

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Российский университет дружбы народов»

На правах рукописи

Кройтор Олег Константинович

**Символьно-численное исследование поляризованного  
электромагнитного излучения в волноведущих системах**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Малых Михаил Дмитриевич

Москва — 2023

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Методы исследования задач математической физики и их реализация в системах компьютерной алгебры . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1 Краевые задачи математической физики . . . . .	12
1.2 Метод сопряжения . . . . .	14
1.3 Метод Галеркина . . . . .	17
1.3.1 Тригонометрический базис . . . . .	18
1.3.2 Метод конечных элементов . . . . .	22
1.4 Применение метода конечных элементов в случае разрывных коэффициентов . . . . .	24
1.5 Многомерное обобщение . . . . .	29
<b>Глава 2. Исследование поверхностных волн Дьяконова в системе компьютерной алгебры Sage . . . . .</b>	<b>32</b>
2.1 Поверхностные волны . . . . .	33
2.2 Волны, бегущие вдоль плоскости . . . . .	35
2.3 Исследование системы алгебраических уравнений . . . . .	41
2.4 Исследование системы алгебраических уравнений и неравенств . . . . .	45
2.5 Результаты компьютерных экспериментов . . . . .	52
2.6 Заключение . . . . .	53
<b>Глава 3. О дисперсионной кривой волновода, заполненного неоднородным веществом . . . . .</b>	<b>54</b>
3.1 Задача о собственных модах резонатора . . . . .	54
3.2 Задача о нормальных модах волновода . . . . .	58
3.2.1 Скалярная модель . . . . .	58
3.2.2 Векторная модель . . . . .	60
3.3 Тестовый пример: SLE моды волновода прямоугольного сечения с двумя слоями . . . . .	64
3.3.1 Слоистый волновод прямоугольного сечения . . . . .	64
3.3.2 Уравнения Максвелла в слое . . . . .	65
3.3.3 Граничные условия . . . . .	67

	Стр.
3.3.4 Условия сопряжения . . . . .	68
3.3.5 Тестовый пример . . . . .	68
3.4 Связь между бегущими и стоячими модами . . . . .	71
3.5 Вычисление собственных мод цилиндрических резонаторов . . . . .	74
3.5.1 Цилиндрические полые резонаторы . . . . .	74
3.5.2 Вычисление мод цилиндрического резонатора, заполненного неоднородным веществом . . . . .	78
3.6 Построение дисперсионной кривой волновода . . . . .	81
3.7 Вычисление точек дисперсионной кривой волновода в системе Sage	87
3.8 Заключение . . . . .	90
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>Список таблиц . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>Приложение А. Результаты компьютерных экспериментов . . . . .</b>	<b>106</b>

## Введение

**Актуальность темы.** Ряд прикладных задач, среди которых первой следует назвать передачу информации по оптическому волокну, требуют развития методов исследования все более детальных математических моделей, описывающих распространение монохроматических волн в направляющих структурах. В рамках линейной скалярной модели исследование спектральных свойств электромагнитных волн приводит к исследованию спектра самосопряженного оператора, методы исследования которого хорошо развиты. Напротив, при учете векторного характера электромагнитного излучения в рассматриваемых диэлектриках, возникают сложные задачи, не принадлежащие к какому либо известному типу. При введении анизотропии появляются весьма необычные решения, напр., волны Дьяконова, которые дали повод говорить о структуре света. Поэтому исследование моделей распространения волн в направляющих структурах в полной электромагнитной постановке представляет собой актуальную задачу, требующую или развития новых методов решения ранее неисследованных математических задач, или новых форм записи задач, подпадающих под известные методы.

**Степень разработанности темы.** Распространение поляризованного электромагнитного излучения описывается математической моделью, состоящей из уравнений Максвелла и оснащения, включающего коэффициенты  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$ , граничные условия и условия сопряжения на разрывах коэффициентов. Направляющие структуры формируют каналы распространения электромагнитного излучения в теории без потерь за счет особым образом сформированных направляющих структур, описываемых выбором коэффициентов  $\hat{\epsilon}$  и  $\hat{\mu}$  и граничных условий («стенок»).

В случае изотропного заполнения (когда  $\epsilon$  и  $\mu$  — скаляры) в качестве направляющих структур выступают волноводы, открытые и закрытые. Наиболее разработанной является модель закрытого волновода, заполненного оптически однородным веществом, заключенным в цилиндр с идеально проводящими стенками. В такой идеальной системе электромагнитная энергия распространяется вдоль оси без потерь. В классических работах Тихонова и Самарского [1—5] было показано, что монохроматическое электромагнитное излучение в таких системах представляет собой суперпозицию нормальных мод ТЕ и ТМ типов,

представляющих собой волны, бегущие вдоль оси с различными показателями фазового замедления [6].

В 1980-х годах вошли во всеобщее употребление закрытые волноводы, имеющие диэлектрические сердечники или жилы. Простейшей моделью открытых волноводов являются закрытые волноводы с фиктивными стенками [7; 8]. Исследование нормальных мод закрытого волновода, заполненного, оптически неоднородным, но изотропным веществом, может быть сведено к спектральной задаче для несамосопряженного операторного пучка, указанной в работах Ю.Г. Смирнова [9–11], С.Б. Раевского [12; 13], А.Г. Свешникова, А.Н. Боголюбова и А.Л. Делицына [14–16], М.Д. Малых [17–20]. Одни авторы используют потенциалы, другие те или иные тройки компонент электромагнитного поля, это приводит к различным формам записи спектральной задачи. Форма, предложенная А.Л. Делицыным [14; 21], удобна тем, что она сводит исследование нормальных мод к исследованию спектра квадратичного несамосопряженного пучка, подпадающего под условия теоремы М.В. Келдыша о полноте системы корневых векторов операторных пучков [22]. Это позволило доказать полноту системы нормальных мод волновода и перенести ряд результатов Тихонова и Самарского на волноводы с сердечниками и жилами.

Применение метода усечения к исследованию модели волновода, записанной в такой форме, приводит к исследованию спектра несамосопряженной матрицы. В компьютерных экспериментах (С.Б.Раевский [12], А.Л. Делицын [23], М.Д. Малых, Д.В. Диваков, А.А. Тютюнник [24]) можно наблюдать появление всех явлений, характерных для несамосопряженных спектральных задач, в т.ч. появление комплексных собственных значений и присоединенных векторов. В теории колебаний и квантовой механике появление несамосопряженных матриц и комплексных собственных значений связано с введением диссипации [25]. Однако в рассматриваемой модели волновода диссипации нет и физический смысл этих явлений не вполне ясен и может быть связан с дефектами приближенных методов отыскания собственных значений несамосопряженных матриц. Это подталкивает к поиску иных постановок спектральной задачи теории волноводов, в стремлении как можно ближе подойти к самосопряженной спектральной задаче для полого волновода, указанной Тихоновым и Самарским.

В докторской диссертации М.Д. Малых [26] была предложена самосопряженная модель распространения электромагнитных волн в волноводе,

учитывающая их векторный характер, но не учитывающая гибридизацию нормальных мод: здесь был опущен член, который мешает расщеплению задачи на две, описывающие поля TE и TM типов. Этот член тождественно равен нулю для случая оптически однородного заполнения. Однако, напр., в прямоугольном слоистом волноводе можно построить аналитически два семейства нормальных мод (гибридных мод), не являющихся полями ни TE, ни TM типов. Эти семейства получили название мод SLE и SLH типа [27–30]. Можно развить теорию возмущения, понимая этот член как малую добавку [31], однако это не снимает главного вопроса: допускает ли задача о нормальных модах в волноводе без диссипации самосопряженную постановку?

В случае анизотропного заполнения (когда  $\epsilon$  и  $\mu$  — тензоры), в том числе кристаллического [32] и жидкокристаллического [33–35], простор для устройства направляющих структур оказывается еще шире, а результаты уходят еще дальше от скалярного случая.

Одной из самых неожиданных находок этого рода стало открытие волн Дьяконова, сделанное сначала в теории [32], а потом и экспериментально [36; 37]. Эти волны распространяются вдоль плоской границы раздела изотропного вещества с постоянной диэлектрической проницаемостью, и анизотропного кристалла, тензор диэлектрической проницаемости которого имеет ось симметрии, направленную вдоль границы раздела. Эти волны — монохроматические, коэффициент фазового замедления не зависит от частоты, а возможные направления распространения вдоль плоскости раздела лежат в небольшом угле, ось и раствор которого зависят от выбора сред. Исследование волн Дьяконова сводится к исследованию некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств [38–40].

До настоящего момента эта система исследовалась только численно. Трудности с потерей корней и обретением новых при применении численных методов решения систем алгебраических уравнений хорошо известны [41]. Однако в современных системах компьютерной алгебры (СКА), таких как Sage и GInv [42; 43], имеется богатый инструментарий для аналитического исследования систем алгебраических уравнений, основанный на технике базисов Грёбнера [44; 45]. Можно предположить, что исследование системы, описывающей волны Дьяконова, в СКА позволит выписать решения в конечном виде, что в будущем существенно упростит и ускорит проектирование устройств, использующих волны Дьяконова с заданными свойствами.

Таким образом, как в изотропном, так и в анизотропном случаях имеются хорошо разработанные непрерывные математические модели, описывающие распространение монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах. Однако при исследовании этих моделей численными методами теряются важные свойства этих моделей, что приводит к появлению разного рода артефактов. Устранение этих затруднений можно достигнуть путем разработки новых методов, в которых значительная часть вычислений производится символьно или, во всяком случае, с сохранением важнейших алгебраических свойств исходной модели.

**Целью** настоящей диссертации является разработка и реализация в системе компьютерной алгебры Sage символьно-численных методов исследования распространения монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах.

Для достижения поставленной цели были рассмотрены две модели — модель закрытого волновода с оптически неоднородным заполнением, и модель, описывающая возникновение волны Дьяконова, и необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать метод сведения исследования нормальных мод закрытого волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации к исследованию спектра самосопряженной матрицы.
2. На основе этого метода разработать численный метод решения построения дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации и реализовать его в виде комплекса программ в СКА Sage.
3. Верифицировать разработанную программу на примерах, в которых возникают гибридные моды.
4. Разработать символьно-аналитические методы исследования алгебраической модели поверхностных волн Дьяконова и реализовать его в виде комплекса программ в СКА Sage.

**Научная новизна:**

1. В рамках полной электромагнитной модели закрытого волновода, заполненного оптически неоднородным веществом, разработан метод исследования нормальных мод, который сводит исследование нормальных мод волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы с учетом гибридизации мод. Ход дисперсионной кривой, вычисленной

по этому методу, соответствует теоретическим предсказаниям и лишен артефактов (ухода в комплексную область).

2. Решение системы алгебраических уравнений, описывающих поверхностные волны Дьяконова, и исследованной ранее численно [38—40], описано аналитически в радикалах.

### **Теоретическая и практическая значимость**

1. Решение системы уравнений, описывающей поверхностные волны Дьяконова, в символьном виде будет полезно в дальнейших теоретических исследованиях поверхностных волн. Эти результаты также используются в курсе «Компьютерная алгебра» как удачный пример, демонстрирующий сильную сторону техники базисов Гребнера.
2. Отыскание самосопряженной постановки спектральной задачи теории волноводов существенно упрощает расчеты характеристик волноводов, заполненных оптически неоднородным веществом. Эта постановка открывает новые возможности для исследования задачи о волноводной дифракции, которые еще предстоит исследовать.

**Методология и методы исследования.** Для исследования моделей распространения монохроматических поляризованных волн в направляющих структурах используются два надежных метода — метод сопряжения и метод Галеркина, хорошо зарекомендовавших себя на скалярных моделях теории волноводов. Эти исследования подразумевают использование современных вычислительных средств и проводятся в системе компьютерной алгебры Sage. Применение метода Галеркина к исследованию спектральных задач подразумевает выполнение двух операций:

1. вычисления матричных элементов,
2. вычисления спектра матричного пучка.

Первый шаг очень удобно делать в системах компьютерной алгебры, однако второй выполняется стандартными решателями надежно, то есть без появления вычислительных артефактов, только для самосопряженного случая. Поэтому для успешного достижения цели важно найти решение первой из сформулированных выше задач диссертации — свести исследование нормальных мод закрытого волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы. Для этого используется повышение размерности задачи по методу, предложенному М.Д. Малых. Вслед за работами [38—40] для исследования волн Дьяконова используется метод сопряжения полей. Для решения систем возникающих при

этом нелинейных уравнений используется техника базисов Грёбнера, позволяющая свести решение системы нелинейных уравнений к одному уравнению относительно одной неизвестной. В современной компьютерной алгебре эта техника является общепринятой [44].

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработан, реализован в виде комплекса программ и верифицирован новый метод решения задачи построения дисперсионной кривой закрытого волновода, заполненного оптически неоднородным, но изотропным веществом. Этот метод сводит исследование задачи к задаче на собственные значения самосопряженной матрицы и в то же время учитывает гибридизацию нормальных мод.
2. В серии компьютерных экспериментов показано, что предложенный метод верно описывает гибридные моды прямоугольного слоистого волновода.
3. Выписана и решена в радикалах система уравнений, описывающих волны Дьяконова, бегущие вдоль поверхности раздела анизотропного и изотропного вещества.
4. На основе этого решения разработан и реализован в СКА Sage символично-численный метод исследования волн Дьяконова. Результаты компьютерных экспериментов согласуются с полученными ранее численными методами.

**Обоснованность и достоверность полученных результатов.** Обоснованность результатов диссертации опирается на теоретические исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в рецензируемых профильных журналах.

Символьно-численные и численные вычисления интегралов, определителей и решений систем дифференциальных уравнений, проведенные в работе, выполнялись с помощью методов и функций, встроенных в СКА Sage. Величина погрешности полученных численных значений для матричных элементов обеспечивается программным обеспечением, встроенным в СКА Sage, и находится на уровне ошибки округления.

Достоверность полученных результатов исследования обеспечивается и подтверждается их соответствием с результатами вычислений в тестовых примерах, полученными другими авторами:

- Область существования волн Дьяконова, найденная на основе оригинального выражения для решения в радикалах, совпадает с найденной ранее.
- Среди вычисленных по оригинальному алгоритму мод волновода прямоугольного сечения, заполненного слоями, идентифицированы SLE моды. Сами SLE моды вычислены методом сопряжения по указаниям из монографии В.Т. Чоу [27]. Показано, что часть точек дисперсионной кривой, вычисленных по предложенному в диссертации символьно-численному алгоритму, ложатся на дуги дисперсионной кривой для SLE мод, построенной аналитически по методу сопряжения. Сам пример SLE мод представлен, поскольку эти моды — гибридные. Совпадение результатов означает, что оригинальный алгоритм правильно описывает явление гибридизации мод.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

1. III Международная научно-техническая конференция «Материалы, технологии и техника для освоения Арктики и Сибири», Томск, ТГУ, Россия, 25 – 28 сентября 2019 г.
2. VI Международная конференция и молодежная школа ИТНТ-2020, Самара, СамГУ, Россия, 26 – 29 мая 2020 г.
3. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука – общество – технологии – 2020», Москва, Московский политех, Россия, 20 февраля 2020 г.
4. Polynomial Computer Algebra '2020, Санкт-Петербург, Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Россия, 12–17 октября 2020 г.
5. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука – общество – технологии – 2021», Москва, Московский политех, Россия, 26 марта 2021 г.
6. Polynomial Computer Algebra '2021, Санкт-Петербург, Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Россия, 19–24 апреля 2021 г.
7. VII Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2021», Москва, МИФИ, Россия, 23 – 26 марта 2021 года

8. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», Москва, МГУ, Россия, 12 – 23 апреля 2021 г.
9. SFM'21 – международный симпозиум “Оптика и биофотоника IX”, Саратов, СГУ, Россия, 27 сентября – 1 октября 2021 г.
10. 22nd Workshop on Computer Algebra in memory of Professor Vladimir Gerdt, Дубна, ЛИТ,ОИЯИ, Россия, 24–24 мая 2021 г.
11. Научный семинар «Математическое моделирование» под рук. проф. Л.А.Севастьянова (РУДН, 14 февраля 2023 г.).
12. Научный семинар «Математические методы в естественных науках» под рук. проф. А.Н.Боголюбова (МГУ, 22 февраля 2023 г.).

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в исследовании систем дифференциальных уравнений, определяющих математические модели и в подготовке и представлении статей и докладов по теме работы. Он внёс определяющий вклад в разработку и тестирование алгоритмов, в проведение расчетов и экспериментов, а также в обработке и анализе полученных результатов. Автором был написан код в СКА Sage и проведена серия численных экспериментов. Постановка задачи о волнах Дьяконова принадлежит проф. Л.А. Севастьянову, идея применения техники базисов Гребнера – М.Д. Малых. Задача о нормальных модах волновода со сложным заполнением была предметом исследования докторской диссертации М.Д. Малых. Ему принадлежит идея сведения этой задачи к самосопряженной, реализованная в настоящей диссертации. Основные результаты и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Scopus, 9 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023611606).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 117 страниц, включая 64 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 97 наименований.

# Глава 1. Методы исследования задач математической физики и их реализация в системах компьютерной алгебры

## 1.1 Краевые задачи математической физики

Краевые задачи математической физики представляют собой класс математических моделей, описывающих явления из различных предметных областей, от механики до электродинамики. Эти модели объединяет не только форма записи в виде некоторого уравнения в частных производных с граничными условиями, но и методы ее исследования.

Простейший, но представительный пример краевой задачи представляет задача Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx} \left( q \frac{du}{dx} \right) = f, \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (1.1)$$

на отрезке  $0 < x < 1$ . Здесь  $f, q$  — заданные кусочно-гладкие функции, причем  $q > 0$ , а  $u$  — искомая функция. Эта модель описывает, напр., стационарное распределение температуры  $u$  на стержне или электростатический потенциал  $u$  с заземленными стенками [46; 47].

Если  $q$  и  $f$  являются гладкими, то естественно искать решение задачи (1.1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на  $0 < x < 1$ , непрерывно примыкающих к условиям Дирихле на границе рассматриваемого отрезка. Если же коэффициенты  $q$  и  $f$  уравнения (1.1) не являются гладкими, то на границах разрыва ставят условия сопряжения. Обычно из физических соображений выводят, что должны быть непрерывны  $u$  и выражение  $q \frac{du}{dx}$ . Напр., в задачах о распределении тепла эти величины имеют смысл температуры и потока тепла, которые должны быть непрерывны [46; 47]. Решение дважды непрерывное вне разрывов коэффициентов, удовлетворяющее условиям сопряжения на разрывах, будем называть классическим.

Чтобы доказать существование решения, умножим уравнение (1.1) на гладкую тестовую функцию  $v$ , удовлетворяющую условию Дирихле, и проинтегрируем по  $G$ . После интегрирования по частям и с учетом условий сопряжения

и граничных условий Дирихле, мы получим

$$\int_{x=0}^1 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx = - \int_{x=0}^1 v f dx. \quad (1.2)$$

Обозначим как  $Q^1$  линейное пространство всех непрерывных кусочно гладких функций на отрезке  $[0,1]$  [48]. Выражение, стоящее слева в (1.2), является положительно определенной билинейной формой на  $Q^1$ , поэтому его можно принять за скалярное произведение в  $Q^1$ , а левая часть — линейным функционалом от  $v$ . Поэтому (1.2) можно переписать в виде

$$(u, v) = l(v) \quad \forall v \in Q^1. \quad (1.3)$$

Сказать, что задача (1.3) имеет решение, значит сказать, что линейный функционал  $l$  можно задать как скалярное умножение на некоторый элемент  $u \in Q^1$ . Именно это утверждает теорема Рисса-Фреше [49], в которой имеются два условия. Во-первых, функционал

$$l(v) = - \int_{x=0}^1 v f dx$$

должен быть ограниченным, то есть должна существовать такая константа  $L$ , что

$$|l(v)| \leq L \|v\| \quad \forall v \in Q^1.$$

В данном случае это можно доказать прямо [50; 51]. Во-вторых, линейное пространство должно быть полным (гильбертовым). Однако линейное пространство  $Q^1$  не является полным. Поэтому применению теоремы Рисса-Фреше следует предпослать замыкание пространства  $Q^1$  по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{x=0}^1 \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx.$$

Это замыкание пространства  $Q^1$  называют пространством Соболева и обозначают его как  $H^1$  или, более длинно,  $\overset{\circ}{W}_2^1([0,1])$  [52]. Таким образом, из теоремы Рисса-Фреше следует, что задача (1.3) имеет и притом единственное решение  $u$ , но не в исходном пространстве  $Q^1$ , а в его замыкании — пространстве Соболева  $H^1$ . Это решение называют обобщенным решением задачи (1.1).

Описанный способ доказательства существования и единственности решения краевой задачи был впервые описан Леоном Лихтенштейном в 1914 г. [53] задолго до появления теории пространств Соболева и, как не трудно заметить, фактически не использует понятия обобщенной производной. Разумеется, к тому времени уже были хорошо известны другие способы доказательства этой теоремы, основанные на теории интегральных уравнений [54].

Утверждение о том, что обобщенное решение является классическим, традиционно называют леммой Вейля, хотя Герман Вейль доказал его лишь для одного частного случая — многомерных гармонических функций [51]. Тем не менее, используя лемму Вейля в ее современной формулировке [51], предложенной Гельвигом, действительно можно доказать, что обобщенное решение является классическим. В теории лемма Вейля является весьма важным результатом, позволяющим связать исходную краевую задачу (1.1) и, как говорят в таких случаях, ее обобщенную постановку (1.3).

## 1.2 Метод сопряжения

Если известно общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \left( q \frac{du}{dx} \right) = f, \quad (1.4)$$

то оно зависит от констант интегрирования  $C_1, C_2$  линейным образом, то есть

$$u = u_0(x) + u_1(x)C_1 + u_2(x)C_2.$$

Поэтому решение задачи (1.1) сводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$u(0, C_1, C_2) = 0, \quad u(1, C_1, C_2) = 0.$$

Куда более интересным и сложным является случай, когда рассматриваемый отрезок  $0 < x < 1$  можно разбить на части, в каждой из которых общее решение дается в символьном виде, но нет единого элементарного выражения для общего решения во всем интервале.

Эта ситуация обычно возникает, когда коэффициенты уравнения (1.4) сами являются кусочно заданными (piecewise-defined) функциями. Итак, допустим, что отрезок  $0 < x < 1$  делится точкой  $x = c$  на две части, при  $0 < x < c$  коэффициенты даются элементарными выражениями  $q_1, f_1$ , а при  $c < x < 1$  — элементарными выражениями  $q_2, f_2$ .

К сожалению, в современных системах компьютерной алгебры модуль для работы с кусочно заданными функциями весьма труден для эксплуатации, напр., в Sage его синтаксис менялся несколько раз за последние 10 лет. Поэтому представляется разумным проводить вычисления, разбив и в программе отрезок интегрирования на части.

Чтобы решить сформулированную задачу в системе Sage, зададим входные данные, для определенности пусть:

```

var("x, C1, C2")
c=1/3
q1=1
q2=2
5 f1=sin(x)
  f2=1

```

После этого решим две задачи Коши

$$\frac{d}{dx} \left( q \frac{du}{dx} \right) = f, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = C_1,$$

решение которой обозначим как  $u_1$ , и

$$\frac{d}{dx} \left( q \frac{du}{dx} \right) = f, \quad u(1) = 0, \quad u'(1) = C_2.$$

При этом мы будем использовать стандартный решатель ОДУ — функцию `desolve`, использующую для интегрирования в символьном виде ядро Maxima.

```

u=function("u")(x)
de1=diff(q1*diff(u,x),x)==f1
u1=desolve(de1,u, ics=[0,0,C1])
de2=diff(q2*diff(u,x),x)==f2
5 u2=desolve(de2,u, ics=[1,0,C2])

```

Теперь остается заметить, что решение

$$u = \begin{cases} u_1, & 0 < x < c \\ u_2, & c < x < 1 \end{cases}$$

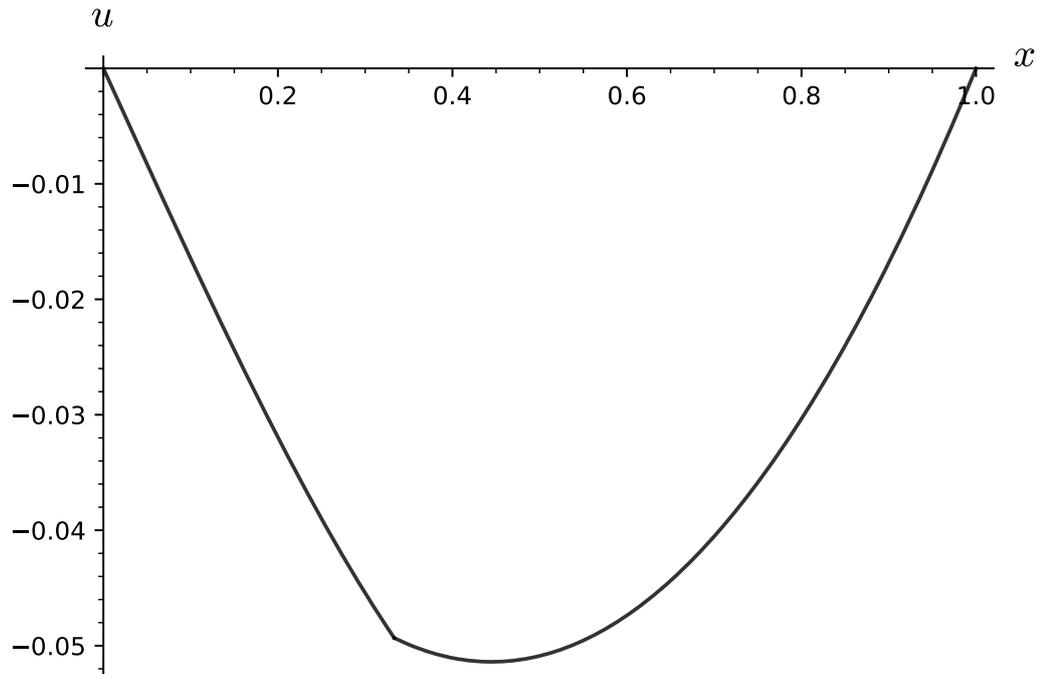


Рисунок 1.1 — Решение краевой задачи, полученное методом сопряжения

где константы  $C_1, C_2$  определяются из условий сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad q_1 \frac{du_1}{dx} = q_2 \frac{du_2}{dx}$$

при  $x = c$ . Решение этой СЛАУ можно выполнить при помощи стандартного решателя `solve`

```
S=solve([(u1-u2).subs(x=c), (q1*diff(u1,x) -
q2*diff(u2,x)).subs(x=c)], [C1,C2])
```

График решения можно построить, минуя использование кусочно заданных функций, следующим образом:

```
plot(u1.subs(S), (x, 0, c), axes_labels=["$x$", "$u$"]) +
plot(u2.subs(S), (x, c, 1))
```

Результат представлен на рис. 1.1.

