таких как модель Лотки-Вольтерры, на основе инволютивного алгоритма вычисления базиса Гребнера, и тестировании этого метода в виде реализации программного комплекса.

В рамках настоящего диссертационного исследования были решены следующие задачи:

1. Разработан численно-символьный метод решения системы нелинейных уравнений для исследования математических моделей популяционной динамики, основанный на вычислении базиса Гребнера.
2. Изучено обобщение понятия деления многочленов; приведено оригинально изложение теории инволютивного деления на основе понятия линейного деления.
3. Разработан и реализован программный комплекс, выполняющий вычисление базиса Гребнера с использованием инволютивного алгоритма, а также позволяющий проводить автоматизированное тестирование.
4. Выполнено сравнение эффективности классического алгоритма Бухбергера (Sage) и инволютивного алгоритма (GInvDist).

5. Выполнено оригинальное исследование о нахождении стационарных решений для популяционных моделей, найденных через вычисление базиса Гребнера.
6. Выполнено оригинальное исследование о нахождении периодических решений для динамических систем, найденных по методу Кагана, также через вычисление базиса Гребнера.

Рассматривается нахождение стационарных и периодических приближённых решений для задач типа нелинейного осциллятора, что показывает применимость разработанных инструментов как к задачам поиска точек равновесия, так и к задачам построения периодических траекторий.

Работа подтверждает перспективность использования инволютивных алгоритмов для решения систем нелинейных уравнений.

## Публикации автора по теме диссертации

### В изданиях из списка ВАК РФ

- A1. Разработка системы для оценки производительности алгоритмов компьютерной алгебры при нахождении базисов Грёбнера [Текст] / Ю. А. Блинков [и др.] // КИО. — 2024. — № 2.

### В изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

- A2. *Блинков, Ю. А.* Реализация автоматизированной системы классификации и оценки эффективности алгоритмов вычисления базисов Грёбнера [Текст] / Ю. А. Блинков, С. И. Салпагаров, А. А. Мамонов // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова. — 2025. — С. 56–67.
- A3. OperatorEYEVP: Operator Dataset for Fatigue Detection Based on Eye Movements, Heart Rate Data, and Video Information [Текст] / S. Kovalenko [и др.] // Sensors. — 2023. — Т. 23, № 13. — URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/13/6197>.
- A4. Intelligent Human Operator Mental Fatigue Assessment Method Based on Gaze Movement Monitoring [Текст] / A. Kashevnik [и др.] // Sensors. — 2024. — Т. 24, № 21. — URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/24/21/6805>.

### В сборниках трудов конференций

- A5. *Егорова, Д. В.* Разработка, исследование и реализация моделей популяции постельных клопов [Текст] / Д. В. Егорова, А. А. Мамонов // Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2024. — Moscow, 04.2024. — С. 422–427.
- A6. Автоматизация тестирования системы компьютерной алгебры GInv [Текст] / Ю. А. Блинков [и др.] // Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2024. — Moscow, 04.2024. — С. 422–427.
- A7. *Blinkov, Y. A.* The software GInv for calculating involutive bases of polynomial ideals [Текст] / Y. A. Blinkov, S. I. Salpagarov, A. A. Mamonov // International Conference on Polynomial Computer Algebra. — St. Petersburg, 04/2024.
- A8. About GInv, software for calculating involutive basis of polynomial ideals [Текст] / A. Mamonov [и др.] // Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», Казань. — Казань, 06.2024.

- A9. *Malykh, M. D.* To the theory of involutive divisions [Текст] / М. Д. Малих, А. А. Мамонов // International Conference on Polynomial Computer Algebra. — St. Petersburg, 09/2025.

## В прочих изданиях

- A10. Страница программного комплекса GInvDist на репозитории Гит-хаб [Текст]. — URL: <https://github.com/TheMumblingMammoth/GInvDist> (дата обр. 21.02.2026).
- A11. Страница программы для тестирования системы GInv на репозитории Гит-хаб [Текст]. — URL: [https://github.com/MamonovAnton/ginv\\_testing](https://github.com/MamonovAnton/ginv_testing) (дата обр. 22.09.2025).
- A12. *Mamonov, A. A.* Application of Grobner bases for finding accurate states of equilibrium of migration and population models [Текст] / А. А. Мамонов // Mathematical Modelling and Geometry. — 2026. — Т. 14, № 1. — С. 1—8.