Если на обоих отрезках ЛОДУ решается в символьном виде, то описанный метод дает точное решение задачи, и поэтому его можно считать символьным. Без труда обобщается на любое число отрезков и в таком случае известен под бесчисленным множеством названий, в зависимости от способа решения СЛАУ. Мы будем всегда называть его методом сопряжения. Если число отрезков велико, то СЛАУ придется решать численно, что превращает метод сопряжения из чисто символьного в численно-символьный. В этом случае ошибка метода определяется ошибкой в решении СЛАУ.

Хотя модуль решения в символьном виде линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) развит в Sage очень хорошо и удобен для использования, хотя ему и не хватает имплементации гипергеометрических функций, имеющей в коммерческих системах компьютерной алгебры, из которых в первую очередь следует выделить Maple [55]. Тем не менее, нетрудно придумать коэффициенты, при которых ЛОДУ не интегрируется в символьном виде и заставляет нас обратиться к численному исследованию краевой задачи.

### 1.3 Метод Галеркина

Универсальным методом решения краевых задач является метод Галеркина, который состоит в следующем. Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  — некоторый набор «базисных» функций из  $Q^1$ , удовлетворяющих краевому условию. В нашем случае это — условию Дирихле

$$\varphi_n(0) = 0, \quad \varphi_n(1) = 0 \quad n = 1, \dots, N.$$

Линейная оболочка  $L$ , натянутая на эти функции, является конечномерным подпространством пространства Соболева  $H^1$ . Выбор этих функций ничем более не ограничен.

Напомним, что под обобщенным решением краевой задачи (1.1) понимают такой элемент  $u \in H^1$ , что выполняется (1.3). Аналогично, под приближенным решением краевой задачи (1.1) понимают такой элемент  $u' \in L$ , что

$$(u', v) = l(v) \quad \forall v \in L. \quad (1.5)$$

Как видно, само уравнение остается без изменений, меняется только пространство, в котором берется пробная функция  $v$ .

Оценить близость точного и приближенного решения позволяет лемма Сеа [47; 56], которая обычно упоминается в связи с методом конечных элементов, но в действительности никак не использует специальный выбор базисных функций. Она утверждает, что ошибка  $\|u - u'\|$ , с которой точное решение  $u$  заменяется на приближенное, не превосходит ошибки аппроксимации точного решения  $u$  в  $L$ , то есть величины

$$\delta(u, L) = \min_{v \in L} \|u - v\|.$$

Отсюда получается важное в теории условие на выбор базисных функций: их следует выбирать таким образом, чтобы они «хорошо» аппроксимировали приближенное решение.

Следует подчеркнуть, что нельзя для всех элементов  $v \in H^1$  подобрать такое конечномерное пространство  $L$ , что  $\delta(v, L)$  меньше некоторого малого  $\varepsilon$ , не зависящего от  $v$ . Поэтому выбор базисных функций всегда содержит в себе некоторые априорные предположения об устройстве точного решения.

На практике точное решение нам не известно, поэтому приходится рассматривать не одно пространство  $L$ , а целое семейство подпространств  $L_N$ , исчерпывающих все  $H^1$  при  $N \rightarrow \infty$ . В этом случае,  $\delta(u, L_N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  и мы можем не сомневаться, что с ростом  $N$  приближенное решение стремится к точному по норме  $H^1$ . В этом и состоит смысл утверждения о сходимости метода Галеркина.

Конечно, перейти к пределу  $N = \infty$  на практике не возможно, но возможно удостовериться в том, что дальнейшее увеличение  $N$  не приводит к приметному изменению искомым характеристик решения. При этом величину  $\|u' - u''\|$ , найденную по двум приближенным решениям  $u'$  и  $u''$ , часто рассматривают как апостериорную оценку для ошибки. Тестовые примеры, решения которых известны точно, учат, что этот очень простой прием как правило дает правильные оценки.

### 1.3.1 Тригонометрический базис

Мы можем взять тригонометрическую систему и принять, что пространство  $L_N$  натянута на

$$\sin \pi x, \dots, \sin \pi N x.$$

Утверждение о том, что при таком выборе базисных функций  $\delta(u, L_N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  следует из основной теоремы теории рядов Фурье [47]. Сами базисные функции такого вида часто называют модами в память о том, что они появились в математической физики как собственные моды струны [47].

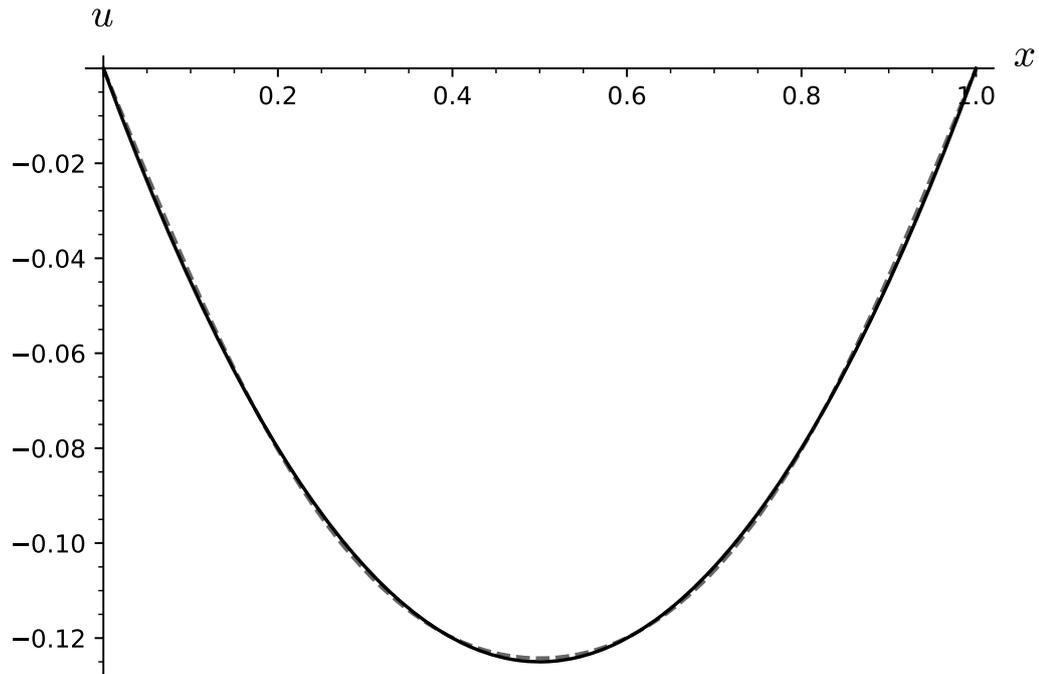


Рисунок 1.2 — Решение краевой задачи  $u'' = 1$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ : точное и приближенное ( $N = 3$ )

Для отыскания

$$u' = \sum_{n=1}^N u_n \sin \pi n x$$

мы имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{n=1}^N \int_0^1 \frac{d\varphi_m}{dx} \frac{du'}{dx} q(x) dx = - \sum_{n=1}^N \int_0^1 \varphi_m f dx \quad m = 1, \dots, N,$$

относительно  $u_1, \dots, u_N$ .

Если  $f$  и  $q$  заданы единым выражением во всей области и интегралы вычисляются точно, то составление СЛАУ и ее решение нетрудно выполнить в любой системе компьютерной алгебры. Более того, имеется приятная возможность составить СЛАУ тоже силами системы компьютерной алгебры.

Простейшая программа в Sage, реализующая эту идею выглядит следующим образом.

```
def poisson1d(N,q=1,f=1):
    uc=var(['u'+str(n) for n in range(N)])
    phi=[sin(pi*(n+1)*x) for n in range(N)]
    eqs=[sum([integral(diff(i,x)*diff(j,x)*q,(x,0,1))*uu \
5 for (i,uu) in zip(phi,uc)]) + integral(f*j,(x,0,1)) \
```

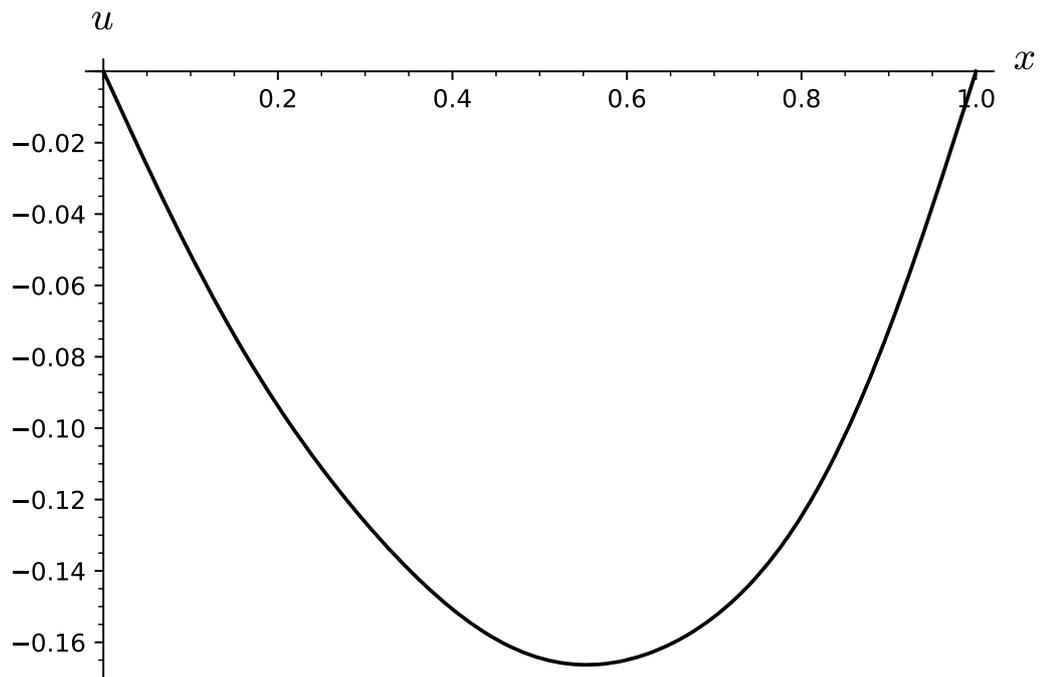


Рисунок 1.3 — Решений краевой задачи при  $q = 1 + x^2$  и  $f = 1$ ,  $N = 5$

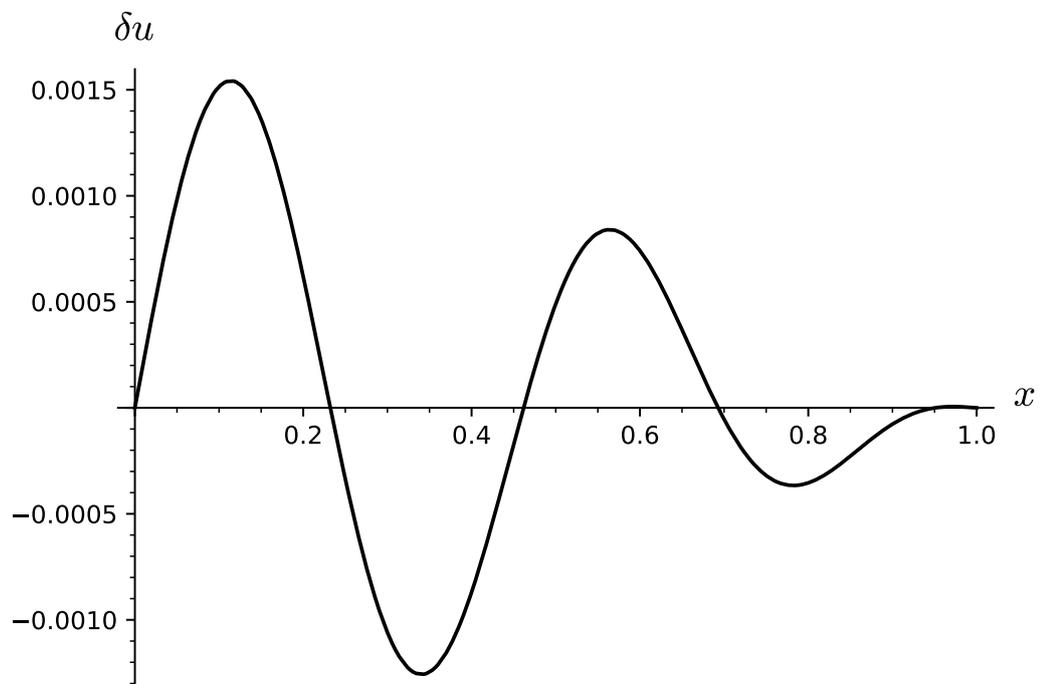


Рисунок 1.4 — Разность решений краевой задачи при  $q = 1 + x^2$  и  $f = 1$ , найденных при  $N = 3$  и  $N = 5$

```

    for j in phi]
    S=solve(eqs,uc)[0]
    return sum([i*j for (i,j) in zip(uc,phi) ] ).subs(S)

```

На простейшем тестовом примере (рис. 1.2) хорошо видно, что уже трех базисных функций достаточно для отыскания решения с графической точностью. В более сложном случае (рис. 1.3, 1.4) мы можем оценить ошибку по разности двух приближенных решений. Эта ошибка опять оказывается на уровне графической точности. Такая большая скорость сходимости достигается за счет того, что точное решение является гладкой функцией, что позволяет аппроксимировать ее буквально несколькими членами ряда Фурье.

В нашей программе интегралы вычисляются в символьном виде и СЛАУ тоже решается символьно, поэтому никакой ошибки округления не делается вплоть до построения графиков. Это не занимает много времени и ресурсов, поскольку размерность пространства  $L$  не велика.

С целью оптимизации кажется естественным вынести вычисление интеграла

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_m}{dx} \frac{d\varphi_n}{dx} q(x) dx \quad (1.6)$$

из цикла по  $n$  и  $m$  и получить аналитическое выражение для него, в которое далее подставлять  $n$  и  $m$ . Однако здесь возникает трудность, типичная для такого рода задач: системы компьютерной алгебры вычисляют интегралы, зависящие от параметров  $n, m$ , в кольце символьных выражений. Фактически это означает, что при делении на то или иное выражение система считает, что  $n$  и  $m$  отличны от его нулей, и возвращает выражение, верное для значений  $n$  и  $m$  общего положения. При подстановке в выражение (1.6) значений индексов  $n$  и  $m$  из интересующего нас диапазона обнаруживается, что знаменатель равен нулю и выдается ошибка «Деление на нуль». Поэтому при реализации символьно-численных методов следует заранее проработать все особые значения индексов.

Нетрудно переделать программу на тот случай, когда интегралы не берутся в символьном виде, заменив символьное интегрирование на численное.

```

def poisson1d(N,q=1,f=1):
    uc=var(['u'+str(n) for n in range(N)])
    phi=[sin(pi*(n+1)*x) for n in range(N)]
    eqs=[
5      sum([numerical_integral(diff(i,x)*diff(j,x)*q,(0,1))[0]*uu
          for (i,uu) in zip(phi,uc)]) +

```

```

    numerical_integral(f*j,(0,1))[0] for j in phi
    ]
S=solve(eqs,uc)[0]
10 | return sum([i*j for (i,j) in zip(uc,phi) ] ).subs(S)

```

При этом обычно ошибка определения матричных элементов находится на уровне ошибки округления. Разумеется, этот код работает существенно быстрее численно-аналитического.

Использование тригонометрических функций в качестве базисных позволяет вычислить решение задачи (1.1), используя малое число базисных функций, а в реализации ряд операций можно выполнить аналитически, а не численно. Для практических нужд, когда ошибка в поредении решения по норме составляет, скажем, 1%, обычно достаточно несколько десятков базисных функций. В этом случае мы приходим к решению СЛАУ с несколькими десятками неизвестных, которая может быть решена в Sage не только численно по методу Гаусса. При этом накапливается ошибка округления, однако в виду малого числа неизвестных это не создает сколько-нибудь заметных проблем.

Однако с ростом числа базисных функций достоинства этого подхода обращаются в его недостатки: СЛАУ, которая получается при выборе тригонометрического базиса, имеет плотно заполненную матрицу достаточно большого размера, при обращении которой могут возникнуть разного рода артефакты. Решение этого затруднения дает другой выбор базисных элементов, получивших название конечных элементов.

### 1.3.2 Метод конечных элементов

Другой популярный вариант выбора базисных функций получил название метода конечных элементов (МКЭ). В одномерном случае отрезок  $0 < x < 1$  делят на  $N$  частей с шагом  $h = 1/N$  точками  $x_n = nh, n = 1, \dots, N-1$  (узлами). В качестве базисной функции  $\varphi_n$  берут кусочно линейную функцию, имеющую изломы только в узлах и удовлетворяющую условию

$$\varphi_n(x_m) = \delta_{n,m}.$$

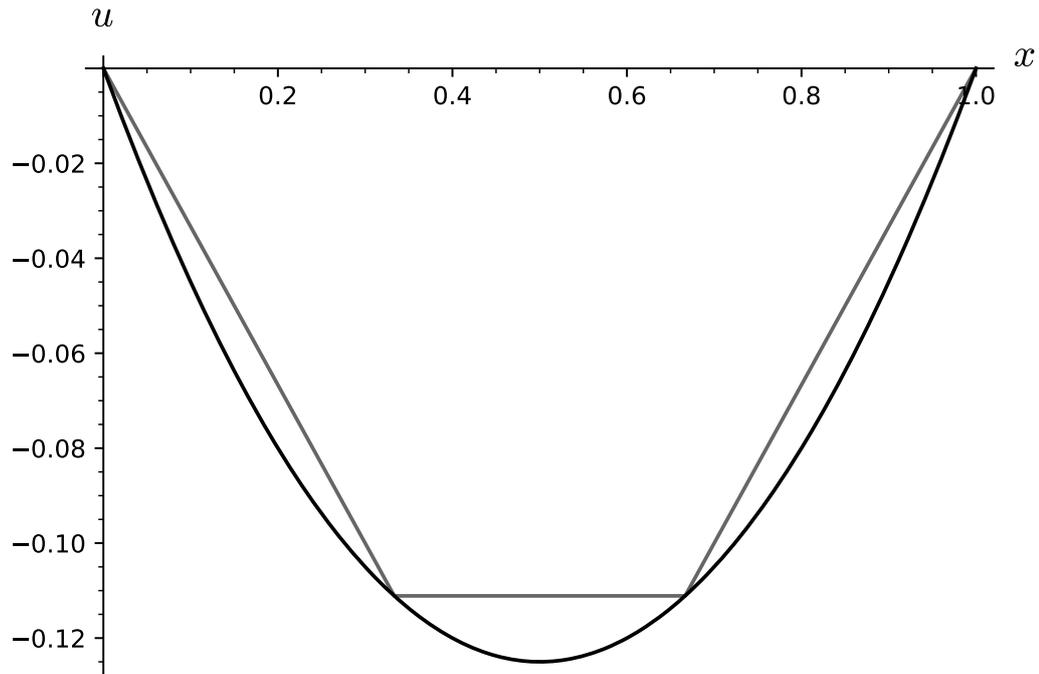


Рисунок 1.5 — Решение краевой задачи  $u'' = 1$ ,  $u(0) = u(1) = 0$ : точное и приближенное ( $N = 3$ , МКЭ)

Нетрудно видеть, что этим базисная функция определяется однозначно:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h} & x_{n-1} < x < x_n, \\ \frac{x_{n+1}-x}{h} & x_n < x < x_{n+1}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Главным достоинством такого базиса является то, что почти все элементы матрицы СЛАУ равны нулю, кроме тех, что стоят на главной диагонали и возле нее. Такие матрицы называются разреженными (sparse). Одно из главных достижений линейной алгебры конца прошлого века — разработка очень эффективных методов хранения и обращения разреженных матриц [57].

Приведем в качестве примера одну из возможных реализаций МКЭ в Sage.

```

def poisson1d_FEM(N,q=1,f=1):
    h=1/N
    def foo(n,m):
        if n==m:
            ans=numerical_integral(q/h,((n-1)*h,n*h))[0] +
numerical_integral(q/h,(n*h,(n+1)*h))[0]
        elif n==m+1:
            ans=-numerical_integral(q/h,((n-1)*h,n*h))[0]
        elif n==m-1:
            ans=-numerical_integral(q/h,(n*h,(n+1)*h))[0]

```

```

10     else:
        ans=0
        return ans
    A=matrix(RR, N-1, N-1, lambda n,m: foo(n+1,m+1), sparse=True
)
    F=[numerical_integral(f*(x-(n-1)*h),((n-1)*h,n*h))[0] +
numerical_integral(f*(-x+(n+1)*h),(n*h,(n+1)*h))[0] for n in
range(1,N)]
15    U=-A^-1*matrix(N-1,1,F)
    return U

```

В этом коде учтено, что матрица СЛАУ разреженная, что существенно сокращает расход ресурсов на ее хранение и общение. Экономить на вычислении обратной матрицы мы не стали. Функция возвращает коэффициенты  $u_i$  разложения

$$u'(x) = \sum u_i \varphi_i(x).$$

По построению  $\varphi_n(x_m) = \delta_{n,m}$ , поэтому обычно их интерпретируют как значения  $u'$  в  $x_i$ .

Скорость метода Галеркина при выборе базисных функций по МКЭ ничуть не хуже, чем при выборе тригонометрических функций. Напр., на рис. 1.5 видно, что двух базисных функций достаточно для получения решения с графической точностью. Тем не менее, в нашем распоряжении имеются эффективные методы обращения разреженных матриц, поэтому мы можем без опасения увеличивать  $N$  до сотен.

#### 1.4 Применение метода конечных элементов в случае разрывных коэффициентов

Метод конечных элементов, как и в целом метод Галеркина, задумывался как универсальный метод, пригодный для вычисления обобщенных решений. Вопрос о применимости и скорости сходимости МКЭ в задачах с разрывными коэффициентами недавно был вновь поднят в связи с изобретением новых разностных схем, получивших название «бикомпактных» [58; 59], и нашедших свое применение в различных разделах математической физики [60–69].

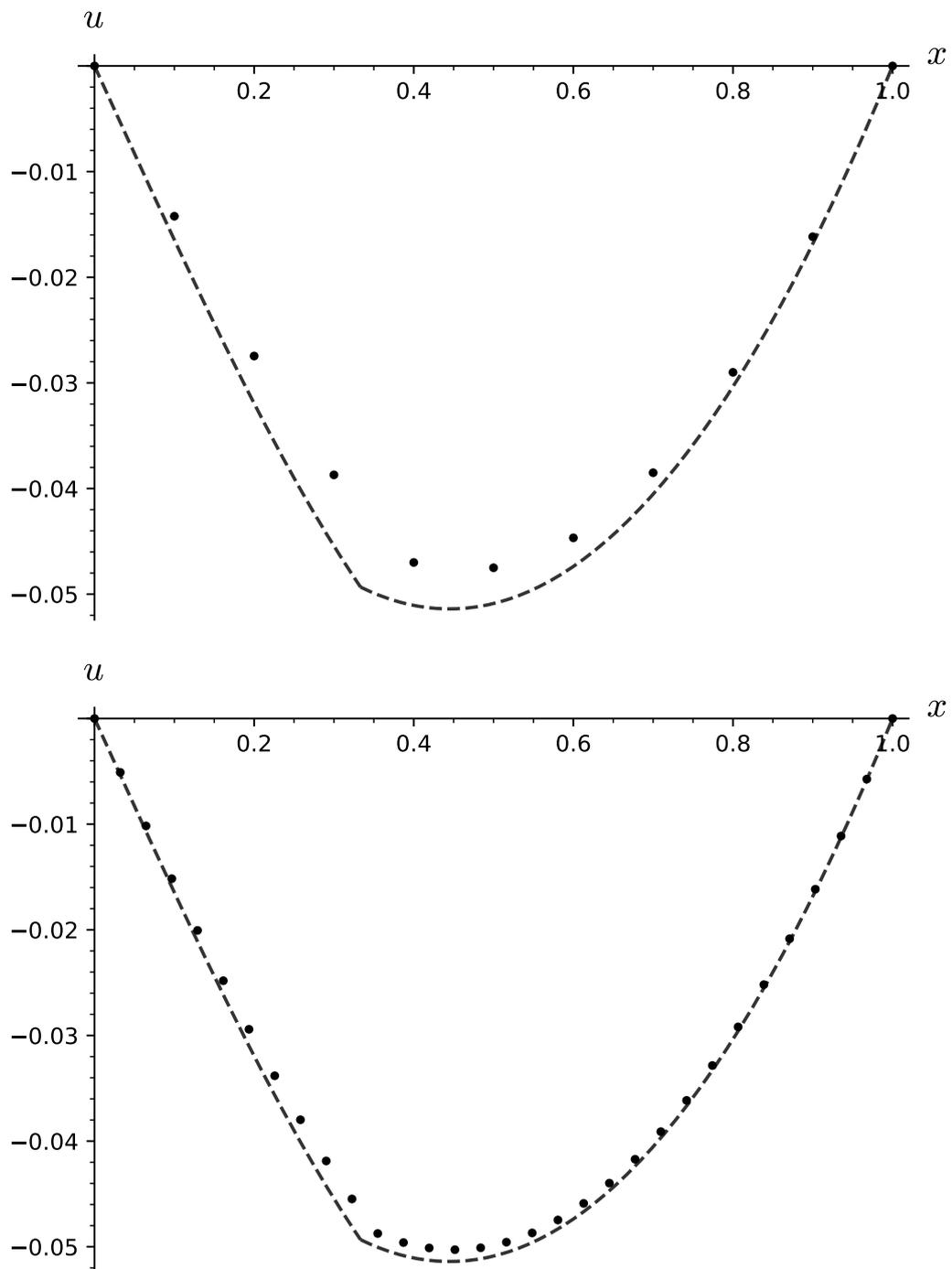


Рисунок 1.6 — Приближенное решение краевой задачи с разрывными коэффициентами при 9 (сверху) и 30 (снизу) элементах, штриховой линией указано точное решение

Обратимся к случаю, когда  $q, f$  имеют один разрыв в точке  $x = c$  на рассматриваемом отрезке  $[0, 1]$ , решение которого выше было найдено по методу сопряжения (раздел 1.2). Пусть для определенности  $c = \frac{1}{3}$ ,

$$q = \begin{cases} 1, & x < c \\ 3, & x > c \end{cases}$$

и

$$f = \begin{cases} \sin x, & x < c \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

Условимся задавать их в виде списка:

```
var("x")
c=1/3
q=[1,3]
f=[sin(x),1]
```

Дополним нашу функцию новой, в которой выбираются правильные значения для коэффициентов при вычислении интегралов:

```
def fint(F,ab):
    if ab[1]<=c:
        return numerical_integral(F[0],ab)[0]
    elif ab[0]>=c:
5         return numerical_integral(F[1],ab)[0]
    else:
        return numerical_integral(F[0],[ab[0],c])[0] + \
            numerical_integral(F[0],[c,ab[1]])[0]
```

Модифицируем нашу функцию решения краевой задачи:

```
def poisson(N):
    h=1/N
    def foo(n,m):
        if n==m:
5             return fint(q,[(n-1)*h,n*h])/h+fint(q,[n*h,(n+1)*h])
        /h
        elif n==m+1:
            return -fint(q,[(n-1)*h,n*h])/h
        elif n==m-1:
            return -fint(q,[n*h,(n+1)*h])/h
10        else:
            return 0
    A=matrix(RR, N-1, N-1, lambda n,m: foo(n+1,m+1), sparse=True
    )
```

```

15 |     F=[fint([ff*(x-(n-1)*h) for ff in f],[(n-1)*h,n*h]) + fint([
      |     ff*(-x+(n+1)*h) for ff in f],[n*h,(n+1)*h]) for n in range(1,
      |     N)]
      |     U=-A^-1*matrix(N-1,1,F)
      |     return U

```

По рис. 1.6, на котором представлены приближенные решения, хорошо видно, что в случае разрывных коэффициентов МКЭ сходится заметно хуже, чем в рассмотренном выше случае гладких коэффициентов, когда буквально десятка элементов было достаточно для совпадения графиков точного и приближенного решений.

Исследуем скорость сходимости по методу Ричардсона. С этой целью рассмотрим две задачи: задачу с гладкими коэффициентами, рассмотренную в прошлом разделе, и задачу с разрывными коэффициентами, рассмотренную в этом разделе. Будем постепенно увеличивать число базисных функций (параметр  $N$ ) и построим график зависимости ошибки в норме  $L^2$ , то есть величины

$$E = \sqrt{\int |u - u'|^2 dx},$$

от  $N$  в двойном логарифмическом масштабе. Такие графики далее будем называть диаграммами Ричардсона. По диаграммам, изображенным на рис. 1.7, хорошо видно, что ошибка  $E$  зависит от  $N$  степенным образом:

$$E = \frac{C}{N^r}.$$

Параметры  $r$  и  $C$  нетрудно определить по методу наименьших квадратов (МНК). Параметр  $r$  для случая гладких коэффициентов оказывается равным 2, а в случае разрывных коэффициентов — 1. Таким образом, скорость сходимости в случае гладких коэффициентов оказывается приметно больше скорости сходимости МКЭ в случае разрывных коэффициентов.

Однако это несколько не противоречит применимости МКЭ в случае разрывных коэффициентов. При аппроксимации кусочно линейными функциями можно надеяться достигнуть приближения порядка  $C/N$  по норме пространства Соболева. По лемме Сеа ошибка аппроксимации в норме  $H^1$  больше ошибки МКЭ в этой же норме, а следовательно, и в норме  $L^2$  эту ошибку можно оценить как  $C/N$ . Именно это мы и видим в случае разрывных коэффициентов.

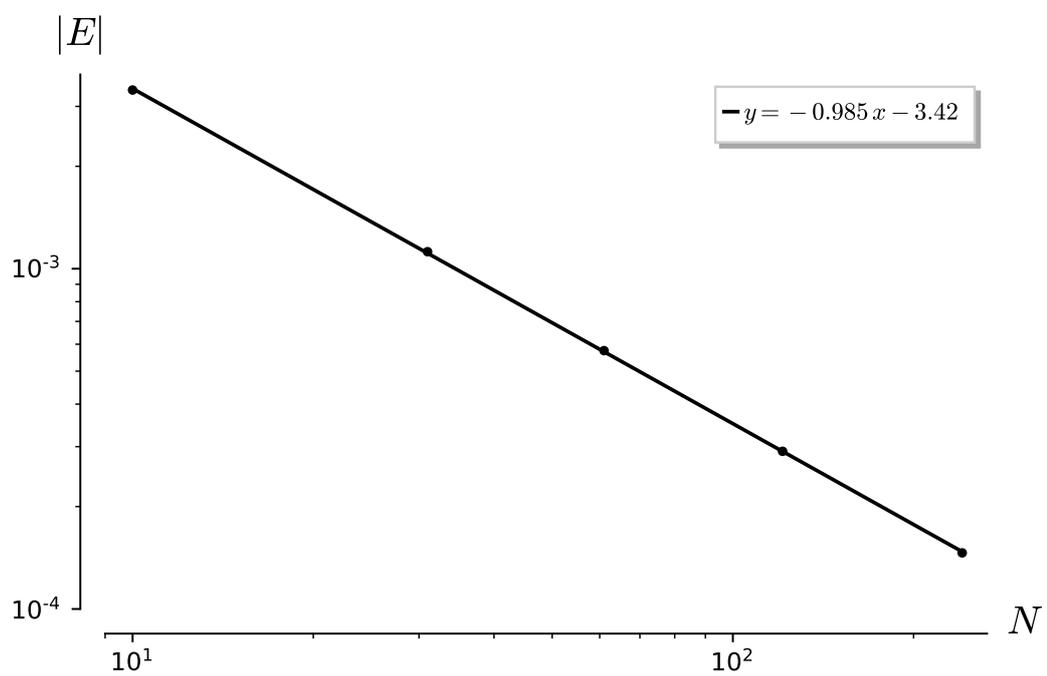
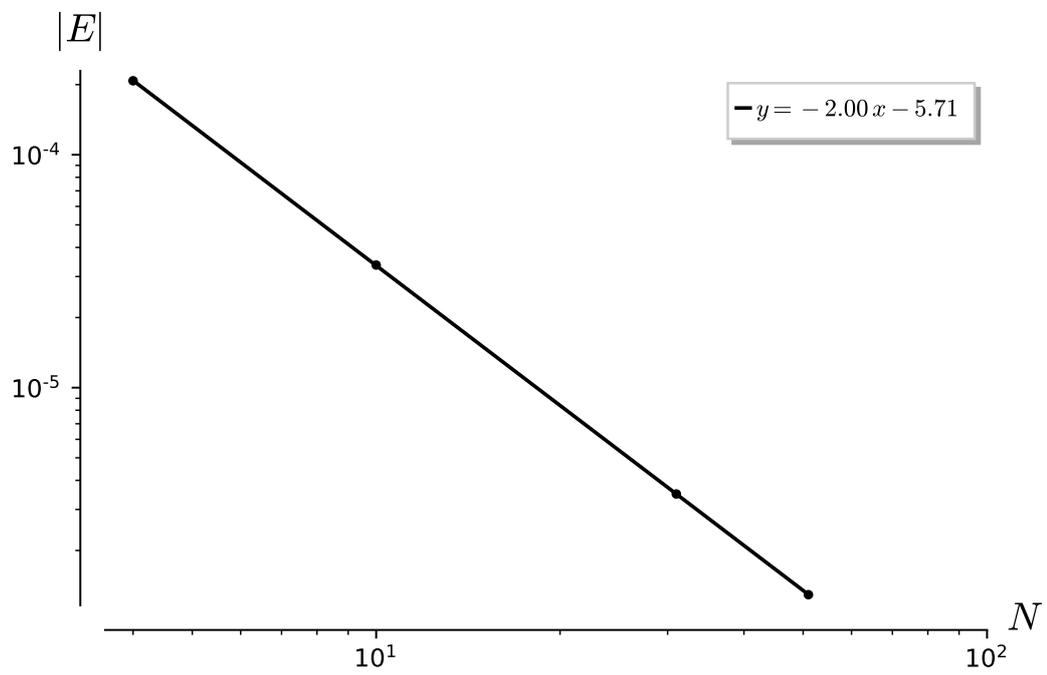


Рисунок 1.7 — Диаграмма Ричардсона для решений краевых задач с гладкими (сверху) и разрывными (снизу) коэффициентами, найденная по МКЭ

К сожалению, в доступной литературе (см., напр., [56; 70; 71]) оценки для ошибки аппроксимации выводятся для функций  $u$  из пространства Соболева  $H^2$ , которому решение задачи с разрывными коэффициентами может и не принадлежать. Возможность аппроксимации решения задачи с разрывными коэффициентами линейными конечными элементами с первым порядком в норме  $H^1$  следует из известных теорем об аппроксимации производной кусочно постоянными функциями.

Для случая ЛОДУ вида  $u'' = f$  можно доказать, что в норме  $L^2$  эта ошибка будет иметь вид  $C/N^2 \|f\|_{L^2}$ , вероятно, впервые, такого рода оценки были получены Нитше [70; 71]. Более того, в одномерном случае на МКЭ можно взглянуть как на метод конечных разностей и вычислить, что порядок этой разностной схемы равен 2. Разумеется, при определении этого порядка применяется формула Тейлора до 2-го порядка, то есть предполагается, что решение во всех точках имеет 2-ую производную. Любым из этих способов можно убедиться в том, что в случае гладких коэффициентов ошибка МКЭ в норме  $L^2$  равна  $C/N^2$ .

Таким образом, МКЭ можно применять к задачам с разрывными коэффициентами, ожидая ту скорость сходимости, на которую указывает общая теория. В случае гладких коэффициентов скорость будет выше.

## 1.5 Многомерное обобщение

Естественным обобщением одномерной модели является задача вида

$$\Delta u = f, \quad u|_{\partial G} = 0 \tag{1.7}$$

Здесь уравнение Пуассона  $\Delta u = f$  выполняется в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}^m$ , а краевой условие Дирихле  $u = 0$  ставится на ее границе. Дана область  $G$  и функция  $f$ , требуется найти  $u$ . Размерность области может быть любой, но для приложений важны одномерный, двумерный и трехмерный случаи.

Чтобы получить обобщенную постановку задачи (1.7), умножим уравнение (1.7) на гладкую тестовую функцию  $v$ , удовлетворяющую условию Дирихле, и проинтегрируем по  $G$ . После применения формулы Гаусса-Остроградского,

мы получим

$$\int_G (\nabla v, \nabla u) dV = - \int_G v f dV \quad (1.8)$$

или опять

$$(u, v) = l(v),$$

где билинейная форма  $(v, u)$  является по определению скалярным произведением пространства Соболева  $H^1$ . Поэтому существование обобщенного решения доказывается тем же путем, что и в одномерном, ссылкой на теорему Рисса.

Не вызывает труда и перенесение метода Галеркина. Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  — некоторый набор «базисных» функций из  $Q^1$ , удовлетворяющих краевому условию. Линейная оболочка  $L$ , натянутая на эти функции, является конечномерным подпространством пространства Соболева  $H^1$ . Под приближенным решением краевой задачи (1.7) понимают такой элемент  $u' \in L$ , что

$$(u', v) = l(v) \quad \forall v \in L.$$

Главная трудность на пути реализации метода Галеркина в многомерном случае состоит в том, что для области произвольного вида сложно указать удачный базис.

Аналогом тригонометрическому базису будет базис, состоящий из собственных функций оператора Лапласа, то есть из собственных функций задачи на собственные значения

$$\Delta \varphi + \alpha^2 \varphi = 0,$$

где  $\alpha$  — спектральный параметр (положительное число) [47]. Эта система образует базис пространства  $H^1$  в силу теоремы Стеклова [47], которую в свою очередь можно рассматривать как частный случай теоремы о спектре вполне непрерывных операторов [49]. В случае параллелепипеда

$$G = \prod \{0 < x_i < l_i\}$$

теорема Стеклова дает базис

$$\varphi_{i_1, \dots, i_n} = \prod_{k=1}^N \sin \frac{\pi i_k x_k}{l_k}$$

где индексы  $i_1, \dots, i_n$  могут принимать любые натуральные значения. Однако для более сложных областей, даже в случае круга, найти выражение в элементарных функциях невозможно в силу теоремы Лиувилля [72]. Поэтому область применения этого подхода в основном сводится к прямоугольникам.

МКЭ удается перенести на многомерный случай, при этом место отрезков заменяют симплексы [73]. Построение сети и вычисление матричных элементов в этом случае представляет специфические трудности, для решения которых создано специализированное программное обеспечение — FEA software, в т.ч. Ansys [73], Comsol Multiphysics, FreeFem++, FenicsProject. В рамках проекта FreeFem++ был разработан особый C-подобный язык для описания краевых задач математической физики и их решения по МКЭ. Интеграция его в системы компьютерной алгебры в настоящее время представляет некоторые проблемы.

## Глава 2. Исследование поверхностных волн Дьяконова в системе компьютерной алгебры Sage

В 1980-х годах прошлого века был теоретически обнаружен особый класс решений уравнений Максвелла — электромагнитные волны, бегущие вдоль границы раздела двух диэлектриков, интенсивность которых быстро спадает при удалении от границы раздела [32; 38; 39; 74—76]. Эти волны получили название поверхностных волн Дьяконова.

Впервые поверхностные электромагнитные волны были упомянуты в 1899 г. А. Зоммерфельдом [77]. В 1907 г. И. Ценнек [78] описал математически распространение электромагнитных волн вдоль поверхности проводника, впоследствии эти волны будут называться волнами Ценнека. В настоящее время наиболее распространёнными и изученными являются поверхностные плазмон-поляритоны, возбуждение и распространение которых возможно на границе металла и диэлектрика. Использование металла приводит к высокой потере энергии, поэтому в последние десятилетия многие исследователи проявляют большой интерес к поверхностным электромагнитным волнам, возникающих на границе двух диэлектриков, то есть к волнам Дьяконова.

Волны Дьяконова имеют огромный потенциал практического применения в различных отраслях промышленности. Самым важным преимуществом волн Дьяконова перед поверхностными плазмон-поляритонами является практически полное отсутствие потерь энергии по мере их распространения вдоль границы анизотропной среды. Поверхностные волны Дьяконова возникают на границе раздела изотропной и одноосной анизотропной среды из-за различий в симметрии диэлектрической проницаемости двух формирующих структуру «полусред» и является гибридизированной электромагнитной волной [39].

Экспериментальное наблюдение поверхностных волн удалось осуществить совсем недавно [36; 37]. В современных теоретических работах [39], как и в самой работе Дьяконова [32], вопрос о существовании поверхностных волн был сведён к вопросу о существовании решения некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств, которые не удается решить аналитически, что тормозит дальнейшее исследование.

Современные системы компьютерной алгебры обладают богатым инструментарием для решения систем алгебраических уравнений, что позволяет надеяться на то, что систему уравнений Дьяконова удастся решить аналитически.

В настоящей работе рассматривается базовая структура для теории волн Дьяконова, которая состоит из изотропного вещества с постоянной диэлектрической проницаемостью и анизотропного вещества с диэлектрической проницаемостью. Данная структура поддерживает возбуждение и распространения волн Дьяконова. В случае плоской границы раздела двух диэлектриков вопрос о существовании поверхностных волн сводится к исследованию существования вещественных корней у системы алгебраических уравнений, выписанных в [39]. Ниже будет представлено решение этой системы в радикалах, найденное в Sage.

## 2.1 Поверхностные волны

Пусть оптически анизотропный, но однородный диэлектрик заполняет некоторый объем  $G$ , ограниченный поверхностью  $S$ , вне которой расположен оптически изотропный и однородный диэлектрик, напр., воздух (см. рис. 2.1). Под поверхностной волной мы будем понимать пару векторных полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , которые:

1. удовлетворяют уравнениям Максвелла в интегральном смысле,
2. сконцентрированы вблизи поверхности  $S$ ,
3. являются монохроматическими волнами, распространяющимися вдоль поверхности  $S$ .

Чтобы понять математический смысл первого условия, мы будем предполагать, что на всем рассматриваемом промежутке времени  $T$  вне  $S$  поля не имеют скачков, то есть компоненты полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  продолжаются на границу  $S$  из  $G$  и из  $\mathbb{R}^3 \setminus G$  по непрерывности до функций из класса  $C^1(\overline{G} \times T)$  и  $C^1(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus G} \times T)$  соответственно. Предельные значения на границе, полученные путем продолжения из  $G$ , будем маркировать индексом 1, а полученные путем продолжения из  $\mathbb{R}^3 \setminus G$  — индексом 2.

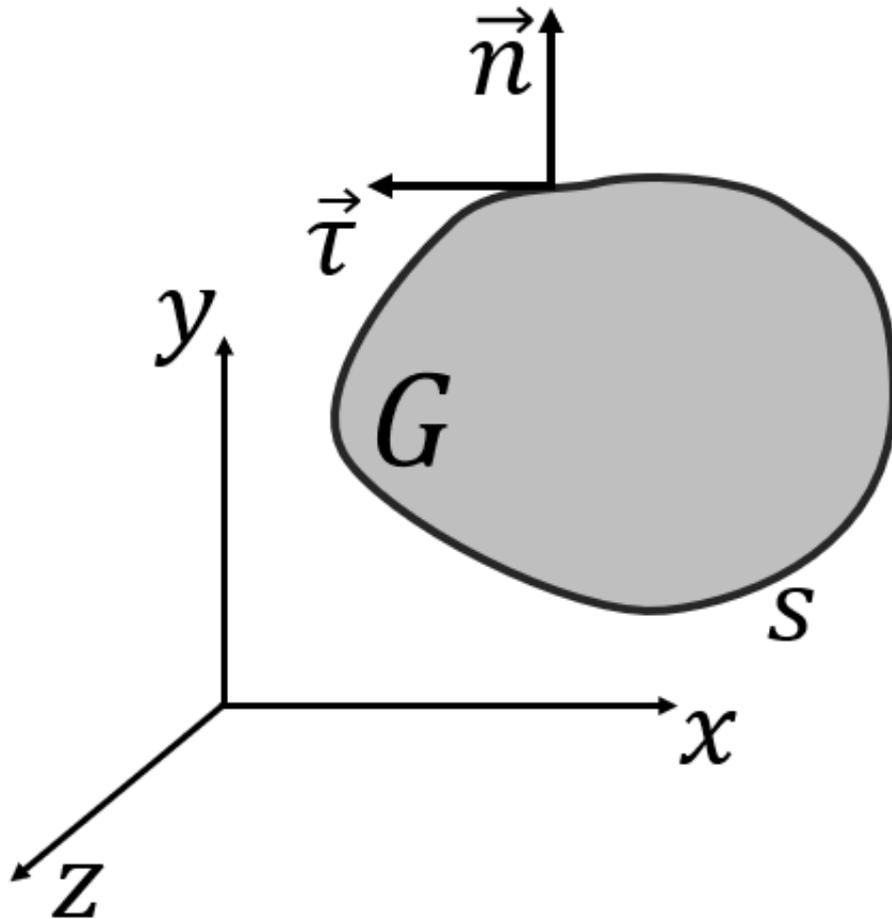


Рисунок 2.1 — Структура (среда) из анизотропного и изотропного вещества (диэлектриков)

Вне разрыва уравнения Максвелла, взятые в интегральной форме, переходят в дифференциальные уравнения Максвелла. На границе  $S$  поля могут иметь разрывы. Уравнение

$$\iint_{\partial K} B \cdot \vec{n} ds = 0$$

дает в дополнение к дифференциальным уравнениям Максвелла непрерывность нормальной к  $S$  компоненты вектора  $\vec{B}$ , а уравнение

$$\iint_{\partial K} D \cdot \vec{n} ds = \iiint_K \rho dx dy dz$$

указывает на то, что разрыв нормальной компоненты вектора  $\vec{D}$  равен поверхностной плотности заряда. В предположении ограниченности полей, уравнения, содержащие циркуляции  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , приводят к непрерывности тангенциальных компонент этих полей.

В рассматриваемом случае магнитная проницаемость не имеет скачка на поверхности  $S$ , поэтому вектор  $\vec{H}$  должен быть непрерывен. Однако условие и внутри, и вне  $G$  должно выполняться уравнение

$$\partial_t \vec{B} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Непрерывность тангенциальных компонент вектора  $\vec{E}$  влечет непрерывность нормальной компоненты вектора  $\partial_t \vec{B}$ , поэтому в монохроматическом случае условие непрерывности нормальной компоненты вектора  $\vec{B}$  мы будем опускать.

Таким образом, уравнения Максвелла, взятые в интегральной форме, при сделанных предположениях относительно гладкости полей сводятся к дифференциальным уравнениям Максвелла, выполненным вне разрыва, и 4-м скалярным условиям сшивки, выражающим непрерывность тангенциальных компонент  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Второе условие мы будем понимать в том смысле, что при удалении от границы  $S$ , величины  $|\vec{E}|$  и  $|\vec{H}|$  убывают экспоненциально: существуют такие константы  $C$  и  $\alpha$ , что

$$|\vec{E}| + |\vec{H}| \leq C e^{-\alpha r},$$

где  $r$  — расстояние между точкой, в которой вычисляется левая часть, и поверхностью  $S$ .

Третье условие мы будем понимать в том смысле, что на поверхности  $S$  можно указать такие два касательных векторных поля  $\vec{k}^{(1)}$  и  $\vec{k}^{(2)}$ , что

$$\vec{E}^{(i)} = \vec{A}^{(i)} e^{-i\omega t + i\vec{k}^{(i)} \cdot \vec{r}}, \quad \vec{H}^{(i)} = \vec{B}^{(i)} e^{-i\omega t + i\vec{k}^{(i)} \cdot \vec{r}}, \quad i = 1, 2.$$

Ниже будет рассматриваться плоский случай, когда поверхность  $S$  является плоскостью, а амплитуды  $\vec{A}^{(i)}$  и  $\vec{B}^{(i)}$  не меняются на поверхности.

## 2.2 Волны, бегущие вдоль плоскости

Рассмотрим вслед за Дьяконовым частный случай, когда граница является плоскостью, в качестве которой примем плоскость  $x = 0$ . Пусть анизотропное вещество заполняет полупространство  $x < 0$  и характеризуется диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_o, \varepsilon_o, \varepsilon_e),$$

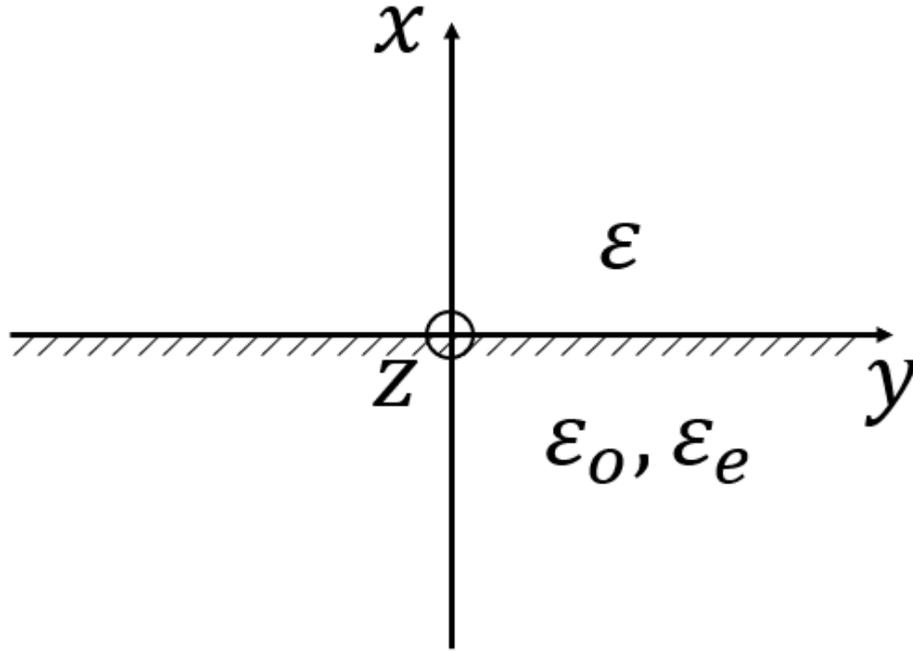


Рисунок 2.2 — Структура из изотропа с постоянной диэлектрической проницаемостью и анизотропа с диэлектрической проницаемостью

то есть ось оптической симметрии направлена вдоль границы. Пусть при  $x > 0$  расположен оптически изотропный диэлектрик (см. рис. 2.2).

В кристаллооптике [77] уже было найдено два частных решения уравнений Максвелла в анизотропной среде — т.н. обыкновенная и необыкновенная волны. Обе эти волны имеют вид

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad \vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad \omega/c = k_0. \quad (2.1)$$

Выражение такого вида будет решением уравнений Максвелла в том и только в том случае, когда волновой вектор  $\vec{k}$  удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon_o k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \left( \varepsilon_e k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} k_z^2 \right) = 0. \quad (2.2)$$

Когда вектор  $\vec{k}$  обнуляет первый множитель, получается обыкновенная волна

$$\vec{E}_o = \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_o = \frac{1}{k_0} \vec{k} \times \vec{E}_o = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} k_x k_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}$$

когда второй — необыкновенная волна

$$\vec{E}_e = - \begin{pmatrix} k_x k_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_e = \frac{1}{k_0} \vec{k} \times \vec{E}_e = \varepsilon_o k_0 \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Традиционно рассматривают вещественные корни уравнения (2.2), однако в силу принципа аналитического продолжения и комплексным корням этого уравнения отвечают некоторые решения уравнений Максвелла.