## Список литературы

1. *Vasilyeva, I. I.* Qualitative and numerical study of multidimensional migration and population models with competition [Текст] : дис. ... канд. / Vasilyeva I. I. — Moscow : RUDN university, 2026. — In Russian.
2. *J., L. A.* Elements of Physical Biology [Текст] / L. A. J. — Baltimore: Williams, Wilkins, 1925.
3. *V., V.* Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically [Текст] / V. V. // Nature. — 1926. — Т. 118. — С. 558—560.
4. *Жаботинский, А. М.* Концентрационные автоколебания [Текст] / А. М. Жаботинский. — Москва : Издательство Наука», 1974.
5. *Моисеев, Н. Н.* Математика ставит эксперимент [Текст] / Н. Н. Моисеев. — Москва : «НАУКА ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, 1977.
6. *Cox, D.* Ideals, varieties, and algorithms [Текст] / D. Cox, J. Little, D. O'Shea. — 3rd ed. — Springer, 2007.
7. *Blinkov, Y.* Specialized computer algebra system GINV [Текст] / Y. Blinkov, V. Gerdt // Programming and Computer Software. — 2008. — Т. 34. — С. 112—123.
8. *Gerdt, V. P.* DInvolutive divisions of monomials [Текст] / V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov // Программирование. — 1998. — Т. 24, № 6. — С. 22—24.
9. *Gerdt, V. P.* Involutive Bases of Polynomial Ideals [Текст] / V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov // Preprint JINR E5-97-3. — Dubna, 1997.

10. *Zharkov, A. Y.* Involution approach to solving systems of algebraic equations [Текст] / A. Y. Zharkov, Y. A. Blinkov // Proceedings of the 1993 International IMACS Symposium on Symbolic Computation. — Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, France, 1993. — С. 11—16.
11. *Zharkov, A. Y.* Involutive Polynomial Bases: General Case [Текст] / A. Y. Zharkov // Preprint JINR E5-94-224. — Dubna, 1994.
12. *Blinkov, Y. A.* Involutive methods for studying models described by algebraic and differential equation systems [Текст] : дис. ... канд. / Blinkov Yu. A. — Saratov, 2023. — In Russian.
13. *Gerdt, V. P.* Involutive Division Generated by an Antigraded Monomial Ordering [Текст] / V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov // Computer Algebra in Scientific Computing / под ред. V. P. Gerdt [и др.]. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011. — С. 158—174.
14. Страница системы GInv на репозитории Гит-хаб [Текст]. — URL: <https://github.com/blinkovua/GInv> (дата обр. 22.09.2025).
15. *Buchberger, B.* Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenrings nach einem nulldimensionalen Polynomideal [Текст] : дис. ... канд. / Buchberger B. — Universit"at Innsbruck, 1965.

*Мамонов Антон Алексеевич*

**Инволютивные алгоритмы вычисления базисов Грёбнера в приложении  
к исследованию модели Лотки–Вольтерры**

Диссертационная работа посвящена разработке эффективного численного метода для изучения нелинейных математических моделей популяционной динамики на основе вычисления базисов Грёбнера. Выполнено оригинальное исследование о нахождении стационарных и периодических режимов популяционных моделей. Проведён детальный анализ инволютивного подхода к вычислению базисов Грёбнера, включая описание классического и инволютивного алгоритма нахождения базиса Грёбнера, определение понятия инволютивного деления, приведение доказательства сводимости инволютивных базисов к базисам Грёбнера. Доказан ряд теорем о линейном и инволютивном делении полиномов, а также о свойствах остатков от таких делений. Выдвинут и подтверждён ряд гипотез о различной вычислительной сложности нахождения базиса для различных мономиальных порядков и делений. Реализован программный комплекс GInvDist на языке Python, с использованием библиотеки символьных вычислений SymPy, опубликованный в открытом репозитории пакетов Python PyPI.

*Mamonov Anton*

**Involutive algorithms for computing Gröbner bases in application to the study  
of the Lotka–Volterra model**

The thesis is devoted to the development of an effective numerical method for studying nonlinear mathematical models of population dynamics based on the calculation of Gröbner bases. An original study has been conducted on finding stationary and periodic modes of population models. A detailed analysis of the involutive approach to the calculation of Gröbner bases has been performed, including a description of the classical and involutive algorithms for finding the Gröbner basis, the definition of the concept of involutive division, and a proof of the reducibility of involutive bases to Gröbner bases. Several theorems about linear and involutive division of polynomials, as well as about the properties of the residues from such divisions, have been proved. Several hypotheses about the different computational complexity of finding a basis for different monomial orders and divisions have been put forward and confirmed. The GInvDist software package has been implemented in Python using the SymPy symbolic computation library and published in the open Python package repository PyPI.