У нас анизотропное вещество занимает полупространство  $x < 0$  и мы хотим построить решение, которое 1.) убывает экспоненциально при  $|x| \rightarrow \infty$  и 2.) представляет собой волну, бегущую вдоль плоскости  $x = 0$ . Поля вида (2.1) удовлетворяют этим двум условиям, если число  $k_x$  является чисто мнимым, причем  $p = ik_x > 0$ , а числа  $k_y, k_z$  — вещественными.

Если вещественная тройка  $(p, k_y, k_z)$  удовлетворяет уравнению

$$p^2 = k_y^2 + k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2, \quad (2.3)$$

то уравнения Максвелла имеют при  $x < 0$  частное решение

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_o e^{px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t},$$

амплитуды которого получаются из формулы (2.2) путем замены  $ik_x$  на  $p$ :

$$\vec{E}_o = \begin{pmatrix} k_y \\ ip \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_o = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} -ipk_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Аналогично, если вещественная тройка  $(p, k_y, k_z)$  удовлетворяет уравнению

$$p^2 = k_y^2 + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} k_z^2 - \varepsilon_e k_0^2 \quad (2.5)$$

то уравнения Максвелла имеют при  $x < 0$  частное решение

$$\vec{E} = \vec{E}_e e^{px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_e e^{px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t},$$

где

$$\vec{E}_e = - \begin{pmatrix} -ipk_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_e = \varepsilon_o k_0 \begin{pmatrix} k_y \\ ip \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Уравнения Максвелла — линейные, поэтому суперпозиция двух частных решений тоже будет решением этой системы. Если числа  $k_y$  и  $k_z$  в этих тройках совпадают, то суперпозиция на плоскости  $x = 0$  остается монохроматической волной. Поэтому мы будем рассматривать только тот случай, когда обыкновенная и необыкновенная тройки отличается только значениями для  $p$ , которые

мы будем обозначать как  $p_o$  и  $p_e$ . Приняв это, суперпозицию двух частных решений можно записать как

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left( a_o \vec{E}_o e^{p_o x} + a_e \vec{E}_e e^{p_e x} \right) e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}, \\ \vec{H} &= \left( a_o \vec{H}_o e^{p_o x} + a_e \vec{H}_e e^{p_e x} \right) e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t},\end{aligned}\quad (2.7)$$

где  $a_o, a_e$  — произвольные комплексные коэффициенты, а амплитуды вычисляются по формулам

$$\vec{E}_o = \begin{pmatrix} k_y \\ ip_o \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_o = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} -ip_o k_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}$$

и

$$\vec{E}_e = - \begin{pmatrix} -ip_e k_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_e = \varepsilon_o k_0 \begin{pmatrix} k_y \\ ip_e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, пусть  $k_y, k_z$  — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$k_y^2 + k_z^2 > \varepsilon_o k_0^2, \quad k_y^2 + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} k_z^2 > \varepsilon_e k_0^2. \quad (2.8)$$

Тогда уравнение (2.3) имеет положительный корень  $p_o$ , уравнение (2.5) — положительный корень  $p_e$ , а система уравнений Максвелла при  $x < 0$  — семейство решений (2.7).

В [39] при  $x > 0$  берется суперпозиция плоских волн, однако это приводит к довольно сложным выражениям для условий сшивки. Поэтому мы будем использовать другое семейство, воспользовавшись тем, что всякий изотропный диэлектрик можно рассматривать как анизотропный с  $\varepsilon_o = \varepsilon_e = \varepsilon$ . Поэтому в нем имеется аналогичное решение, убывающее экспоненциально при  $x \rightarrow \infty$ . Пусть  $k_y, k_z$  — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенству

$$k_y^2 + k_z^2 > \varepsilon k_0^2. \quad (2.9)$$

Тогда уравнение

$$p^2 = k_y^2 + k_z^2 - \varepsilon k_0^2, \quad (2.10)$$

имеет положительный корень  $p$ , а система уравнений Максвелла при  $x > 0$  — семейство решений

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \left(b_o \vec{E}'_o + b_e \vec{E}'_e\right) e^{-px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}, \\ \vec{H} &= \left(b_o \vec{H}'_o + b_e \vec{H}'_e\right) e^{-px} e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t},\end{aligned}\quad (2.11)$$

где  $b_o, b_e$  — произвольные комплексные коэффициенты, а амплитуды вычисляются по формулам, которые получаются из (2.4) и (2.6) путем замены  $ik_x$  на  $-p$ :

$$\vec{E}'_o = \begin{pmatrix} k_y \\ -ip \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}'_o = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} ipk_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \epsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}$$

и

$$\vec{E}'_e = - \begin{pmatrix} ipk_z \\ k_y k_z \\ k_z^2 - \epsilon_o k_0^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{H}'_e = \epsilon_o k_0 \begin{pmatrix} k_y \\ -ip \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, числа  $k_y, k_z$  для решений при  $x < 0$  и при  $x > 0$  могут быть разными. Однако все условия сшивки при  $x = 0$  будут содержать множитель  $e^{ik_y y + ik_z z - i\omega t}$ , поэтому эти условия совместны только тогда, когда числа  $k_y, k_z$  для решений при  $x < 0$  и при  $x > 0$  совпадают.

Условия сшивки на границе раздела для электромагнитных полей состоят в непрерывности на границе раздела тангенциальных компонент полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Поскольку  $z$ -компонента векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}'_o$  равна нулю, условие непрерывности  $E_z$  дает связь между  $a_e$  и  $b_e$ :

$$(k_z^2 - \epsilon_o k_0^2) a_e = (k_z^2 - \epsilon k_0^2) b_e.$$

Аналогично,  $z$ -компонента векторов  $\vec{H}_e$  и  $\vec{H}'_e$  равна нулю, условие непрерывности  $H_z$  дает связь между  $a_o$  и  $b_o$ :

$$(k_z^2 - \epsilon_o k_0^2) a_o = (k_z^2 - \epsilon k_0^2) b_o.$$

Эти два соотношения удобно записать в виде пропорции

$$\frac{a_o}{b_o} = \frac{a_e}{b_e} = \frac{k_z^2 - \epsilon k_0^2}{k_z^2 - \epsilon_o k_0^2}, \quad (2.12)$$

которая позволяет далее всюду исключать  $b_o$  и  $b_e$ .

Условие непрерывности  $E_y$  дает

$$ip_0 a_o - k_y k_z a_e = -ip b_o - k_y k_z b_e,$$

или с учетом пропорции (2.12)

$$(k_z^2 - \varepsilon k_0^2)(ip_0 a_o - k_y k_z a_e) = (k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2)(-ip a_o - k_y k_z a_e). \quad (2.13)$$

Условие непрерывности  $H_y$  дает

$$k_y k_z a_o + \varepsilon_o k_0^2 ip_e a_e = k_y k_z b_o - \varepsilon k_0^2 ip b_e$$

или

$$(k_z^2 - \varepsilon k_0^2)(k_y k_z a_o + \varepsilon_o k_0^2 ip_e a_e) = (k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2)(k_y k_z a_o - \varepsilon k_0^2 ip a_e). \quad (2.14)$$

Уравнения (2.13) и (2.14) — линейные и однородные, они имеют нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель равен нулю, то есть когда

$$\begin{aligned} & ((k_z^2 - \varepsilon k_0^2)p_o + (k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2)p) ((k_z^2 - \varepsilon k_0^2)\varepsilon_o p_e + (k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2)\varepsilon p) \\ & = (\varepsilon_o - \varepsilon)^2 k_y^2 k_z^2 k_0^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

*Замечание.* Это выражение было получено другим путем в [39].

Если вещественные параметры  $k_y, k_z, p_o, p_e, p$  удовлетворяют четырем алгебраическим уравнениям (2.3), (2.5), (2.10) и (2.15), то частные решения (2.7) и (2.11) удовлетворяют всем условиям сшивки, то есть дают решение уравнений Максвелла, взятых в интегральной форме, во всем пространстве. Эти решения экспоненциально убывают при  $|x| \rightarrow \infty$ , если решение попадает в область

$$p_o > 0, \quad p_e > 0, \quad p > 0 \quad (2.16)$$

пятимерного пространства  $k_y k_z p_o p_e p$ . Неравенства (2.8) и (2.9) являются необходимыми и достаточными условиями вещественности  $p_o, p_e, p$  и поэтому они должны следовать из неравенств (2.16). В дальнейшем мы не будем их учитывать.

*Замечание.* Существование решение этой системы не гарантирует того, что получившееся поле не равно нулю тождественно, пример будет указан ниже. Это нужно дополнительно проверять.

Исследуем совместность этой системы алгебраических уравнений и неравенств.

### 2.3 Исследование системы алгебраических уравнений

Рассмотрим более подробно получившуюся у нас систему четырех алгебраических уравнениям (2.3), (2.5), (2.10) и (2.15).

Заметим, прежде всего, что систему можно избавиться от  $k_0$ , приняв

$$p = k_0 q, \quad p_o = k_0 q_o, \quad p_e = k_0 q_e$$

и

$$k_y = k_0 \beta, \quad k_z = k_0 \gamma.$$

Тогда система уравнений запишется в виде

$$\begin{cases} q_o^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon_o \\ q_e^2 = \beta^2 + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} \gamma^2 - \varepsilon_e \\ q^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \\ ((\gamma^2 - \varepsilon)q_o + (\gamma^2 - \varepsilon_o)q) ((\gamma^2 - \varepsilon)\varepsilon_o q_e + (\gamma^2 - \varepsilon_o)\varepsilon q) = \\ = (\varepsilon_o - \varepsilon)^2 \beta^2 \gamma^2. \end{cases} \quad (2.17)$$

Это система 4 уравнений относительно 5 неизвестных, поэтому из нее можно исключить 3 неизвестные и найти связь между оставшимися двумя. Поскольку для приложений направление вектора  $\vec{k}_\perp$ , то есть отношение  $\beta$  и  $\gamma$ , наиболее интересно, вполне естественно пытаться исключить величины  $q, q_o, q_e$ , характеризующие скорость убывания решения по мере удаления от поверхности  $x = 0$ . Однако на этом пути получается весьма сложное уравнение.

Нетрудно заметить, что неизвестные  $\beta$  и  $\gamma$  входят в систему только как квадраты, поэтому их очень удобно исключить. Мы не стали делать это руками, а воспользовались техникой исключительных идеалов [79], реализованной в системе компьютерной алгебры Sage [80]. Мы исключили неизвестные  $\beta, \gamma, q$  и получили уравнение вида

$$F(q_o, q_e) = 0,$$

коэффициенты которого зависят только от диэлектрических проницаемостей. Левую часть удалось разложить на три множителя.

Мы вычислили это выражение в Sage и разложили на множители.

```

sage: var("qo,qe,q,beta,gamma, epsilon, epsilon_o, epsilon_e")
(qo, qe, q, beta, gamma, epsilon, epsilon_o, epsilon_e)
sage: K=QQ[qo,qe,q,beta,gamma, epsilon, epsilon_o, epsilon_e]
sage: eqs=[q^2-beta^2-gamma^2+epsilon, qo^2-beta^2-gamma^2+
epsilon_o, epsilon_o*qe^2-epsilon_o*beta^2-epsilon_e*gamma^2+
epsilon_e*epsilon_o, ((gamma^2-epsilon)*qo+(gamma^2-epsilon_o)
*q)*((gamma^2-epsilon)*epsilon_o*qe+(gamma^2-epsilon_o)*epsilon
*q)-(epsilon_o-epsilon)^2*beta^2*gamma^2]
5 sage: J=K*eqs
sage: JJ=J.elimination_ideal([K(beta),K(gamma),K(q)])
sage: len(JJ.gens())
1
sage: F=JJ.gens()[0]
10 sage: F.factor()
epsilon_o * (-epsilon + epsilon_o) * (-qo + qe) * (-qo^2*epsilon
_o + qe^2*epsilon_o + epsilon*epsilon_o - epsilon_o^2 -
epsilon*epsilon_e + epsilon_o*epsilon_e) * (-qo^4*epsilon^2 -
2*qo^3*qe*epsilon^2 - qo^2*qe^2*epsilon^2 - 2*qo^2*qe^2*epsilon
*epsilon_o - 2*qo*qe^3*epsilon*epsilon_o + qo^2*qe^2*epsilon_o
^2 - qe^4*epsilon_o^2 + 2*qo^4*epsilon*epsilon_e + 2*qo^3*qe*
epsilon*epsilon_e + 2*qo^3*qe*epsilon_o*epsilon_e + 2*qo^2*qe
^2*epsilon_o*epsilon_e - qe^2*epsilon*epsilon_o^2 + qe^2*
epsilon_o^3 - 2*qo*qe*epsilon*epsilon_o*epsilon_e +
2*qo*qe*epsilon_o^2*epsilon_e - qo^2*epsilon*epsilon_e^2 + qo
^2*epsilon_o*epsilon_e^2)

```

Рассмотрим их по отдельности.

Во-первых, система (2.17) имеет решение с

$$q_e = q_o.$$

Тогда разность первых двух уравнений системы (2.17) дает

$$\frac{\varepsilon_e - \varepsilon_o}{\varepsilon_o} \gamma^2 - (\varepsilon_e - \varepsilon_o) = 0$$

или

$$\gamma^2 = \varepsilon_o.$$

Такого рода решение действительно имеется, но на нем

$$k_z^2 - \varepsilon_o k_0^2 = 0,$$

поэтому  $b_o = b_e = 0$  (поле в изотопной среде равно нулю), а  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  становятся линейно зависимыми. Поэтому, даже при ненулевых  $a_o, a_e$  поле в анизотропной

среде может быть равно нулю. Из общих соображений очевидно, что так оно и есть в данном случае: поле не может не вытекать из анизотропа.

Второй сомножитель дает

$$(q_e^2 - q_o^2)\varepsilon_o = (\varepsilon - \varepsilon_o)(\varepsilon_e - \varepsilon_o).$$

Разность первых двух уравнений системы (2.17) дает

$$(q_e^2 - q_o^2)\varepsilon_o = (\varepsilon_e - \varepsilon_o)(\gamma^2 - \varepsilon_o).$$

Отсюда

$$\gamma^2 = \varepsilon.$$

Это второй тривиальный случай: теперь  $a_o = a_e = 0$  и поля нет в анизотропной среде.

Отбрасывая тривиальные поля, видим, что система (2.17) имеет решение тогда и только тогда, когда обращается в нуль третий множитель:

$$\begin{aligned} & -q_o^4\varepsilon^2 - 2q_o^3q_e\varepsilon^2 - q_o^2q_e^2\varepsilon^2 - 2q_o^2q_e^2\varepsilon\varepsilon_o - 2q_oq_e^3\varepsilon\varepsilon_o + q_o^2q_e^2\varepsilon_o^2 - q_e^4\varepsilon_o^2 + \\ & + 2q_o^4\varepsilon\varepsilon_e + 2q_o^3q_e\varepsilon\varepsilon_e + 2q_o^3q_e\varepsilon_o\varepsilon_e + 2q_o^2q_e^2\varepsilon_o\varepsilon_e - \\ & - q_e^2\varepsilon\varepsilon_o^2 + q_e^2\varepsilon_o^3 - 2q_oq_e\varepsilon\varepsilon_o\varepsilon_e + 2q_oq_e\varepsilon_o^2\varepsilon_e - q_o^2\varepsilon\varepsilon_e^2 + q_o^2\varepsilon_o\varepsilon_e^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Это выражение несколько громоздко, однако нельзя не отметить его структуру

$$F_4(q_o, q_e) + F_2(q_o, q_e) = 0,$$

где  $F_4, F_2$  — однородные функции 4-го и 2-го порядков. Полагая

$$q_e = tq_o,$$

мы перепишем это уравнение так

$$q_o^2 F_4(1, t) + F_2(1, t) = 0.$$

Отсюда

$$q_o = \sqrt{\frac{-F_2(1, t)}{F_4(1, t)}},$$

где  $t$  может принимать любые значения. Таким образом, исследование разрешимости системы алгебраических уравнений свелось к одному уравнению, которое решается в радикалах.

Примененная выше теория исключительных идеалов дает уравнение

$$F(q_o, q_e) = 0$$

как необходимое и достаточное условие существования решения системы (2.17), но это решение может быть комплексным и бесконечно большим [79]. В данном случае можно выразить решение через параметр  $t$  в радикалах.

Величины  $q_e$  и  $q$  весьма просто выражаются через  $t$  и  $q_o$ : по определению

$$q_e = tq_o,$$

а в силу 1-го и 3-го уравнений системы (2.17)

$$q^2 = q_o^2 + \varepsilon_o - \varepsilon. \quad (2.19)$$

Величины  $\beta^2, \gamma^2$  можно восстановить, решив систему линейных относительно  $\beta^2, \gamma^2$  уравнений

$$\begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = q_o^2 + \varepsilon_o \\ \varepsilon_o \beta^2 + \varepsilon_e \gamma^2 = \varepsilon_o q_e^2 + \varepsilon_o \varepsilon_e \end{cases}$$

образованную 1-м и 2-м уравнениями системы (2.17).

Получается, что

$$(\varepsilon_e - \varepsilon_o)\beta^2 = \varepsilon_e(q_o^2 + \varepsilon_o) - (\varepsilon_o q_e^2 + \varepsilon_o \varepsilon_e) = (\varepsilon_e - \varepsilon_o t^2)q_o^2$$

и

$$(\varepsilon_e - \varepsilon_o)\gamma^2 = \varepsilon_o q_e^2 + \varepsilon_o \varepsilon_e - (\varepsilon_o(q_o^2 + \varepsilon_o) -) = \varepsilon_o(\varepsilon_e - \varepsilon_o + (t^2 - 1)q_o^2).$$

Отсюда, получим

$$\beta^2 = \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_o t^2)q_o^2}{\varepsilon_e - \varepsilon_o} \quad (2.20)$$

и

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon_o(\varepsilon_e - \varepsilon_o + (t^2 - 1)q_o^2)}{\varepsilon_e - \varepsilon_o}. \quad (2.21)$$

Вопрос об извлечении радикалов здесь не является тривиальным. Из общей теории мы знаем, что хотя бы при одном выборе ветви корня должно получаться решение. Поскольку в систему (2.17) входят только квадраты  $\beta, \gamma$ , решение будет получаться при любом выборе знаков перед радикалами. Однако  $q$  входит в систему в первой степени и поэтому решение системы (2.17) может

и, как мы убедимся ниже, будет получаться лишь при одном выборе ветви для корня при вычислении значения  $q$  по (2.19). Простейший способ проверить правильность выбора знака — нарисовать график левой части последнего из уравнений (2.17) при

$$q = \sqrt{q_o^2 + \varepsilon_o - \varepsilon}.$$

Теперь проведем вычисления в Sage.

```
sage: F4=-qo^4*epsilon^2 - 2*qo^3*qe*epsilon^2 - qo^2*qe^2*
epsilon^2 - 2*qo^2*qe^2*epsilon*epsilon_o - 2*qo*qe^3*epsilon
*epsilon_o + qo^2*qe^2*epsilon_o^2 - qe^4*epsilon_o^2 + 2*qo^4
*epsilon*epsilon_e + 2*qo^3*qe*epsilon*epsilon_e +
2*qo^3*qe*epsilon_o*epsilon_e + 2*qo^2*qe^2*epsilon_o*epsilon
_e
sage: F2=- qe^2*epsilon*epsilon_o^2 + qe^2*epsilon_o^3 - 2*qo*qe
*epsilon*epsilon_o*epsilon_e + 2*qo*qe*epsilon_o^2*epsilon_e
- qo^2*epsilon*epsilon_e^2 + qo^2*epsilon_o*epsilon_e^2
sage: var("t")
5 t
sage: -F4.subs([qo==1, qe==t]).factor()
(epsilon_o*t^2 + epsilon*t - epsilon_o*t + epsilon - 2*epsilon_e
)*(epsilon_o*t + epsilon)*(t + 1)
sage: F2.subs([qo==1, qe==t]).factor()
-(epsilon_o*t + epsilon_e)^2*(epsilon - epsilon_o)
```

## 2.4 Исследование системы алгебраических уравнений и неравенств

Как было отмечено в [32], для существования поверхностных волн необходимо выполнение условия

$$0 < \varepsilon_o < \varepsilon < \varepsilon_e. \quad (2.22)$$

Дабы не рассматривать особо случаи, в которых поверхностных волн заведомо нет, мы представим здесь исследование вопроса о выполнении неравенств

$$q_o > 0, \quad q_e > 0, \quad q > 0 \quad (2.23)$$

только для случая Дьяконова (2.22). Если первые два неравенства выполнены, то  $t = q_e/q_o$  положительно. Поэтому мы в дальнейшем ограничим изменение параметра  $t$  положительными значениями.

Итак, пусть  $t$  имеет положительное значение и по формулам из предыдущего раздела по нему построено решение системы (2.17). Для того, чтобы значение  $q_o$  было положительным, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\frac{-F_2(1,t)}{F_4(1,t)} > 0. \quad (2.24)$$

Само это значение можно найти по формуле

$$q_o = \sqrt{\frac{-F_2(1,t)}{F_4(1,t)}}.$$

При этом  $q_e = tq_o$  тоже имеет положительное значение.

Поскольку  $F_2(q_o, q_e)$  и  $F_4(q_o, q_e)$  — члены 2-го и 4-го порядков в выражении (2.18), мы можем выписать подкоренное выражение явно:

$$F_2(1,t) = -(\varepsilon_o t + \varepsilon_e)^2(\varepsilon - \varepsilon_o),$$

и

$$F_4(1,t) = -(\varepsilon_o t^2 + (\varepsilon - \varepsilon_o)t + \varepsilon - 2\varepsilon_e)(\varepsilon_o t + \varepsilon)(t + 1).$$

Это означает, что в случае Дьяконова  $-F_2 > 0$  и знак отношения  $F_2/F_4$  определяется знаком множителя

$$\varepsilon_o t^2 + (\varepsilon - \varepsilon_o)t + \varepsilon - 2\varepsilon_e.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена равен

$$D = \varepsilon^2 + \varepsilon_o^2 + 2\varepsilon_o(4\varepsilon_e - 3\varepsilon) > 0,$$

поэтому его корни — вещественные. Поскольку  $\varepsilon - 2\varepsilon_e < 0$ , эти корни имеют разный знак, значит нам следует ограничить изменение  $t$  нулем и положительным корнем этого уравнения. Обозначим положительный корень как

$$t_1 = \frac{\varepsilon_o - \varepsilon + \sqrt{D}}{2\varepsilon_o}.$$

Тогда выражение  $-F_2/F_4$  будет положительным в том и только в том случае, когда

$$0 < t < t_1. \quad (2.25)$$

Для того, чтобы квадрат величины  $\beta$ , вычисляемой по формулам (2.20), был положительным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$t < \sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}}.$$

Для того, чтобы квадрат величины  $q$ , вычисляемой по формуле (2.19), были положительны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$q_o^2 > \varepsilon - \varepsilon_o$$

или

$$\frac{-F_2(1,t)}{F_4(1,t)} > \varepsilon - \varepsilon_o.$$

В случае Дьяконова  $-F_2 > 0$  и при выполнении неравенства (2.25) выражение  $F_4 > 0$ , поэтому неравенство можно переписать в виде:

$$-F_2(1,t) > (\varepsilon - \varepsilon_o)F_4(1,t)$$

или

$$(\varepsilon_o t + \varepsilon_e)^2 > -(\varepsilon_o t^2 + (\varepsilon - \varepsilon_o)t + \varepsilon - 2\varepsilon_e)(\varepsilon_o t + \varepsilon)(t + 1). \quad (2.26)$$

Для того, чтобы квадрат величины  $\gamma$ , вычисляемой по формулам (2.21), был положительным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$(1 - t^2)q_o^2 < \varepsilon_e - \varepsilon_o$$

или

$$(1 - t^2)(\varepsilon_o t + \varepsilon_e)^2 > -(\varepsilon_o t^2 + (\varepsilon - \varepsilon_o)t + \varepsilon - 2\varepsilon_e)(\varepsilon_o t + \varepsilon)(t + 1). \quad (2.27)$$

Подведем итог сказанному: решение системы (2.17), полученное по выписанным параметрическим формулам, попадает в область (2.23) в том и только в том случае, когда 1.) параметр  $t$  принадлежит интервалу

$$0 < t < \min \left( t_1, \sqrt{\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o}} \right), \quad (2.28)$$

2.) выполнены два неравенства (2.26) и (2.27), и 3.) последнее из уравнений системы (2.17) выполняется при выборе главного значения радикала.

К этим условиям нужно еще добавить проверку правильности выбора знака перед корнем в выражении для  $q$ . Выполнение этих условий можно проверить в системе Sage.

Пример.

```
sage: S=[epsilon_o==2, epsilon==3, epsilon_e==5]
sage: t1=min((-1/2*(epsilon - epsilon_o - sqrt(epsilon^2 - 2*(3*
epsilon - 4*epsilon_e)*epsilon_o + epsilon_o^2))/epsilon_o).
subs(S), sqrt(epsilon_e/epsilon_o).subs(S))
```

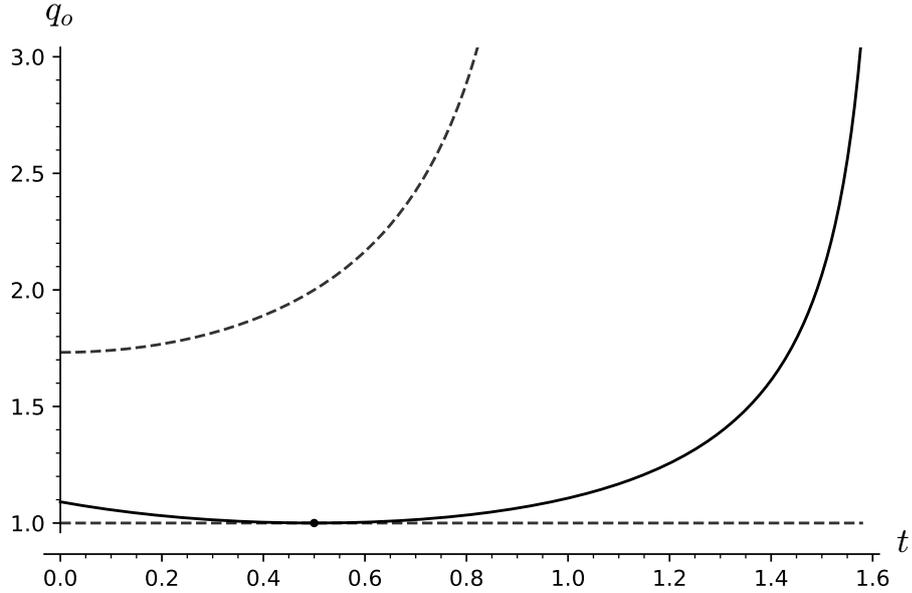


Рисунок 2.3 — График  $q_0$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_0$

```

sage: qqo=sqrt(-F2/F4).subs([qo==1, qe==t]).subs(S)
sage: qqe=t*qqo
5 sage: qq=sqrt(qqo^2+epsilon_o-epsilon).subs(S)
sage: bbeta=sqrt((epsilon_e-epsilon_o*t^2)*qqo^2/(epsilon_e-
epsilon_o)).subs(S)
sage: ggamma=sqrt(epsilon_o*(epsilon_e-epsilon_o+(t^2-1)*qqo^2)
/(epsilon_e-epsilon_o)).subs(S)
sage: FF=((ggamma^2-epsilon)*qqo+(ggamma^2-epsilon_o)*qq)*((
ggamma^2-epsilon)*epsilon_o*qqe+(ggamma^2-epsilon_o)*epsilon*
qq)-(epsilon_o-epsilon)^2*bbeta^2*ggamma^2

```

**Пример.** Пусть  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 3, \varepsilon_e = 5$ . На рис. 2.3 представлен график  $q_0$  (синяя линия) при значениях параметра  $t$ , взятых на интервале (2.28), красные линии указывают границы, которые задают неравенства (2.26) и (2.27),

$$\varepsilon - \varepsilon_o < q_o^2 < \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_o}{(1 - t^2)}$$

области изменения  $t, q_0$ . Как видно, ограничения на  $t$  приводят к автоматическому выполнению условий на  $q_0$ . Имеется лишь одна точка  $t = 1/2$ , в которой график  $q_0$  касается нижней границы. В этой точке как раз и происходит смена знака в выражении для  $q$ . На рис. 2.4 представлен график левой части последнего уравнения при выборе знака  $+$ : до точки  $t = 1/2$  у нас получается решение, после — нет. Поэтому решение удовлетворяет условию  $q > 0$  только при  $0 < t < 1/2$ .

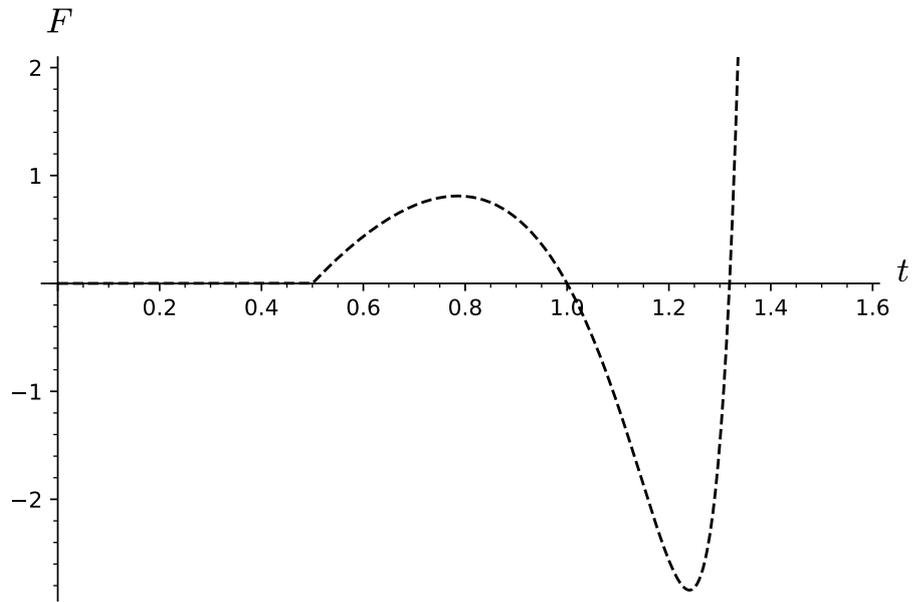


Рисунок 2.4 — График левой части последнего из уравнений (2.17)

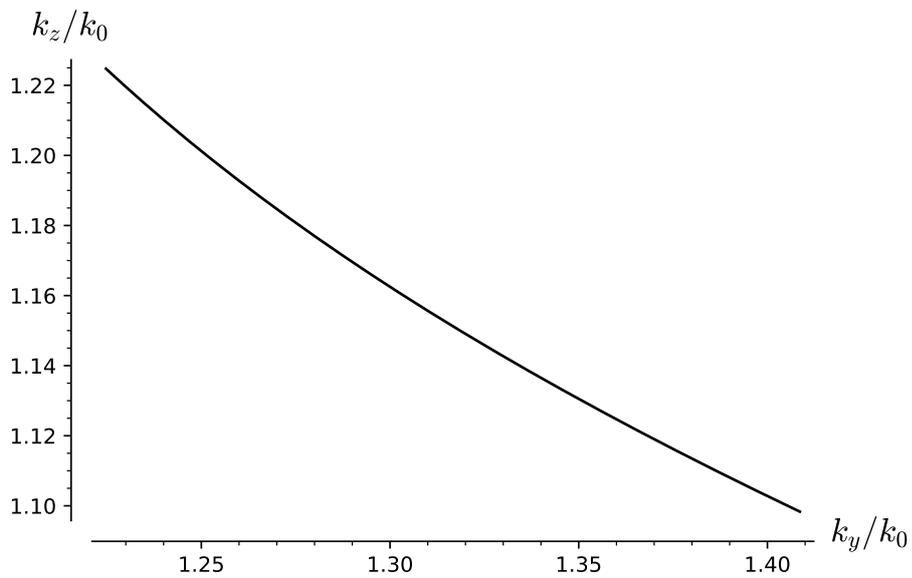


Рисунок 2.5 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны

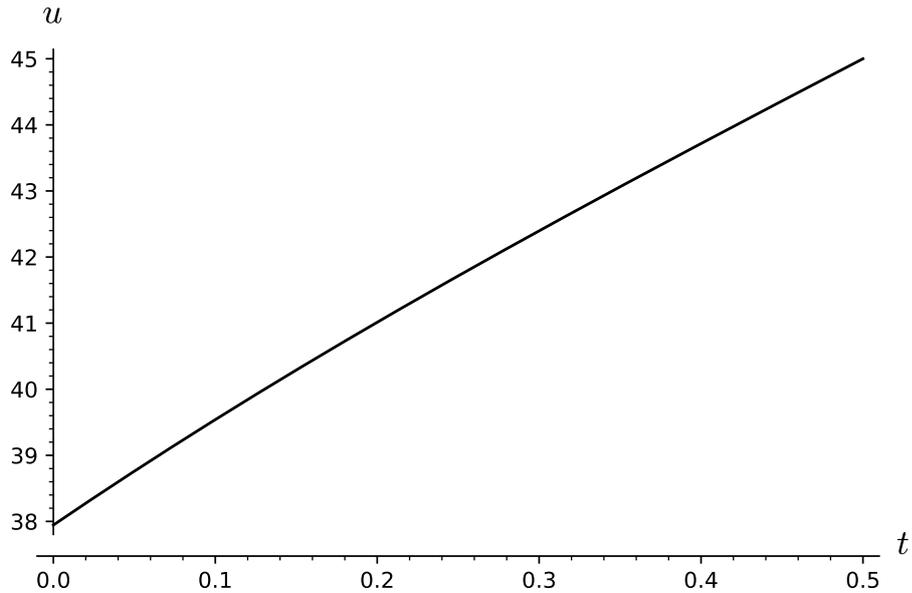


Рисунок 2.6 — График  $u$ , величина угла указана в градусах

Для этих значений были вычислены значения  $\beta$  и  $\gamma$ , которые оказались вещественными. На рис. 2.5 указаны точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны, симметричные им лежат в других четвертях. Для наглядности на рис. 2.6 представлен график зависимости угла  $u$  от  $t$ , заданного формулой

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{k_z}{k_y} = \operatorname{tg} u.$$

Получается, что поверхностная волна возникает только в направлениях

$$\vec{k}_\perp = (0, k_y, k_z)^T,$$

лежащих в узком диапазоне углов  $38\text{--}45^\circ$ .

Этот пример подсказывает, что 1.) неравенства (2.26) и (2.27) выполняются на всем рассматриваемом интервале изменения параметра  $t$  и что 2.) при выборе главного значения для радикала, наши явные формулы дают решение системы (2.17) только до точки касания графика  $q_0$  с нижней границей своего коридора. Мы полагаем, что эти утверждения можно доказать чисто алгебраическим путем.

Таблица 1 — Результаты компьютерных экспериментов

№	$\varepsilon_o$	$\varepsilon$	$\varepsilon_e$	Средний угол $u$ в градусах	Полуширина интервала изменения угла $u$ в градусах
1	1	2	3	27 – 32,9	2,95
2	2	3	5	38 – 45	3,5
3	2,5	3,5	5,5	40,5 – 46,3	2,9
4	3	4	6	42,4 – 47,2	2,4
5	3	4	10	45,5 – 58,9	6,7
6	3,0001	3,001	3,01	72,242775 - 72,242926	7,55E-05
7	3	3,01	3,02	44,9045 – 44,90514	0,0003199
8	3	4	4,001	1,568477 – 1,568566	4,45E-05
9	3,9	4	4,1	44,267 – 44,301	0,016999
10	3,9	4	4,001	5,638507 – 5,638543	1,8E-05
11	3,99	4	4,001	17,525734 – 17,525744	5E-06
12	2	7	55	13 – 50	18,5
13	2	2,1	80	45 – 85	20
14	2	54	55	1,501 – 1,528	0,0135
15	2	79,9	80	0,32438 – 0,3247	0,0001599
16	13	14	16	51,55 – 53	0,725
17	33	34	36	53,49 – 53,615	0,0625
18	133	134	136	54,429 – 54,438	0,0045
19	20	40	60	27 – 32,9	2,95
20	20	50	80	23 – 30,1	3,55
21	20	60	100	20,2 – 28,05	3,925
22	20	70	120	18,2 – 26,4	4,1
23	20	20,5	120	73,3 - 82,7	4,7
24	20	21	120	66,4 - 80,6	7,09999
25	20	30	120	37 - 61	12
26	20	100	120	10,712 - 12,4	0,844
27	20	110	120	7,48 - 8,04	0,27999
28	20	119	120	2,3415 - 2,358	0,00825

## 2.5 Результаты компьютерных экспериментов

Мы провели серию компьютерных экспериментов, итог которых приведен в таб. 1 и некоторые результаты из таблицы в графическом виде приведены в приложение А. Опираясь на них мы можем сделать следующие выводы:

1. Чем больше разница между  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_e$ , и чем меньше она между величинами  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon$  тем больше полуширина интервала изменения угла  $u$  (см. в таб. 1 случая под номерами 12, 13 и соответствующие им графики под номерами 3, 4 в приложение А);
2. Чем меньше разница между  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_e$ , и чем больше она между величинами  $\varepsilon_o$  и  $\varepsilon$  тем меньше полуширина интервала изменения угла  $u$  (см. в таб. 1 случая под номерами 14, 15 и соответствующие им графики под номерами 5, 6 в приложение А);
3. Если разность между величинами  $\varepsilon_o$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$  остается постоянной, а сами величины увеличиваются, тогда полуширина интервала изменения угла  $u$ , в котором существуют поверхностные волны уменьшается (см. в таб. 1 случая под номерами 16 — 18 и соответствующие им графики под номерами 7 — 9 в приложение А);
4. Если увеличивать разность между значениями  $\varepsilon_o$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$  на одинаковую величину, полуширина интервала изменения угла  $u$  тоже увеличивается (см. в таб. 1 случая под номерами 19 — 22 и соответствующие им графики под номерами 10, 11 в приложение А).

Эти выводы ждут своего теоретического обоснования.

Нам не удалось обнаружить простую зависимость между положением среднего угла  $u$  и значениями  $\varepsilon_o$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_e$ , при этом само положение среднего угла  $u$  меняется весьма приметно.

В целях тестирования нашего подхода мы рассмотрели несколько недьяконовских случаев, когда нарушено одно из неравенств (2.22). Результат одного из таких случаев представлен в приложении А (см. рис. А.45). Как это и ожидалось, решений в этих случаях обнаружено не было.

## 2.6 Заключение

Исследование области существования поверхностной волны Дьяконова на границе изотропного и анизотропного вещества сводится к системе алгебраических уравнений и неравенств, нам же удалось решить эту систему уравнений в радикалах в системе компьютерной алгебры Sage. При этом неравенства удалось исследовать аналитически лишь частично. На этой основе удалось провести серию компьютерных экспериментов, указывающих на дальнейшее направление исследований.

### Глава 3. О дисперсионной кривой волновода, заполненного неоднородным веществом

В классической электродинамике есть две родственные спектральные задачи — задача о нормальных модах волновода и задача о собственных колебаниях резонатора. Напомним их формулировки.

#### 3.1 Задача о собственных модах резонатора

Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^3$ , а  $c$  — положительная константа, имеющая смысл скорости распространения колебаний в  $G$ . Нетривиальное решение вида

$$u = u(x, y, z)e^{i\omega t}$$

уравнения колебаний

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \quad (3.1)$$

в  $G$ , удовлетворяющее краевым условиям Дирихле

$$u|_{\partial G} = 0$$

или Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial G} = 0$$

называют собственной модой резонатора  $G$  в скалярном случае. Соответствующее значение положительного параметра  $\omega$  называют собственной частотой этой моды и обычно вместо него используют т.н. волновое число  $k = \omega/c$ . Мы далее для определенности будем рассматривать условия Дирихле.

Свойства этой задачи были изучены еще в XIX веке. Известно, что собственные значения образуют бесконечно большую последовательность положительных чисел. Соответствующие им собственные моды образуют полную систему в том смысле, что всякое колебание можно представить в виде линейной комбинации собственных колебаний. Утверждение о полноте системы

собственных мод скалярной задачи связывают с именем Стеклова [47], в данном случае оно относительно просто обосновывается методами функционального анализа. В соответствующем пространстве Соболева спектральная задача сводится к изучению спектра самосопряженного вполне непрерывного оператора  $\hat{A}$ , порожденного билинейной формой

$$a(u, v) = \iiint_G uv dx dy dz.$$

Для численного решения этой задачи используют метод Галеркина, обычно используется метод конечных элементов [47]. Трудность решения задачи определяется исключительно трудностью задания самой области  $G$  и ее триангуляции. После построения базиса задача сводится к отысканию спектра самосопряженной разреженной матрицы. Одно из важных достижений современной линейной алгебры [57] стала разработка эффективных методов решения этой задачи. Поэтому отыскание спектра скалярной задачи не представляет сейчас никаких принципиальных трудностей.

В одномерном случае скалярная модель описывает собственные колебания струны, в двумерном — собственные колебания мембраны [46; 47]. Следует отметить, что для описания колебания разного рода мембран и пластин эта модель является весьма грубой [81]. Тем не менее, она всегда используется как простейшая модель, описывающая колебания всевозможных 1, 2 и трехмерных тел.

В электродинамике уравнение колебаний (3.1) тоже рассматривают как модель, описывающую весьма грубо некоторые явления теории дифракции, если забыть о «векторном характере электромагнитного поля» [82]. Однако если принять во внимание поляризацию электромагнитного поля, задача о собственных колебаниях резонатора оказывается во многом подобной скалярной.

Пусть  $G$  — область в  $\mathbb{R}^3$ , именуемая далее резонатором. Будем предполагать, что эта область — связная, а ее граница состоит из конечного числа гладких непересекающихся поверхностей, склеенных по своим краям, именуемым ребрами. В таком случае почти во всех точках границы определена и непрерывна нормаль к границе, за исключением ребер. Примером такой области могут служить всевозможные многогранники, сфера, эллипсоиды и т.д.

Нетривиальное поле вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t},$$

удовлетворяющее системе однородных уравнений Максвелла и граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0,$$

называют собственной модой, а соответствующее значение положительного параметра  $\omega$  — собственной частотой. Для отыскания собственных частот требуется решить задачу на собственные значения

$$\text{rot } \vec{E} = -ik\mu\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = ik\varepsilon\vec{E}$$

с граничными условиями

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0$$

относительно спектрального параметра  $k = \omega/c$  (волновое число). Эта задача, подобно скалярной, записывается как задача на собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора и поэтому она имеет дискретный спектр, который можно найти приближенно по методу Галеркина [83, р. 181]. Для теоретического обоснования сказанного вводят специальные пространства Соболева, теоремы вложения для которых, к сожалению, пока доказаны в предположении гладкой границы [84, §6.1].

Пусть  $G$  — резонатор, заполненный веществом, характеризуемой, вообще говоря, переменной  $\varepsilon$  и постоянной  $\mu$ . В этом случае удобно исключить и системы уравнений Максвелла  $\vec{E}$  и записать систему уравнений второго порядка

$$\text{rot } \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{H} = k^2\mu\vec{H}, \quad (3.2)$$

к которой следует добавить краевые условия

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = 0, \quad \text{rot } \vec{H} \times \vec{n} = 0. \quad (3.3)$$

Всякому нетривиальному решению  $\vec{H}$  задачи (3.2), (3.3) отвечает собственная мода

$$\vec{E} = \frac{1}{ik\varepsilon} \text{rot } \vec{H} e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H} e^{i\omega t}$$

резонатора  $G$ . Умножим (3.2) на тестовый вектор  $\vec{F}$ , проинтегрируем по  $G$  и применим формулу интегрирования по частям:

$$\iiint_G \text{rot } \vec{F}^* \cdot \text{rot } \vec{H} \frac{dx dy dz}{\varepsilon} - k^2\mu \iiint_G \vec{F}^* \cdot \vec{H} dx dy dz = 0. \quad (3.4)$$

Чтобы доказать теоремы вложения необходимо исключить из рассмотрения векторы, дивергенция которых отлична от нуля.

**Определение 1.** Замыкание множества векторов  $\vec{F} \in C^1(\overline{G})$ , удовлетворяющих условию  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  в области  $G$  и  $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$  на ее границе, по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\vec{F}, \vec{H}) = \iiint_G \operatorname{rot} \vec{F}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \frac{dxdydz}{\varepsilon},$$

является гильбертовым пространством, которое мы будем обозначать как  $\mathfrak{H}(G)$ .

Если  $\varepsilon$  — гладкая функция, то собственная мода резонатора принадлежит  $\mathfrak{H}(G)$  и удовлетворяет тождеству (3.4) для любого вектора  $\vec{F} \in \mathfrak{H}(G)$ . Обратно, если гладкий вектор  $\vec{H}$  удовлетворяет этому соотношению при любом  $\vec{F} \in \mathfrak{H}(G)$ , то

$$\iiint_G \vec{F}^* \cdot \left( \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{H} - k^2 \mu \vec{H} \right) dxdydz + \iint_{\partial G} \vec{F}^* \cdot [\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{H}] ds = 0.$$

Отсюда следует, что поле  $\vec{H}$  удовлетворяет уравнения (3.2) в  $G$  и двум из трех граничных условий (3.3). Третье выполняется по построению  $\mathfrak{H}(G)$  и на самом деле при сделанных предположениях о гладкости следует из первых двух.

**Определение 2.** Обобщенной собственной модой резонатора  $G$  будем называть ненулевой вектор  $\vec{H} \in \mathfrak{H}(G)$ , который удовлетворяет тождеству (3.4) для любого вектора  $\vec{F} \in \mathfrak{H}(G)$ .

**Теорема 1** (Дюво и Лионс). Если граница  $G$  — гладкая, то пространство  $\mathfrak{H}(G)$  вложено компактно в  $L^2(G)$ .

Доказательство приведено в [84].

Из теоремы вложения следует, что существует такой вполне непрерывный самосопряженный оператор  $\hat{A}$ , что

$$\mu \iiint_G \vec{F}^* \cdot \vec{H} dxdydz = \iiint_G \operatorname{rot} \vec{F}^* \cdot \operatorname{rot}(\hat{A}\vec{H}) \frac{dxdydz}{\varepsilon}.$$

Поэтому соотношение (3.4) можно записать в виде

$$\vec{H} = k^2 \hat{A}\vec{H}.$$

Поэтому собственные частоты резонатора образуют бесконечно большую последовательность, а отвечающие им собственные моды образуют ортонормированный базис в пространстве  $\mathfrak{H}(G)$ .

## 3.2 Задача о нормальных модах волновода

### 3.2.1 Скалярная модель

Пусть  $S$  — регулярная область в  $\mathbb{R}^2$ , цилиндр  $S \times \mathbb{R}$  условимся называть волноводом. Условимся, что ось  $Oz$  используемой декартовой системы координат направлена по оси этого цилиндра.

Нетривиальное решение вида

$$u = u(x, y)e^{i\omega t - i\gamma z}$$

уравнения колебаний (3.1) в цилиндре  $S \times \mathbb{R}$ , удовлетворяющее краевым условиям Дирихле

$$u|_{\partial S \times \mathbb{R}} = 0$$

или Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial S \times \mathbb{R}} = 0$$

называют нормальной модой скалярного волновода, а соответствующее значение положительного параметра  $\omega$  — собственной частотой. Параметр  $\gamma/c$  называют коэффициентом фазового замедления. Если  $\gamma > 0$ , то нормальная мода бежит вдоль оси  $z$ , если  $\gamma < 0$ , то против нее. Эти моды называют направляемыми. Если же  $\gamma$  содержит мнимую добавку, то нормальные моды с ростом  $z$  или экспоненциально возрастают, или экспоненциально убывают. Такие моды называют эванесцентными.

Задача об отыскании нормальных мод скалярного волновода сводится к 2-мерной спектральной задаче: найти нетривиальное решение  $u$  уравнения

$$\Delta_2 u + (k^2 - \gamma^2)u = 0$$

с краевыми условиями Дирихле или Неймана.

Условимся собственные значения задачи

$$\Delta_2 \varphi + \alpha^2 \varphi = 0, \quad \varphi|_{\partial S} = 0 \tag{3.5}$$

нумеровать в порядке возрастания и с учетом кратности обозначать как  $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots$ , а соответствующие им собственные функции обозначать как  $\varphi_n$ . При этом

$$\varphi_n(x, y) e^{i\alpha_n t}$$

описывают собственные колебания мембраны  $S$ . По заданной области  $S$  числа  $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots$  определяются однозначно. Для некоторых областей они могут быть вычислены аналитически, для всех прочих — найдены по методу Галеркина [47].

По этой причине параметры  $\omega$  и  $\gamma$  нормальных мод скалярного волновода связаны соотношениями

$$k^2 - \gamma^2 = \alpha_n^2.$$

Поэтому при фиксированной частоте  $\omega$  имеется не более чем конечное число положительных значений параметра  $\gamma$ , при которых имеются нормальные моды. Эти моды описывают волну бегущую вдоль волновода и, как уже было сказано, называются направляемыми. Все остальные нормальные моды имеют мнимое  $\gamma$  и по этой причине экспоненциально растут или убывают вдоль оси волновода.

В силу теоремы Стеклова монохроматическое скалярное поле в волноводе всегда можно представить в виде суммы

$$\sum (a_n e^{i\omega t - i\gamma_n z} + b_n e^{i\omega t + i\gamma_n z}) \varphi_n(x, y),$$

где  $a_n, b_n$  — комплексные амплитуды. Эта формула чрезвычайно важна для теории дифракции. Она утверждает, что поле, скажем, при больших  $z$  является суперпозицией конечного числа бегущих нормальных мод, суммы экспоненциально убывающих эванесцентных мод и суммы экспоненциально растущих мод. Парциальные условия излучения состоят в том, что последнего, экспоненциально растущего слагаемого, быть не должно [6].

Также следует отметить, что нормальные моды в рамках скалярной модели с условиями Дирихле существуют лишь при тех значениях  $k, \gamma$ , которые лежат на гиперболах

$$k^2 - \gamma^2 = \alpha_n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Совокупность таких точек  $(k, \gamma)$ , которым отвечают нормальные моды, называют дисперсионной кривой волновода. Дисперсионная кривая скалярного волновода состоит из счетного числа гипербол.

Случай граничных условий Неймана не представляет никаких принципиальных трудностей. Условимся собственные значения задачи

$$\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial S} = 0 \quad (3.6)$$

нумеровать в порядке возрастания и с учетом кратности обозначать как  $\beta_1^2, \beta_2^2, \dots$ , а соответствующие им собственные функции обозначать как  $\psi_n$ . Добавим к ним нулевое собственное значение  $\beta_0 = 0$  и отвечающую ему собственную функцию  $\psi_0 = 1$ . Система функций  $\psi_n$  опять является полной, а нормальные моды в рамках скалярной модели с условиями Неймана существуют лишь при тех значениях  $k, \gamma$ , которые лежат на гиперболах

$$k^2 - \gamma^2 = \beta_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 3.2.2 Векторная модель

Обратимся теперь к векторной модели электромагнитного волновода. Нетривиальное поле вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) e^{i\omega t - i\gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y) e^{i\omega t - i\gamma z},$$

удовлетворяющее системе однородных уравнений Максвелла и граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0,$$

называют собственной модой, а соответствующее значение положительного параметра  $\omega$  — собственной частотой. Параметр  $\beta = \gamma/c$  называют коэффициентом фазового замедления. Для отыскания собственных частот требуется решить задачу на собственные значения

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -ik\mu \vec{H}, \quad \overline{\text{rot}} \vec{H} = ik\varepsilon \vec{E}$$

с граничными условиями

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0.$$

Здесь под  $\overline{\text{rot}}$  подразумевается дифференциальный оператор, в котором дифференцирование по  $z$  заменено на умножение  $-i\gamma$ . Как и в скалярном случае,

точки плоскости  $k\gamma$ , при которых эта задача имеет нетривиальное решение, образуют некоторую кривую, именуемую дисперсионной кривой волновода.

В том случае, когда заполнение волновода однородно, Тихонов А.Н. и Самарский А.А. [5] доказали теорему о декомпозиции поля, из которой следует, что полную систему мод волновода можно составить из мод двух типов: трансверсально магнитных (ТМ,  $H_z = 0$ ) и трансверсально электрических (ТЕ,  $E_z = 0$ ). Для ТЕ моды из уравнения

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0$$

следует, что существует такая функция  $u$

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_z = 0.$$

Эту функцию называют функцией Боргниса [6]. Прямой подстановкой этих выражений в уравнения Максвелла удастся выразить все компоненты поля через производные функции Боргниса, а для самой функции Боргниса — получить скалярную задачу на собственные значения с условием Дирихле. Аналогично, ТЕ моду удастся выразить через производные функции Боргниса, для которой удастся получить скалярную задачу на собственные значения с условием Неймана. Следует только отбросить нулевое собственное значение, которому будет соответствовать тривиальное электромагнитное поле.

Таким образом, теория функций Боргниса позволяет свести исследование таких мод волновода, заполненного оптически однородным веществом, к исследованию спектра оператора Лапласа. При этом дисперсионная кривая оказывается объединением счетного числа гипербол — дисперсионных кривых для скалярного волновода с условиями Дирихле и Неймана.

Однако на практике довольно часто встречаются волноводы с оптически неоднородным заполнением. К числу таких волноводов относятся волноводы с сердечником, которые получают путем покрытия диэлектрического цилиндра другим диэлектриком а затем проводящим слоем, и многожильные волноводы, которые получают путем сложения нескольких диэлектрических цилиндров в пучок, покрытый снаружи проводящим слоем. В этом случае провести декомпозицию на моды ТЕ и ТМ типов невозможно. Контрпример, показывающий существование гибридных мод (то есть мод, которые не принадлежат к ТМ или ТЕ типу), указан в [27]. В этой работе предлагается рассмотреть волновод прямоугольного сечения, внутри которого находятся несколько параллельных

слоев (см. рис. 3.1) [28]. В этом случае можно построить по методу сопряжения два семейства гибридных мод — моды типа SLE ( $E_y = 0$ ) и моды типа SLH ( $H_y = 0$ ) (см. ниже п. 3.3) [29; 30].

Без теоремы о декомпозиции задача о нормальных модах волновода в векторном случае не распадается на две скалярные и, таким образом, не принадлежит к какому либо изученному типу.

Традиционно эта задача записывается как задача на собственные значения относительно трех компонент поля. Выбор трех компонент поля из шести компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  может быть выполнен различными способами, что ведет к различным постановкам задачи. В работах А.Н. Боголюбова и Т.В. Едакиной [85; 86] и работах Франка Шмидта [87; 88] использовалась запись относительно компонент вектора  $\vec{H}$ , в работах Е. Лезара и Д. Девидсона [89] — относительно вектора  $\vec{E}$ , в работах А.Л. Делицына [14–16; 21] относительно  $H_x, H_y, E_z$ . Нормальные моды осесимметричного волновода с диэлектрическим сердечником рассматривались в работах Н.А. Новоселовой, С.Б. Раевского и А.А. Титаренко [12], а также в работах А.Л. Делицына и С.И. Круглова [90; 91].

Во всех указанных случаях задача сводится к исследованию спектра несамосопряженного операторного пучка, квадратичного относительно спектрального параметра. Во всех названных работах в качестве спектрального параметра используется  $\gamma$ , а частота  $\omega$  считается заданной.

Систематическое исследование несамосопряженных операторных пучков было начато работами Келдыша М.В., Лидского В.Б., Гохберга И.Ц. и Крейна М.Г. [22; 92–94]. Главная трудность этих вопросов проявляется уже в матричном случае — каноническая форма матрицы с диагональной меняется на форму Жордана. Как следствие, чтобы доказать полноту системы собственных векторов к ним приходится добавить т.н. корневые вектора.

Условия, в которых Келдыш М.В. доказал полноту корневых векторов квадратичного операторного пучка, выполняются далеко не во всех возможных записях задачи о нормальных модах волновода. Впервые полнота системы корневых векторов волновода с кусочно постоянным заполнением была обоснована в работах Ю.Г. Смирнова [9–11; 95]. Для произвольного заполнения в [14–16; 21] удалось выбрать удачный набор из трех компонент поля и доказать, что в надлежащем образом построенном функциональном пространстве полученный пучок удовлетворяет теореме Келдыша М.В. [22; 92]. Это в свою очередь позволило обосновать постановку парциальных условий излучения. Ба-

зисность системы корневых векторов волновода удалось обосновывать только для аксиально симметричного случая [17; 18].

Еще большие трудности предлагает численное вычисление нормальных мод. Применение метода Галеркина, равно как и любого другого метода усечения приводит к исследованию несамосопряженного матричного пучка, численные методы вычисления его спектра весьма прихотливы. В ряде работ [12; 90; 91] встроенные, напр., в MatLab алгоритмы применялись по принципу «черного ящика». В такого рода компьютерных экспериментах дисперсионная кривая оказывалась не монотонной, вещественные собственные значения внезапно уходили в комплексную область и т.д. Вообще говоря, все эти явления присущи спектральной теории несамосопряженных матриц. Однако физический смысл этих явлений вызывает много вопросов. Напр., легко вообразить, что волновод с несколькими жилами «работает» как несколько одинаковых волноводов (жил), между которыми имеется некоторая слабая связь. Понятно, что вместо моды, бегущей по одной жиле, мы должны получить связанные моды, бегущие сразу по всем жилам. Однако совершенно не ясно, почему эти моды должны подвергаться гибридизации и тем более почему их параметры должны уходить в комплексную область.

Таким образом, спектральная задача теории волноводов до сих пор является вызовом для исследователей. Естественный путь ее решения — поиск новых постановок. Поскольку всевозможные тройки компонент поля уже были перебраны, в работах М.Д. Малых [19; 20; 96] было предложено использовать потенциалы. Было показано, что поле всегда можно представить при помощи 4-х скалярных функций, названных потенциалами. В случае оптически однородного заполнения между ними имеется два линейных соотношения, и поле можно выразить при помощи двух скалярных функций — функций Боргниса. М.Д. Малых предложил в общем случае использовать все 4 потенциала для расчета дисперсионной кривой, что с успехом было реализовано в дисс. А.А. Тютюник [8], см. также [24].

После некоторых усилий удалось свести спектральную задачу, записанную относительно потенциалов, к исследованию спектра самосопряженного квадратичного пучка [31]. К сожалению, это не дает существенного выигрыша. Дело в том, что спектральную задачу  $Au = \lambda u$  для любого несамосопряженного оператора  $A$  можно заменить на исследование спектра квадратичного пучка

$$(A - \lambda E)(A^* - \lambda E) = AA^* - (A + A^*)\lambda + \lambda^2,$$

на что впервые обратили внимание Гохберг И.Ц. и Крейн М.Г. [92].

Можно, однако, заметить, что все эти подходы объединяет одно обстоятельство: все они рассматривали спектральную задачу теории волноводов как задачу на собственные значения относительно параметра  $\gamma$ , а волновое число считали заданным. Такой подход вполне оправдан, поскольку в задаче о волноводной дифракции рассматривается падение монохроматической волны, которая частично проходит и частично отражается от неоднородности и при этом возникают прошедшие и отраженные волны, бегущие от неоднородности, но имеющие ту же частоту, что и падающая волна. С другой стороны для построения дисперсионной кривой совершенно не обязательно искать ее точки сначала при одном значении частоты, потом при другом, потом при третьем. Допустимо, искать ее точки при фиксированных значениях  $\gamma$ . Принципиальным здесь является только удобство решения задачи.

Из физических соображений очевидно, что между модами, бегущими вдоль оси волновода, и стоячими модами цилиндрического резонатора, должна быть простая связь. Изучив ее, мы получим метод построения дисперсионной кривой, который требует решения спектральной задачи в цилиндрическом резонаторе, то есть классической самосопряженной задачи.

### 3.3 Тестовый пример: SLE моды волновода прямоугольного сечения с двумя слоями

#### 3.3.1 Слоистый волновод прямоугольного сечения

В качестве тестового примера рассмотрим волновод прямоугольного сечения  $L_x \times L_y$  (см. рис. 3.1), заполнение которого кусочно постоянно и зависит только от  $y$ . Иными словами, волновод состоит из нескольких слоев, на рис. 3.1 изображено два таких слоя равной толщины  $L_y/2$ . Когда один из слоев — воздух, говорят, что рассматривается волновод, заполненный наполовину.

Известно два семейства нормальных мод такого волновода — SLE и SLH моды, у первых  $E_y = 0$ , а у вторых —  $H_y = 0$  [97]. Теория этих мод во многом подобна теории ТМ и ТЕ мод, развитой Тихоновым и Самарским [46].

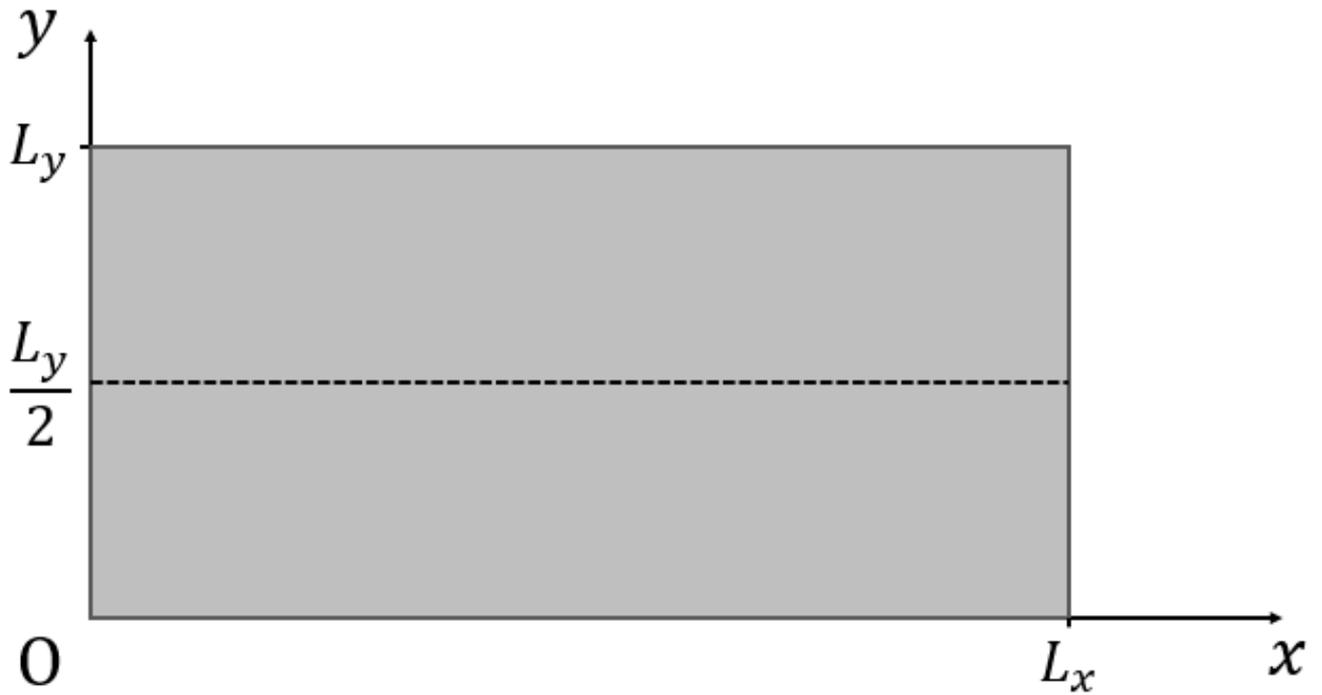


Рисунок 3.1 — Волновод, заполненный слоями

Будем искать SLE моды по методу разделения переменных:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} A_x(y) \cos k_x x \\ 0 \\ A_z(y) \sin k_x x \end{pmatrix} e^{ik_z z - i\omega t} \quad (3.7)$$

и

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} B_x(y) \sin k_x x \\ B_y(y) \cos k_x x \\ B_z(y) \cos k_x x \end{pmatrix} e^{ik_z z - i\omega t}.$$

Здесь выбор синусов и косинусов определяется таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям (см. ниже п. 3.3.3).

### 3.3.2 Уравнения Максвелла в слое

Прежде всего, рассмотрим к чему приводят уравнения Максвелла в слое, где  $\epsilon$  и  $\mu$  — постоянные. С этой целью зададим в Sage поле указанного вида:

```
var("x,y,z,kx,kz,k,epsilon,mu")
Ax=function("Ax")(y)
Az=function("Az")(y)
```

```

Bx=function("Bx")(y)
5 By=function("By")(y)
  Bz=function("Bz")(y)
  Ex=Ax*cos(kx*x)*exp(i*kz*z)
  Ey=0
  Ez=Az*sin(kx*x)*exp(i*kz*z)
10 Hx=Bx*sin(kx*x)*exp(i*kz*z)
  Hy=By*cos(kx*x)*exp(i*kz*z)
  Hz=Bz*cos(kx*x)*exp(i*kz*z)
  E=[Ex,Ey,Ez]
  H=[Hx,Hy,Hz]

```

Затем составим уравнения Максвелла:

```

def rot(Ax,Ay,Az):
    return [diff(Az,y)-diff(Ay,z), -diff(Az,x)+diff(Ax,z), diff(
    Ay,x)-diff(Ax,y)]

eqs=list(vector(rot(*E))+i*k*mu*vector(H))+list(vector(rot(*H))-
    i*k*epsilon*vector(E))

```

Мы можем вывести эти уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 ik\mu B_x + \frac{dA_z}{dy} = 0, \\
 ik\mu B_y + ik_z A_x - k_x A_z = 0, \\
 -ik\mu B_z + \frac{dA_x}{dy} = 0, \\
 -i\epsilon k A_x - ik_z B_y + \frac{dB_z}{dy} = 0, \\
 ik_z B_x + k_x B_z = 0, \\
 i\epsilon k A_z + k_x B_y + \frac{dB_x}{dy} = 0.
 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Три уравнения из этой системы позволяют выразить  $\vec{B}$  через  $A_x$  и  $A_z$  и их производные:

```

S={Bx: Bx.subs(solve(eqs[0],Bx)), diff(Bx,y): diff(Bx.subs(solve
    (eqs[0],Bx)),y), \
  By: By.subs(solve(eqs[1],By)), diff(By,y): diff(By.subs(solve(
    eqs[1],By)),y), \
  Bz: Bz.subs(solve(eqs[2],Bz)), diff(Bz,y): diff(Bz.subs(solve(
    eqs[2],Bz)),y)}
[eq.subs(S) for eq in eqs]

```

После этой подстановки, из 6 уравнений остается 3 нетривиальных:

$$\begin{cases} -i\epsilon k A_x + i(k_z A_x + ik_x A_z) \frac{k_z}{k\mu} - i \frac{d^2 A_x}{dy^2} \frac{1}{k\mu} = 0, \\ -ik_x \frac{dA_x}{dy} \frac{1}{k\mu} - k_z \frac{dA_z}{dy} \frac{1}{k\mu} = 0, \\ i\epsilon k A_z - (k_z A_x + ik_x A_z) \frac{k_x}{k\mu} + i \frac{d^2 A_z}{dy^2} \frac{1}{k\mu} = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение, с точностью до несущественной для нас константы, позволяет найти линейную связь между  $A_x$  и  $A_z$ :

$$A_z = -\frac{ik_x}{k_z} A_x. \quad (3.9)$$

В Sage помимо этой связи нужно явно указать, как выражают производные  $A_z$  через  $A_x$ :

$$\begin{cases} S2=\{Az: -i*kx/kz*Ax, \text{diff}(Az,y): \text{diff}(-i*kx/kz*Ax,y), \text{diff}(Az,y, \\ y): \text{diff}(-i*kx/kz*Ax,y,y) \\ [(eq.subs(S).subs(S2)).factor() \text{ for eq in eqs}] \end{cases}$$

В итоге нетривиальными оказываются 2 уравнения, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому в слое уравнения Максвелла сводятся к уравнению

$$\frac{d^2 A_x}{dy^2} + (\epsilon\mu k^2 - k_x^2 - k_z^2) A_x = 0 \quad (3.10)$$

и уравнениям, позволяющим вычислить  $A_z$  и  $\vec{B}$  по известному  $A_x$ .

### 3.3.3 Граничные условия

На границе волновода моды должны удовлетворять условию идеальной проводимости стенок:  $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ .

На границе  $x = 0$ ,  $L_x$  эти условия дают:

$$E_y = E_z = 0.$$

Для SLE мод компонента  $E_y$  равна нулю тождественно, поэтому остается условие  $E_z = 0$ . Мы взяли для  $E_z$  именно синус в (3.7), чтобы при  $x = 0$  это условие

удовлетворялось всегда. При  $x = L_x$  мы получаем условие  $\sin(k_x L_x) = 0$ , из которого будем определять подходящие значения  $k_x$ :

$$k_x = \frac{\pi n}{L_x}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

На границе  $y = 0, L_y$  условия идеальной проводимости дают:

$$E_x = E_z = 0.$$

Поскольку в слоях  $A_x$  и  $A_y$  связаны линейно, это условие сводится к условию Дирихле на  $A_x$ :

$$A_x(0) = A_x(L_y) = 0. \quad (3.12)$$

### 3.3.4 Условия сопряжения

На границе двух слоев  $y = M$  имеем требование непрерывности  $E_x, E_z$  и  $H_x, H_z$ .

Непрерывность  $E_x$  указывает на непрерывность  $A_x$ . Коэффициент в формуле (3.9), связывающий  $A_z$  и  $A_x$ , не зависит от заполнения, поэтому непрерывность  $A_x$  влечет непрерывность  $A_z$ , а, следовательно, и  $E_z$ .

Уравнения Максвелла (3.8) дают

$$ik\mu B_x = -\frac{dA_z}{dy}, \quad ik\mu B_z = \frac{dA_x}{dy}.$$

Отсюда видно, что непрерывность  $H_x, H_z$  эквивалентна непрерывности величины  $\frac{1}{\mu}A'_x$ .

### 3.3.5 Тестовый пример

В качестве тестового примера рассмотрим волновод прямоугольного сечения  $L_x \times L_y$  с двумя слоями: при  $y < L_y/2$  пусть  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , а при  $y > L_y/2$  пусть  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (см. рис. 3.1). Будем считать  $\mu$  постоянной величиной.

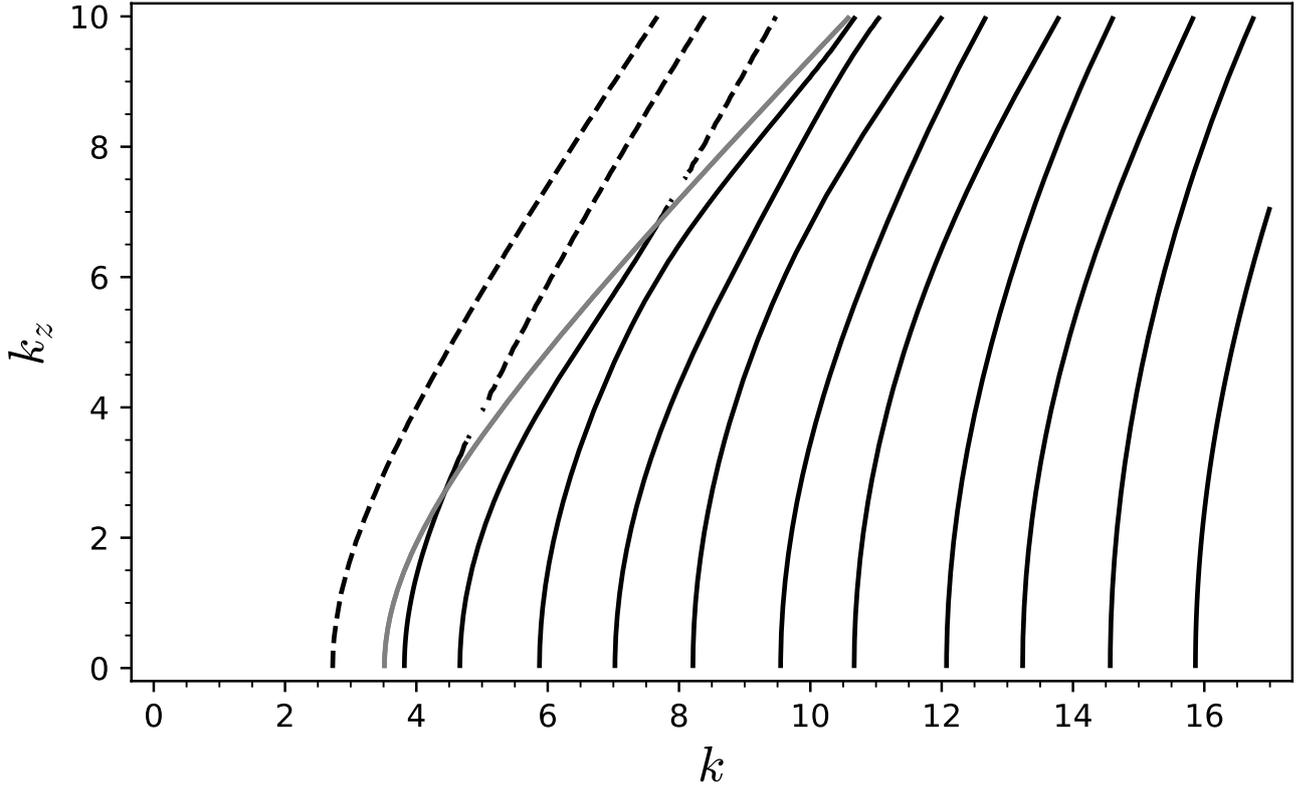


Рисунок 3.2 — Дисперсионная кривая для тестового волновода с двумя слоями ( $\epsilon_0 = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $L_x = 1$ ,  $L_y = 2$ )

Такой волновод имеет семейство SLE мод (3.7), параметры которых при заданной частоте  $\omega$  определяются следующим образом. Число  $k_x$  дается формулой (3.11). Число  $k_z$  является собственным значением задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_x}{dy^2} + (\epsilon\mu k^2 - k_x^2 - k_z^2)A_x = 0, \\ [A_x] = \left[ \frac{dA_x}{dy} \right] = 0, \quad y = \frac{L_y}{2}, \\ A_x(0) = A_x(L_y) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Эта задача складывается из уравнения (3.10), граничных условий и условий сопряжения, найденных выше. По собственной функции  $A_x$  можно вычислить  $A_z$  через (3.9), а по ним —  $\vec{B}$  и тем самым определить все величины, входящие в (3.7).

Для дальнейших тестов нам интересна зависимость собственных значений  $k_z$  задачи (3.13) от  $k = \omega/c$ .

Решение (3.13) при  $y < L_y/2$

$$A_x = a \sin(\sqrt{\epsilon_1\mu k^2 - k_x^2 - k_z^2}y).$$

Решение (3.13) при  $y > L_y/2$

$$A_x = b \sin(\sqrt{\varepsilon_0 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2}(L_y - y)). \quad (3.14)$$

Выбор синусов гарантирует выполнение граничных условий. При  $y = L_y/2$  имеем

$$a \sin(\sqrt{\varepsilon_1 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} L_y/2) = b \sin(\sqrt{\varepsilon_0 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} L_y/2)$$

и

$$a \sqrt{\varepsilon_1 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} \cos(\sqrt{\varepsilon_1 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} L_y/2) = \\ - b \sqrt{\varepsilon_0 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} \cos(\sqrt{\varepsilon_0 \mu k^2 - k_x^2 - k_z^2} L_y/2).$$

Таким образом,  $k_z$  является корнем определителя этой однородной системы линейных уравнений.

```

epsilon0=1
epsilon1=2
mu=1
Lx=1
5 Ly=2
n=1
kx=pi*n/Lx
a11=sin(sqrt(epsilon1*mu*k^2 - kx^2 - kz^2)*Ly/2)
a12=sin(sqrt(epsilon0*mu*k^2 - kx^2 - kz^2)*Ly/2)
10 a21=sqrt(epsilon1*mu*k^2 - kx^2 - kz^2)*cos(sqrt(epsilon1*mu*k^2
    - kx^2 - kz^2)*Ly/2)
a22=-sqrt(epsilon0*mu*k^2 - kx^2 - kz^2)*cos(sqrt(epsilon0*mu*k
    ^2 - kx^2 - kz^2)*Ly/2)
A=matrix([[a11, a12], [a21, a22]])
A.det()

```

Результат вычисления представлен на рис. 3.2 в виде сплошных линий. Их неожиданный обрыв происходит из-за того, что в формуле (3.14) синус переходит в синус гиперболический. Мы добавили второй кусок программы, в которой выполнена замена синуса на синус гиперболический, в результате найдено продолжение дисперсионных кривых, изображенное на рис. 3.2 пунктиром.

Таким образом, метод сопряжения позволяет найти семейство нормальных мод тестового волновода. Эти моды не являются ни ТЕ модами, ни ТМ, поэтому их часто называют гибридными. Рассмотренный пример доказывает, что гибридные моды существуют. Это обстоятельство делает его весьма важным тестом для всевозможных расчетов дисперсионных кривых волноводов,

поскольку именно гибридизация мод вносит несамосопряженность в известные подходы к расчету мод [31].

### 3.4 Связь между бегущими и стоячими модами

Обе названные спектральные задачи связаны друг с другом. Пусть имеется нормальная мода волновода

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z}, \quad (3.15)$$

при каких-то положительных значениях  $\omega$  и  $\gamma$ . Эта мода бежит вдоль оси волновода. Поместив в волновод две преграды при  $z = 0$  и при  $z = L$ , мы получим резонатор. Названная мода, достигнув  $z = L$ , отразится от нее. Суперпозиция этих мод даст стоячую волну, которая будет собственной модой резонатора. Опишем связь между бегущей и падающей волной математически.

Уравнения Максвелла имеют симметрию

$$z \rightarrow -z, \quad E_{x,y} \rightarrow E_{x,y}, \quad E_z \rightarrow -E_z, \quad H_{x,y} \rightarrow -H_{x,y}, \quad H_z \rightarrow H_z.$$

Поэтому вместе с рассматриваемой бегущей волной (3.15) имеется и волна

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ -E_z \end{pmatrix} e^{i\omega t + i\gamma z}, \quad \vec{H} = \begin{pmatrix} -H_x \\ -H_y \\ H_z \end{pmatrix} e^{i\omega t + i\gamma z},$$

бегущая в противоположном направлении. Вычитая из (3.15) эту моду, получим поле

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= 2iE_{x,y}(x,y) \sin(\gamma z)e^{i\omega t}, & E_z &= 2E_z(x,y) \cos(\gamma z)e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= 2H_{x,y}(x,y) \cos(\gamma z)e^{i\omega t}, & H_z &= 2iH_z(x,y) \sin(\gamma z)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Это поле удовлетворяет уравнениям Максвелла и краевым условиям на боковой поверхности волновода. На нижнем основании резонатора  $z = 0$  выполнены те же краевые условия

$$E_{x,y} = 0, \quad H_z = 0,$$

они выполнены и на верхнем основании, если  $\gamma L/\pi \in \mathbb{Z}$ . Поэтому разность мод, бегущих по и против оси волновода, является собственной модой резонатора, зажатого плоскостями  $z = 0$  и  $z = \pi n/\gamma$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

Доказанное можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 2.** Если волновод  $S \times \mathbb{R}$  имеет нормальную моду

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z}$$

при некоторых значениях  $\omega, \gamma$ , то резонатор  $S \times [0, \pi n/\gamma]$  имеет собственную моду при тех же  $\omega, \gamma$ .

Обращение этого утверждения требует больших усилий. Допустим, что цилиндр, зажатый между плоскостями  $z = 0$  и  $z = L$ , имеет собственную моду

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z)e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x,y,z)e^{i\omega t}$$

причем пусть  $\vec{E}, \vec{H}$  имеют непрерывные частные производные не только внутри цилиндра, но и на его основаниях. На основаниях выполняются краевые условия

$$E_{x,y} = H_z = 0,$$

из которых, в силу уравнений Максвелла и непрерывности производных, следует, что

$$\frac{\partial H_{x,y}}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Поэтому  $E_{x,y}, H_z$  можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье по  $\sin \frac{\pi n z}{L}$ , а  $H_{x,y}, E_z$  — в равномерно сходящийся ряд Фурье по  $\cos \frac{\pi n z}{L}$ . Напр.,

$$E_x = \sum E_x^{(n)} \sin \frac{\pi n z}{L}.$$

Проекционным методом нетрудно доказать, что всякое нетривиальное парциальное поле

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}^{(n)}(x,y) \sin \frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & E_z &= E_z^{(n)}(x,y) \cos \frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}^{(n)}(x,y) \cos \frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & H_z &= H_z^{(n)}(x,y) \sin \frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

тоже является модой резонатора. Продолжая аналитически это поле на весь бесконечный цилиндр, мы получим решение уравнений Максвелла в цилиндре,

удовлетворяющее краевым условиям идеальной проводимости на боковой поверхности цилиндра. Сдвиг по  $z$  на любую постоянную величину не изменит этого обстоятельства, в частности мы можем написать вот такое решение

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}^{(n)}(x,y) \sin\left(\frac{\pi n z}{L} + \frac{3\pi}{2}\right) e^{i\omega t}, & E_z &= E_z^{(n)}(x,y) \cos\left(\frac{\pi n z}{L} + \frac{3\pi}{2}\right) e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}^{(n)}(x,y) \cos\left(\frac{\pi n z}{L} + \frac{3\pi}{2}\right) e^{i\omega t}, & H_z &= H_z^{(n)}(x,y) \sin\left(\frac{\pi n z}{L} + \frac{3\pi}{2}\right) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= -E_{x,y}^{(n)}(x,y) \cos\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & E_z &= E_z^{(n)}(x,y) \sin\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}^{(n)}(x,y) \sin\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & H_z &= H_z^{(n)}(x,y) \cos\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Умножим его на  $i$  и вычтем это решение из исходного (3.16), тогда получим

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= -iE_{x,y}^{(n)}(x,y)e^{\frac{\pi n iz}{L} + i\omega t}, & E_z &= E_z^{(n)}(x,y)e^{\frac{\pi n iz}{L} + i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}^{(n)}(x,y)e^{\frac{\pi n iz}{L} + i\omega t}, & H_z &= -iH_z^{(n)}(x,y)e^{\frac{\pi n iz}{L} + i\omega t}, \end{aligned}$$

то есть собственную моду, бегущую вдоль оси волновода.

**Теорема 3.** Если резонатор  $S \times [0, L]$  имеет собственную моду

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z)e^{i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x,y,z)e^{i\omega t}$$

компоненты которой имеют непрерывные производные при  $z = 0, L$ , то он имеет и собственную моду

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}(x,y) \sin\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & E_z &= E_z(x,y) \cos\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}(x,y) \cos\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, & H_z &= H_z(x,y) \sin\frac{\pi n z}{L} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

при некотором натуральном значении  $n$ , а волновод  $S \times \mathbb{R}$  имеет нормальную моду при той же частоте  $\omega$  и  $\gamma = \pi n/L$ .

### 3.5 Вычисление собственных мод цилиндрических резонаторов

#### 3.5.1 Цилиндрические полые резонаторы

Пусть область  $G$  представляет собой цилиндр  $S \times [0, L]$ , ось которого совпадает с осью  $Oz$ . Будем считать, что этот цилиндр заполнен однородным веществом. Прежде всего из его моды выделим два семейства: ТЕ и ТМ моды.

**Теорема 4.** Пусть  $k, v$  — собственное значение и собственная функция скалярной задачи

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 \varepsilon \mu v = 0, & (x, y, z) \in S \times (0, L) \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & (x, y, z) \in \partial S \times (0, L) \\ v = 0, & (x, y) \in S, z = 0, L. \end{cases} \quad (3.17)$$

Тогда при этом же волновом числе  $k$  цилиндрический резонатор  $S \times (0, L)$  имеет ТЕ моду, компоненты которой выражаются через собственную функцию  $v$  следующим образом

$$E_x = \partial_y v, \quad E_y = -\partial_x v, \quad E_z = 0$$

и

$$H_x = \frac{i}{k\mu} \partial_x \partial_z v, \quad H_y = \frac{i}{k\mu} \partial_y \partial_z v, \quad H_z = -\frac{i}{k\mu} (\partial_x^2 + \partial_y^2) v.$$

*Доказательство.* Если  $E_z = 0$ , то из  $\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0$  следует

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y = 0.$$

Поэтому существует такая скалярная функция  $v$ , что

$$E_x = \partial_y v, \quad E_y = -\partial_x v.$$

Тогда равенство

$$-ik\mu \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{E}$$

дает выражение поля  $\vec{H}$  через этот потенциал

$$H_x = -\frac{i}{k\mu} \partial_z E_y = \frac{i}{k\mu} \partial_x \partial_z v, \quad H_y = \frac{i}{k\mu} \partial_z E_x = \frac{i}{k\mu} \partial_y \partial_z v$$

и

$$H_z = -\frac{i}{k\mu} (\partial_x^2 + \partial_y^2) v.$$

Проекция на ось  $Ox$  уравнения

$$ik\varepsilon\vec{E} = \text{rot } \vec{H}$$

дает

$$ik\varepsilon\partial_y v = -\frac{i}{k\mu}\partial_y (\partial_x^2 + \partial_y^2) v - \frac{i}{k\mu}\partial_y\partial_z^2 v$$

или

$$\partial_y (\Delta v + k^2\varepsilon\mu v) = 0.$$

Если  $v$  — решение (3.17), то это уравнение удовлетворится. Аналогично, проекция на ось  $Oy$  уравнения

$$ik\varepsilon\vec{E} = \text{rot } \vec{H}$$

дает

$$\partial_x (\Delta v + k^2\varepsilon\mu v) = 0$$

и удовлетворяется тождественно. Проекция этого уравнения на ось  $Oz$  дает

$$0 = \partial_x H_y - \partial_y H_x,$$

что удовлетворяется тождественно. Наконец, уравнение  $\text{div } \mu\vec{H} = 0$  дает

$$\frac{i}{k\mu}\partial_x^2\partial_z v + \frac{i}{k\mu}\partial_y^2\partial_z v - \frac{i}{k\mu}\partial_z (\partial_x^2 + \partial_y^2) v = 0,$$

что тоже удовлетворяется тождественно. Краевые условия на боковой поверхности цилиндра дают

$$E_x n_y - E_y n_x = \nabla v \cdot \vec{n} = 0$$

и

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = \frac{i}{k\mu}\partial_z \nabla v \cdot \vec{n} = 0$$

и удовлетворяются на решении (3.17) тождественно. Краевые условия на торцах цилиндра дают

$$E_x = E_y = H_z = 0,$$

что будет удовлетворено, если

$$v = 0$$

и поэтому равны нулю и все частные производные  $v$  по  $x, y$ . □

Всякую собственную функцию задачи (3.17), отвечающую собственному значению  $k$ , можно представить как линейную комбинацию функций вида

$$\psi_n(x,y) \sin \frac{\pi m z}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\psi_n$  — собственные функции сечения

$$\Delta_2 \psi + \beta^2 \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial S} = 0.$$

Прим этом нам подходят только те  $n, m$ , для которых верно

$$\beta_n^2 + \left( \frac{\pi m}{L} \right)^2 = \varepsilon \mu k^2.$$

При этом следует исключить из рассмотрения нулевое собственное значение  $\beta$ , поскольку ему отвечает нулевое поле.

**Теорема 5.** Пусть  $k, u$  — собственное значение и собственная функция скалярной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 \varepsilon \mu u = 0, & (x, y, z) \in S \times (0, L) \\ u = 0, & (x, y, z) \in \partial S \times (0, L) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & (x, y) \in S, z = 0, L. \end{cases} \quad (3.18)$$

Тогда при этом же волновом числе  $k$  цилиндрический резонатор  $S \times (0, L)$  имеет ТМ моду, компоненты которой выражаются через собственную функцию  $u$  следующим образом

$$H_x = \partial_y u, \quad H_y = -\partial_x u, \quad H_z = 0$$

и

$$E_x = -\frac{i}{k\mu} \partial_x \partial_z u, \quad E_y = -\frac{i}{k\mu} \partial_y \partial_z u, \quad E_z = \frac{i}{k\mu} (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u).$$

Всякую собственную функцию задачи (3.18), отвечающую собственному значению  $k$ , можно представить как суперпозицию функций вида

$$\varphi_n(x,y) \sin \frac{\pi m z}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $\varphi_n$  — собственные функции сечения

$$\Delta_2 \varphi + \alpha^2 \varphi = 0, \quad \varphi|_{\partial S} = 0.$$

Прим этом нам подходят только те  $n, m$ , для которых верно

$$\alpha_n^2 + \left( \frac{\pi m}{L} \right)^2 = \varepsilon \mu k^2.$$

**Теорема 6.** Всякая мода цилиндрического полого резонатора является суперпозицией ТЕ и ТМ мод.

*Доказательство.* Пусть  $\vec{E}, \vec{H}$  — мода резонатора, отвечающая волновому числу  $k$ . Поскольку волновод полый, из уравнений Максвелла следует

$$\text{rot rot } \vec{E} = k^2 \epsilon \mu \vec{E}.$$

Поскольку  $\text{div } \vec{E} = 0$ , отсюда следует, что

$$\Delta E_z + k^2 \epsilon \mu E_z = 0.$$

На боковой поверхности цилиндра  $E_z = 0$ , а на торцах

$$\partial_z E_z = -\partial_x E_x - \partial_y E_y = 0.$$

Поэтому  $E_z$  удовлетворяет задаче (3.18). Всякое ее решение можно представить как суперпозицию функций вида

$$u_{nm} = \varphi_n(x, y) \cos \frac{\pi m z}{L}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\alpha_n^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 = \epsilon \mu k^2.$$

Поскольку

$$\frac{i}{k\mu} (\partial_x^2 u_{nm} + \partial_y^2 u_{nm}) = \frac{i\alpha_n^2}{k\mu} u_{nm},$$

мы можем представить  $E_z$  в виде

$$E_z = \sum_{n,m} c_{n,m} \frac{i\alpha_n^2}{k\mu} u_{nm} = \frac{i}{k\mu} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \sum_{n,m} c_{n,m} u_{nm}.$$

Полагая

$$u = \sum_{n,m} c_{n,m} u_{nm},$$

построим ТМ моду резонатора, скажем,  $\vec{E}', \vec{H}'$ , которой  $E'_z = E_z$ . Но тогда

$$\vec{E}'' = \vec{E} - \vec{E}', \quad \vec{H}'' = \vec{H} - \vec{H}'$$

— ТЕ мода резонатора, и поэтому рассматриваемая мода есть сумма ТМ моды  $\vec{E}', \vec{H}'$  и ТЕ моды  $\vec{E}'', \vec{H}''$ .  $\square$

**Теорема 7.** Кратность волнового числа цилиндрического полого резонатора является суммой кратностей ТЕ и ТМ мод, отвечающих этому волновому числу.

Эта теорема позволяет рассматривать ТЕ и ТМ моды резонатора как полную систему в пространстве  $\mathfrak{H}(G)$ .

**Пример 1.** Пусть область  $G$  представляет собой прямоугольный параллелепипед (кирпич, box), возьмем одну из его вершин за начало координат и направим оси по его ребрам. При этом пусть в направлении оси  $Ox$  он имеет длину  $L_x$  и т.д. Будем считать, что этот резонатор заполнен однородным веществом. Его моды делятся на ТЕ и ТМ моды. Собственные функции задачи (3.18) исчерпываются функциями

$$u_{nml} = \sin \frac{\pi n x}{L_x} \sin \frac{\pi m y}{L_y} \cos \frac{\pi l z}{L_z}, \quad n, m, l \in \mathbb{N}$$

которым отвечает волновое число  $k_{nml}$ , которое можно определить из уравнения

$$\varepsilon \mu k_{nml}^2 = \left( \frac{\pi n}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi m}{L_y} \right)^2 + \left( \frac{\pi l}{L_z} \right)^2.$$

При этом одному волновому числу может отвечать несколько таких функций. Аналогично, собственные функции задачи (3.17) исчерпываются функциями

$$v_{nml} = \cos \frac{\pi n x}{L_x} \cos \frac{\pi m y}{L_y} \sin \frac{\pi l z}{L_z}, \quad n, m, l \in \mathbb{Z}, \quad n, m \geq 0, \quad l > 0.$$

Поля  $\vec{H}$ , восстановленные из этих потенциалов по формулам из теорем 4, 5, образуют базис пространства  $\mathfrak{H}(G)$ .

### 3.5.2 Вычисление мод цилиндрического резонатора, заполненного неоднородным веществом

При численном решении задачи (3.4) самым трудным моментом является построение базиса пространства  $\mathfrak{H}(G)$ . Эта трудность легко снимается, если  $\mu$  — постоянно, а переменной величиной является только  $\varepsilon$ . Дело в том, что пространство  $\mathfrak{H}(G)$  не зависит от  $\varepsilon$  и поэтому в качестве базиса можно взять собственные моды резонатора  $G$ , вычисленные до его заполнения диэлектриком, скажем, при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Если  $G$  — цилиндр постоянного сечения  $S$ , то собственное число  $k = k_{n,m}$  и собственная функция  $u = u_{nm}$  задачи (3.18), заданные выражениями

$$\varepsilon_0 \mu k_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2, \quad u_{n,m} = \varphi_n(x,y) \cos \frac{\pi m z}{L}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

порождают семейство ТМ мод

$$H_x = \partial_y u_{n,m}, \quad H_y = -\partial_x u_{n,m}, \quad H_z = 0,$$

а собственное число  $k = k_{n,m}$  и собственная функция  $v = v_{nm}$  задачи (3.17), заданные выражениями

$$v_{n,m} = \psi_n(x,y) \sin \frac{\pi m z}{L}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

в силу теоремы 4 порождают семейство ТЕ мод

$$H_x = \frac{i}{k_{nm} \mu} \partial_x \partial_z v_{nm}, \quad H_y = \frac{i}{k_{nm} \mu} \partial_y \partial_z v_{nm}, \quad H_z = \frac{i \beta_n^2}{k_{nm} \mu} v_{nm}.$$

Как уже отмечалось выше, это семейство будет базисом пространства  $\mathfrak{H}(G)$ . Поскольку изменение мультипликативной константы не влечет изменение этого свойства, мы будем называть стандартным базисом пространства  $\mathfrak{H}(G)$  объединение двух множеств: 1.) полей ТМ типа

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_n(x,y) \\ -\partial_x \varphi_n(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \cos \frac{\pi m z}{L}, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

и 2.) полей ТЕ типа

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\pi m}{L} \partial_x \psi_n(x,y) \cos \frac{\pi m z}{L} \\ \frac{\pi m}{L} \partial_y \psi_n(x,y) \cos \frac{\pi m z}{L} \\ \beta_n^2 \psi_n(x,y) \sin \frac{\pi m z}{L} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0.$$

**Теорема 8.** Если семейства  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  ортонормированный базис относительно скалярного произведения в  $L^2(S)$ , то так построенные поля  $\vec{H}$  являются ортогональными относительно скалярного произведения

$$(\vec{H}, \vec{H}') = \mu \iiint_G \vec{H} \cdot \vec{H}' dx dy dz.$$

При этом норма ТМ моды равна

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}},$$

а норма ТЕ моды равна

$$\frac{\beta_n}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 + \beta_n^2}.$$

*Доказательство.* (i) Пусть

$$H_x = \partial_y u_{n,m}, \quad H_y = -\partial_x u_{n,m}, \quad H_z = 0,$$

и

$$H'_x = \partial_y u_{n',m'}, \quad H'_y = -\partial_x u_{n',m'}, \quad H'_z = 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} (\vec{H}, \vec{H}') &= \iiint_G (\partial_x u_{n,m} \partial_x u_{n',m'} + \partial_y u_{n,m} \partial_y u_{n',m'}) dx dy dz = \\ &= \alpha_n^2 \iiint_G u_{n,m} u_{n',m'} dx dy dz. \end{aligned}$$

Поскольку  $u_{nm}$  система ортогональная, этот интеграл отличен от нуля только при  $\vec{H}' = \vec{H}$ . При этом

$$\|\vec{H}\|^2 = \alpha_n^2 \iiint_G \varphi_n^2 \cos^2 \frac{\pi m z}{L} dx dy dz = \frac{\alpha_n^2}{2}.$$

(ii) Пусть

$$H_x = \partial_x \partial_z v_{nm}, \quad H_y = \partial_y \partial_z v_{nm}, \quad H_z = \beta_n^2 v_{nm}$$

и

$$H'_x = \partial_x \partial_z v_{n'm'}, \quad H'_y = \partial_y \partial_z v_{n'm'}, \quad H'_z = \beta_{n'}^2 v_{n'm'}.$$

Тогда

$$(\vec{H}, \vec{H}')$$

является суммой двух выражений:

$$\frac{\pi^2 m m'}{L^2} \iiint_G (\partial_x \psi_n \partial_x \psi_{n'} + \partial_y \psi_n \partial_y \psi_{n'}) \cos \frac{\pi m z}{L} \cos \frac{\pi m' z}{L} dx dy dz,$$

равного

$$\frac{\pi^2 m m' \beta_n^2}{L^2} \iiint_G \psi_n \psi_{n'} \cos \frac{\pi m z}{L} \cos \frac{\pi m' z}{L} dx dy dz,$$

и

$$\beta_n^2 \beta_{n'}^2 \iiint_G \psi_n \psi_{n'} \sin \frac{\pi m z}{L} \sin \frac{\pi m' z}{L} dx dy dz.$$

Оба эти выражения отличны от нуля только при  $\vec{H}' = \vec{H}$ . При этом

$$\|\vec{H}\|^2 = \frac{\pi^2 m^2 \beta_n^2}{2L^2} + \frac{\beta_n^4}{2} = \frac{\beta_n^2}{2} \left( \left( \frac{\pi m}{L} \right)^2 + \beta_n^2 \right).$$

(iii) Пусть

$$H_x = \partial_y u_{n,m}, \quad H_y = -\partial_x u_{n,m}, \quad H_z = 0,$$

и

$$H'_x = \partial_x \partial_z v_{n'm'}, \quad H'_y = \partial_y \partial_z v_{n'm'}, \quad H'_z = \beta_{n'}^2 v_{n'm'}.$$

Тогда

$$(\vec{H}, \vec{H}') = \frac{\pi m'}{L} \iiint_G (\partial_y \varphi_n \partial_x \psi_{n'} - \partial_x \varphi_n \partial_y \psi_{n'}) \sin \frac{\pi m z}{L} \cos \frac{\pi m' z}{L} dx dy dz = 0.$$

□

В стандартном базисе мы можем записать задачу (3.4) как задачу на собственные значения матричного пучка

$$\hat{A}\vec{H} - k^2 \hat{B}\vec{H},$$

используя метод Галеркина или, эквивалентный ему в данном случае, метод Ритца. При этом матрица  $\hat{B}$  задается билинейной формой

$$b(\vec{H}, \vec{H}') = \mu \iiint_G \vec{H} \cdot \vec{H}' dx dy dz$$

и поэтому будет диагональной.

### 3.6 Построение дисперсионной кривой волновода

Рассмотрим точки пересечения дисперсионной кривой волновода  $S \times \mathbb{R}$  с прямой  $\gamma = \text{const}$ . Каждой такой точке отвечает нормальная мода волновода, а, в силу теоремы 2, и собственная мода резонатора  $S \times [0, \pi/\gamma]$ . Собственные частоты этого резонатора образуют бесконечно большую монотонную последовательность  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . В силу теоремы 3 этим точкам отвечают моды, из которых можно сконструировать нормальные моды волновода. Отсюда сразу имеем теорему.

**Теорема 9.** Точки пересечения дисперсионной кривой волновода  $S \times \mathbb{R}$  с прямой  $\gamma = \text{const}$  образуют счетное множество точек, множество абсцисс которых совпадает со множеством собственных частот резонатора  $S \times [0, \pi/\gamma]$ .

Чтобы построить дисперсионную кривую в 1-ой четверти плоскости  $k\gamma$  приближенно, мы можем поделить рассматриваемый отрезок оси ординат на отрезки с некоторым шагом  $\Delta\gamma$  и для каждого  $\gamma = n\Delta\gamma$  вычислить первые  $m$  собственных частот резонатора  $S \times [0, \pi/\gamma]$ , которым отвечают моды вида

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}(x,y) \sin \gamma z e^{i\omega t}, & E_z &= E_z(x,y) \cos \gamma z e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}(x,y) \cos \gamma z e^{i\omega t}, & H_z &= H_z(x,y) \sin \gamma z e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Помимо этих мод резонатор имеет еще и моды

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}(x,y) \sin l\gamma z e^{i\omega t}, & E_z &= E_z(x,y) \cos l\gamma z e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}(x,y) \cos l\gamma z e^{i\omega t}, & H_z &= H_z(x,y) \sin l\gamma z e^{i\omega t} \end{aligned}$$

при  $l > 1$ , которые нам не интересны. Поскольку моды резонатора ортогональны в  $\mathfrak{H}$ , мы можем ограничить рассмотрение подпространством всех элементов вида (3.19).

Это означает, что мы можем ограничить стандартный базис до объединения следующих двух множеств: 1.) полей ТМ типа

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_n(x,y) \\ -\partial_x \varphi_n(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} \cos \gamma z, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

и 2.) полей ТЕ типа

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \gamma \partial_x \psi_n(x,y) \cos \gamma z \\ \gamma \partial_y \psi_n(x,y) \cos \gamma z \\ \beta_n^2 \psi_n(x,y) \sin \gamma z \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0,$$

где  $\gamma = \pi/L$ . Мы будем брать ортонормированные системы  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  относительно  $L^2(S)$ .

Усекая бесконечную систему до первых  $N$  базисных функций, мы сведем задачу об отыскании волновых чисел (3.4) к алгебраической задаче на собственные значения. Условимся сначала писать первые  $N$  ТМ волн, а потом первые  $N$  ТЕ волн, тогда матрицы этой системы будут иметь блочный вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 8 матрица  $\hat{B}$  диагональная, причем

$$B_{11} = \text{diag} \left( \frac{\alpha_n^2 \mu}{2} \right), \quad B_{22} = \text{diag} \left( \frac{\beta_n^2 \mu}{2} (\gamma^2 + \beta_n^2) \right).$$

Выпишем удобные формулы для блоков матрицы  $\hat{A}$ .

**Теорема 10.** Блоки матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{pmatrix}$$

можно вычислить следующим образом:

$$a_{n,m} = \frac{1}{2} \iint_S (\gamma^2 \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m + \alpha_n^2 \alpha_m^2 \varphi_n \varphi_m) \frac{dxdy}{\varepsilon}, \quad n, m = 1, \dots, N,$$

$$a_{n,m} = a_{m,n} = \frac{1}{2} \gamma (\beta_m^2 + \gamma^2) \iint_S \frac{\partial \psi_m \varphi_n}{\partial xy} \frac{dxdy}{\varepsilon}, \quad n = 1, \dots, N, \quad m = N+1, \dots, 2N,$$

$$a_{n,m} = \frac{1}{2} (\beta_m^2 + \gamma^2) (\beta_n^2 + \gamma^2) \iint_S \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m \frac{dxdy}{\varepsilon}, \quad n, m = N+1, \dots, 2N.$$

*Доказательство.* (i) Для вычисления элемента  $nm$  блока  $A_{11}$  применим метод Ритца с базисом

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_n(x, y) \\ -\partial_x \varphi_n(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \cos \gamma z$$

на

$$\vec{H}' = \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_m(x, y) \\ -\partial_x \varphi_m(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \cos \gamma z.$$

В этом случае

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{pmatrix} -\gamma \partial_x \varphi_n(x, y) \sin \gamma z \\ -\gamma \partial_y \varphi_n(x, y) \sin \gamma z \\ -\Delta_2 \varphi_n(x, y) \cos \gamma z \end{pmatrix}$$

и

$$\text{rot } \vec{H}' = \begin{pmatrix} -\gamma \partial_x \varphi_m(x, y) \sin \gamma z \\ -\gamma \partial_y \varphi_m(x, y) \sin \gamma z \\ -\Delta_2 \varphi_m(x, y) \cos \gamma z \end{pmatrix}.$$

Поэтому матричный элемент

$$\iiint_G \operatorname{rot} \vec{H}' \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \frac{dxdydz}{\varepsilon}$$

равен сумме двух интегралов:

$$\gamma^2 \iiint_G (\nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m \sin^2 \gamma z) \frac{dxdydz}{\varepsilon}$$

и

$$\alpha_n^2 \alpha_m^2 \iiint_G (\varphi_n \varphi_m \cos^2 \gamma z) \frac{dxdydz}{\varepsilon}.$$

Интеграл

$$\int_{z=0}^L \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = \int_{z=0}^L \cos^2 \frac{\pi z}{L} dz = \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\iiint_G \operatorname{rot} \vec{H}' \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \frac{dxdydz}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \iint_S (\gamma^2 \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m + \alpha_n^2 \alpha_m^2 \varphi_n \varphi_m) \frac{dxdy}{\varepsilon}.$$

(ii) Для вычисления элемента  $nm$  блока  $A_{12}$  нужно умножить

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \partial_y \varphi_n(x, y) \\ -\partial_x \varphi_n(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \cos \gamma z$$

на

$$\vec{H}' = \begin{pmatrix} \gamma \partial_x \psi_m(x, y) \cos \gamma z \\ \gamma \partial_y \psi_m(x, y) \cos \gamma z \\ \beta_m^2 \psi_m(x, y) \sin \gamma z \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{pmatrix} -\gamma \partial_x \varphi_n(x, y) \sin \gamma z \\ -\gamma \partial_y \varphi_n(x, y) \sin \gamma z \\ -\Delta_2 \varphi_n(x, y) \cos \gamma z \end{pmatrix}$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{H}' = \begin{pmatrix} \beta_m^2 \partial_y \psi_m \sin \gamma z + \gamma^2 \partial_y \psi_m \sin \gamma z \\ -\beta_m^2 \partial_x \psi_m \sin \gamma z - \gamma^2 \partial_x \psi_m \sin \gamma z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta_m^2 + \gamma^2) \partial_y \psi_m \\ -(\beta_m^2 + \gamma^2) \partial_x \psi_m \\ 0 \end{pmatrix} \sin \gamma z$$

и матричный элемент

$$\iiint_G \operatorname{rot} \vec{H}' \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \frac{dxdydz}{\varepsilon}$$

равен

$$\frac{1}{2} \gamma (\beta_m^2 + \gamma^2) \iint_S (\partial_x \psi_m \partial_y \varphi_n - \partial_y \psi_m \partial_x \varphi_n) \frac{dxdy}{\varepsilon}$$

или

$$\frac{1}{2} \gamma (\beta_m^2 + \gamma^2) \iint_S \frac{\partial \psi_m \varphi_n}{\partial xy} \frac{dxdy}{\varepsilon}.$$

(iii) Поскольку матрица  $\hat{A}$  — симметрическая,  $A_{21} = A_{12}^T$ .

(iv) Остается вычислить элементы  $A_{22}$ , для чего нужно умножить

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \gamma \partial_x \psi_n(x, y) \cos \gamma z \\ \gamma \partial_y \psi_n(x, y) \cos \gamma z \\ \beta_m^2 \psi_n(x, y) \sin \gamma z \end{pmatrix}$$

на

$$\vec{H}' = \begin{pmatrix} \gamma \partial_x \psi_m(x, y) \cos \gamma z \\ \gamma \partial_y \psi_m(x, y) \cos \gamma z \\ \beta_m^2 \psi_m(x, y) \sin \gamma z \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{pmatrix} (\beta_n^2 + \gamma^2) \partial_y \psi_n \\ -(\beta_n^2 + \gamma^2) \partial_x \psi_n \\ 0 \end{pmatrix} \sin \gamma z$$

и

$$\operatorname{rot} \vec{H}' = \begin{pmatrix} (\beta_m^2 + \gamma^2) \partial_y \psi_m \\ -(\beta_m^2 + \gamma^2) \partial_x \psi_m \\ 0 \end{pmatrix} \sin \gamma z$$

и матричный элемент

$$\iiint_G \operatorname{rot} \vec{H}' \cdot \operatorname{rot} \vec{H} \frac{dxdydz}{\varepsilon}$$

равен

$$(\beta_m^2 + \gamma^2)(\beta_n^2 + \gamma^2) \iiint_G (\partial_x \psi_m \partial_x \psi_n + \partial_y \psi_m \partial_y \psi_n) \frac{dxdydz}{\varepsilon}$$

или

$$\frac{1}{2} (\beta_m^2 + \gamma^2)(\beta_n^2 + \gamma^2) \iint_S \nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m \frac{dxdy}{\varepsilon}.$$

□

Переходя от стандартного базиса к ортонормированному, получим задачу на собственные значения

$$\hat{D}\vec{H} = k^2\vec{H}$$

для матрицы  $\hat{D}$ , элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{n,m} = \frac{\gamma^2}{\alpha_n\alpha_m} \iint_S (\nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_m) \frac{dxdy}{\varepsilon\mu} + \alpha_n\alpha_m \iint_S \varphi_n\varphi_m \frac{dxdy}{\varepsilon\mu}, \quad n,m = 1, \dots, N_1,$$

$$d_{n,m} = d_{m,n} = \frac{\gamma}{\alpha_n\beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \iint_S \frac{\partial\psi_m\varphi_n}{\partial xy} \frac{dxdy}{\varepsilon\mu}, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad m = N_1+1, \dots, N_1+N_2,$$

$$d_{n,m} = \frac{1}{\beta_n\beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \sqrt{\beta_n^2 + \gamma^2} \iint_S \nabla\psi_n \cdot \nabla\psi_m \frac{dxdy}{\varepsilon\mu}, \quad n,m = N_1+1, \dots, N_1+N_2.$$

Если  $\varepsilon$  принимает только два значения,  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$ , то вычисление интегралов можно свести к интегрированию по той области  $S_1$ , в которой  $\varepsilon = \varepsilon_1$ . В этом случае

$$\hat{D} = \hat{D}_0 + \hat{D}_1,$$

где  $\hat{D}_0$  — диагональная матрица, соответствующая случаю волновода с заполнением  $\varepsilon = \varepsilon_0$ :

$$\hat{D}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu} \text{diag} (\gamma^2 + \alpha_1^2, \dots, \gamma^2 + \beta_1^2).$$

Элементы добавки  $\hat{D}_1$  пропорциональны

$$q = \frac{1}{\varepsilon_1\mu} - \frac{1}{\varepsilon_0\mu}$$

и вычисляются так:

$$d'_{n,m} = \frac{\gamma^2}{\alpha_n\alpha_m} \iint_{S_1} (\nabla\varphi_n \cdot \nabla\varphi_m) qdxdy + \alpha_n\alpha_m \iint_{S_1} \varphi_n\varphi_m qdxdy, \quad n,m = 1, \dots, N_1,$$

$$d'_{n,m} = \frac{\gamma}{\alpha_n\beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \iint_{S_1} \frac{\partial\psi_m\varphi_n}{\partial xy} qdxdy, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad m = N_1+1, \dots, N_1+N_2,$$

$$d'_{n,m} = \frac{1}{\beta_n\beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \sqrt{\beta_n^2 + \gamma^2} \iint_{S_1} \nabla\psi_n \cdot \nabla\psi_m qdxdy, \quad n,m = N_1+1, \dots, N_1+N_2.$$

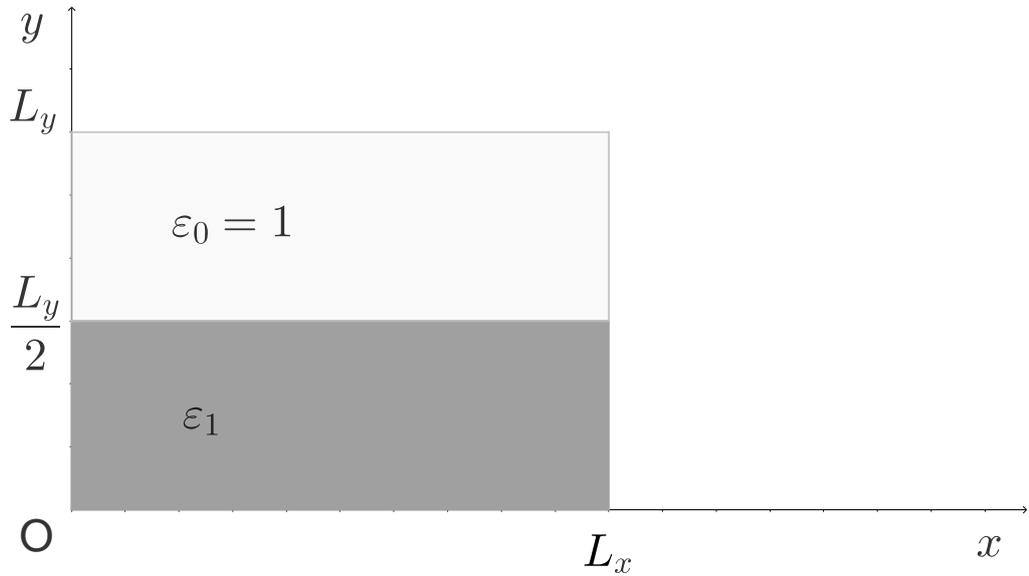


Рисунок 3.3 — Сечение волновода

Разумеется, при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  параметр  $q = 0$  и задача на собственные значения сводится к вычислению собственных значений диагональной матрицы  $\hat{D}_0$ , то есть к

$$\gamma^2 + \alpha_1^2 = \varepsilon \mu k^2, \dots, \gamma^2 + \beta_1^2 = \varepsilon \mu k^2, \dots,$$

как это и должно быть. При малых  $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$  происходит регулярное возмущение этих собственных значений.

### 3.7 Вычисление точек дисперсионной кривой волновода в системе Sage

Как это обычно и случается при применении метода Галеркина, матричные элементы являются интегралами, которые в общем случае вычисляются приближенно. Чтобы избавиться в первых тестах от этой проблемы мы рассмотрели частный случай, когда все интегралы вычисляются в элементарных функциях.

Рассмотрим волновод прямоугольного сечения  $S = L_x \times L_y$  с постоянным заполнением  $\varepsilon_0 = 1$  и  $\mu = 1$  (см. рис. 3.3). Внутри него поместим прямоугольную вставку  $S_1$  с постоянным заполнением  $\varepsilon_1$  и  $\mu = 1$ . В этом случае  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  являются произведениями синусов и косинусов, а матричные элементы — интегралами от таких произведений по прямоугольным областям.

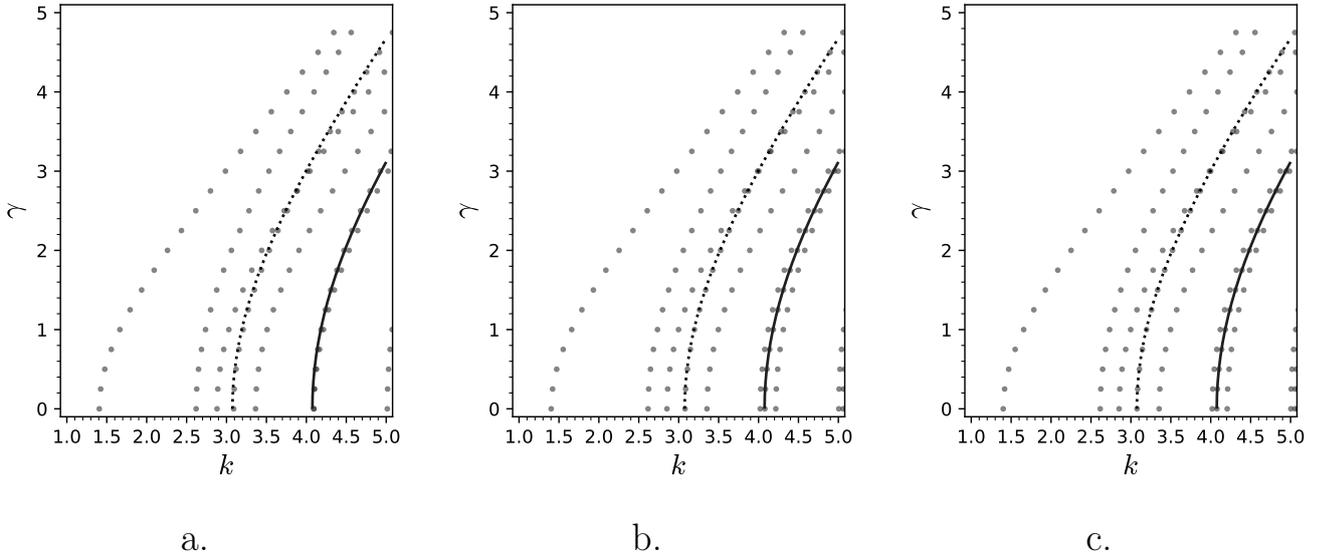


Рисунок 3.4 — Дисперсионная кривая волновода со вставкой при  $L_x = 1$ ,  $L_y = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1.1$ . Точками указаны точки дисперсионной кривой, найденные численно (взято а.  $N = 3$ , б.  $N = 6$ , с.  $N = 10$  мод по каждому из направлений), сплошными линиями — дуги дисперсионной кривой, соответствующие SLE модам.

В системе компьютерной алгебры Sage мы составили программу (<https://github.com/malykhmd>), которая вычисляет эти интегралы в символьном виде, составляет матрицу  $\hat{D}$  для любого заданного числового значения  $\gamma$  и вычисляет ее собственные значения при помощи стандартной функции библиотеки `linalg`.

Чтобы протестировать эту программу, мы рассмотрели волновод, в котором вставка занимает нижнюю половину (см. рис. 3.3). В этом случае можно выписать аналитически два семейства нормальных мод: SLE и SLH моды [27]. Этот пример интересен тем, что эти моды являются гибридными и не могут быть найдены методами, в которых этим эффектом пренебрегают.

На рис. 3.4 — 3.6 представлены результаты аналитических и численных расчетов, выполненных в нашей программе. Хорошо видно, что для младших мод точки, найденные в нашей программе, ложатся на аналитическую кривую с графической точностью даже при весьма небольшом числе учитываемых базисных элементов (по три на каждое направление). Этому не препятствует близость соседней дуги, обусловленная близостью значений  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$ . Точность расчетов падает с ростом  $\epsilon_1$ , но при 10 модах вычисленные точки ложатся и для случая  $\epsilon_1 = 2$  (см. рис. 3.6, пункт с.).



### 3.8 Заключение

Следует заметить, что традиционно рассматривали спектральную задачу теории волноводов как задачу на собственные значения относительно параметра  $\gamma$ , а волновое число считали заданным. Такой подход вполне оправдан, поскольку в задаче о волноводной дифракции рассматривается падение монохроматической волны, которая частично проходит и частично отражается от неоднородности и при этом возникают прошедшие и отраженные волны, бегущие от неоднородности, но имеющие ту же частоту, что и падающая волна. С другой стороны для построения дисперсионной кривой совершенно не обязательно искать ее точки сначала при одном значении частоты, потом при другом, потом при третьем. Допустимо, искать ее точки при фиксированных значениях  $\gamma$ . Принципиальным здесь является только удобство решения задачи.

Наш подход к построению дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением отличается от предложенных ранее тем, что сводит эту задачу к вычислению собственных значений самосопряженной матрицы, то есть задаче хорошо изученной. Использование самосопряженной матрицы исключает возникновение артефактов, связанных с появлением малой мнимой добавки у собственных значений. Мы реализовали этот подход для волновода прямоугольного сечения с прямоугольными вставками в системе компьютерной алгебры Sage и протестировали на SLE модах. При этом было показано, что наша программа прекрасно справляется с вычислением точек дисперсионной кривой, отвечающих гибридным модам волновода.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

В настоящей диссертации были разработаны и реализованы в системе компьютерной алгебры Sage символьно-численные методы исследования распространения монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах. Были рассмотрены характерные задачи, возникающие в теории оптически изотропных и анизотропных сред, а именно:

1. Разработан метод сведения исследования нормальных мод в закрытом волноводе с оптически неоднородным заполнением без диссипации к исследованию спектра самосопряженной матрицы. Этот метод, как и в докт. дисс. М.Д. Малых [26], сводит исследование нормальных мод волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы, но в отличие от метода, предложенного в докт. дисс. М.Д. Малых [26], учитывает гибридизацию мод. Это важно, поскольку появление несамосопряженных матриц и комплексных собственных значений обычно связано с введением диссипации и ведет к экспоненциально убывающим полям. В рассматриваемой в диссертации модели волновода диссипации нет и физический смысл этих явлений не вполне ясен и связан с дефектами приближенных методов отыскания собственных значений несамосопряженных матриц.
2. На основе этого метода разработан численный метод построения дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации и реализован в виде комплекса программ в СКА Sage.
3. Разработанная программа была верифицирована на примерах, в которых возникают гибридные моды.
4. Разработан символьно-численный метод исследования алгебраической модели поверхностных волн Дьяконова, он был реализован в виде комплекса программ в СКА Sage. При этом решение системы алгебраических уравнений, описывающих поверхностные волны Дьяконова, и исследованной ранее численно [39; 40], описано аналитически в радикалах.

При разработке приближенных методов исследования задач теории направляющих систем впервые был сохранен ряд алгебраических свойств решения точно, ряд вычислений был выполнен аналитически. Можно надеяться, что со временем все больше задач математической физики обретут приближенные методы решения, наследующие алгебраические свойства исходной задачи и допускающие ясную физическую интерпретацию.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Малых М. Д. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит Севастьянова Л. А. за обсуждение и постоянное внимание к его работе, Бикеева О. Н. за помощь в работе с волнами Дьяконова, участников конференции РСА'2020 за обсуждение результатов диссертации и Малышева К. Ю. за помощь в редактировании текста, и авторов шаблона \*Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\* за помощь в оформлении диссертации.

## Список литературы

1. Самарский, А. А. О возбуждении радиоволноводов. I [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17, № 11. — С. 1283—1296.
2. Самарский, А. А. О возбуждении радиоволноводов. II [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17, № 12. — С. 1431—1440.
3. Самарский, А. А. О возбуждении радиоволноводов. III [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 971—983.
4. Самарский, А. А. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959—970.
5. Самарский, А. А. К теории возбуждения радиоволноводов [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Избранные труды А. А. Самарского. — Москва : Макс Пресс, 2003. — Гл. 1. С. 28—57.
6. Могилевский, И. Е. Математические задачи теории дифракции [Текст] / И. Е. Могилевский, А. Г. Свешников. — Москва : МГУ, 2010.
7. Диваков, Д. В. Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / Д. В. Диваков. — М., 2017. — 124 с.
8. Тютюнник, А. А. Символьно-численное исследование векторной модели волноводного распространения электромагнитного излучения: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / А. А. Тютюнник. — М., 2018. — 100 с.
9. Смирнов, Ю. Г. О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 4. — С. 829—832.
10. Смирнов, Ю. Г. Применения метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 312, № 3. — С. 597—599.

11. *Смирнов, Ю. Г.* Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для эллиптических уравнений [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 140—147.
12. *Новоселова, Н. А.* Расчет характеристик распространения симметричных волн круглого волновода с радиально-неоднородным диэлектрическим заполнением [Текст] / Н. А. Новоселова, С. Б. Раевский, А. А. Титаренко // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. — 2010. — 2(81). — С. 30—38.
13. *Агалаков, А. Н.* О решении краевых задач для волноводов с анизотропным заполнением [Текст] / А. Н. Агалаков, С. Б. Раевский, А. А. Титаренко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1113—1123.
14. *Боголюбов, А. Н.* О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891—1899.
15. *Делицын, А. Л.* Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением [Текст] / А. Л. Делицын // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 629—633.
16. *Делицын, А. Л.* О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов [Текст] / А. Л. Делицын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 10. — С. 1883—1888.
17. О базисности системы корневых векторов радиоволновода [Текст] / А. Н. Боголюбов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2000. — № 6. — С. 17—20.
18. *Боголюбов, А. Н.* О корневых векторах цилиндрического волновода [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126—129.
19. О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца [Текст] / М. Д. Малых [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39—48.
20. *Малых, М. Д.* О представлении электромагнитных полей в закрытых волноводах с разрывным заполнением при помощи непрерывных потенциалов

- [Текст] / М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 342—354.
21. *Боголюбов, А. Н.* О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869—1888.
  22. *Келдыш, М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов [Текст] / М. В. Келдыш // Избранные труды. Математика. — Москва : Наука, 1985. — Гл. 31. С. 305—332.
  23. *Делицын, А. Л.* Смешанные конечные элементы для анализа вещественных и комплексных мод цилиндрических волноводов [Текст] / А. Л. Делицын, С. И. Круглов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2011. — № 6. — С. 53—58.
  24. *Тютюнник, А. А.* О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением [Текст] / А. А. Тютюнник // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129—139.
  25. *Зорин, А. В.* Комплексные собственные значения в квантовой механике Курьшкина-Вудкевича [Текст] / А. В. Зорин, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2022. — Т. 30, № 2. — С. 139—148. — URL: <https://journals.rudn.ru/miph/article/view/30952>.
  26. *Малых, М. Д.* Разработка методов численного анализа закрытых электромагнитных волноводов: дис. ... докт. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / М. Д. Малых. — М., 2019. — 214 с.
  27. *Chew, W. C.* Lectures on theory of microwave and optical waveguides [Текст] / W. C. Chew. — 2012. — URL: [wcchew.ece.illinois.edu](http://wcchew.ece.illinois.edu).
  28. *Егоров, Ю. В.* Частично заполненные прямоугольные волноводы [Текст] / Ю. В. Егоров. — Москва : Изд-во "Советское радио", 1967.
  29. *Бергер, М. Н.* Прямоугольные волноводы с диэлектриками [Текст] / М. Н. Бергер, Б. Капилевич. — Москва : Изд-во "Советское радио", 1973.
  30. *Нефёдов, Е. И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах [Текст] / Е. И. Нефёдов. — Москва : Изд-во "Наука", 1979.

31. *Кройтор, О.* О нормальных модах волновода [Текст] / О. Кройтор, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 403—420.
32. *Dyakonov, M. I.* New type of electromagnetic wave propagating at an interface [Текст] / М. I. Dyakonov // Sov. Phys. JETP. — 1988. — Т. 67. — С. 714.
33. Properties of nematic LC planar and smoothly-irregular waveguide structures: research in the experiment and using computer modeling [Текст] / A. Egorov [et al.] // Computer Optics. — 2019. — Vol. 43, issue 6. — P. 976—982.
34. *Ayriyan, A. S.* Computer simulation of the pulse-periodic electric field effect on the 2D director orientation of nematic liquid crystal. Experimental research of multimode nematic liquid crystal waveguides. [Текст] / A. S. Ayriyan, E. A. Ayrjan, A. Egorov // Zhurnal Radioelektroniki [Journal of Radio Electronics]. — 2021. — Vol. 1.
35. Properties of liquid-crystal wave-guiding structures [Текст] / A. Ayriyan [et al.] // Soft Matter. — 2022. — Vol. 18, issue 38. — P. 441—7451. — URL: <http://dx.doi.org/10.1039/D2SM00597B>.
36. Observation of Dyakonov surface waves [Текст] / О. Такаяма [и др.] // Physical Review Letters. — 2009. — Т. 102. — С. 043903.
37. *Takayama, O.* Lossless directional guiding of light in dielectric nanosheets using Dyakonov surface waves [Текст] / О. Такаяма, D. Artigas, L. Torner // Nature Nanotech. — 2014. — Т. 9. — С. 419—424.
38. *Бикеев, О. Н.* Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред [Текст] / О. Н. Бикеев, Л. А. Севастьянов // Вестник РУДН. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 141—148.
39. Electromagnetic surface waves guided by a twist discontinuity in a uniaxial dielectric with optic axis lying in the discontinuity plane [Текст] / О. N. Bikeev [и др.] // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2017. — Т. 33, № 15. — С. 2009—2021.
40. Properties of Dyakonov waves propagating in an arbitrary direction in the plane of the boundary [Текст] / О. N. Bikeev [и др.] // TEWA. — 2021.
41. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing [Текст] / W. H. Press [et al.]. — 3rd ed. — Cambridge University Press, 2007. — P. 1256.

42. Аналитическое исследование кубатурных формул на сфере в системах компьютерной алгебры [Текст] / Р. Э. Байрамов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 1. — С. 61—69.
43. *Blinkov, Y. A.* Specialized computer algebra system GINV [Текст] / Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt // Programming and Computer Software. — 2008. — Vol. 34, issue 2. — P. 112—123.
44. *Кокс, Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. [Текст] / Д. Кокс, Д. Литтл, Д. О’Ши. — 1-е изд. — Москва : Мир, 2000.
45. *Gerdt, V. P.* Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations [Текст] / V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov, V. Mozzhilkin // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2006. — Vol. 2, issue 2. — P. 26.
46. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — Наука : Москва, 2004.
47. *Васильев, С. А.* Компьютерные методы математической физики [Текст] / С. А. Васильев, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов. — Москва : РУДН, 2020.
48. Математический анализ : учебно-методический комплекс [Текст]. Т. 2 / С. А. Васильев [и др.]. — Москва : РУДН, 2016.
49. *Рисс, Ф.* Лекции по функциональному анализу [Текст] / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — Москва : Мир, 1979.
50. *Hellwig, G.* Partial Differential Equations. An Introduction [Текст] / G. Hellwig. — Leipzig : Teubner, 1960.
51. *Hellwig, G.* Partial Differential Equations. An Introduction [Текст] / G. Hellwig. — Stuttgart : Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1977.
52. *Ladyzhenskaya, O. A.* The Boundary Value Problems of Mathematical Physics [Текст] / O. A. Ladyzhenskaya. — New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo : Springer, 1985.
53. *Lichtenstein, L.* Über Gleichungssysteme mit unendlich vielen Variablen [Текст] / L. Lichtenstein // Rend. Palermo. — 1914. — Т. 38. — С. 113—166.
54. *Петровский, И.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И. Петровский. — Физматлит : Москва, 2009.

55. *Malyshev, K. Y.* Calculation of special functions arising in the problem of diffraction by a dielectric ball [Текст] / К. Y. Malyshev // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2021. — Т. 29, № 2. — С. 146—157.
56. *Descloux, J.* Methode des elements finis [Текст] / J. Descloux. — Lausanne, Suisse, 1973.
57. *Saad, R.* Introduction to Finite Element Analysis for Engineers [Текст] / R. Saad, F. Hassan. — CRC Press, 2017.
58. *Калиткин, Н. Н.* Бикомпактные схемы и слоистые среды [Текст] / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин // Докл. АН. — 2008. — Т. 419, № 6. — С. 744—748.
59. *Калиткин, Н. Н.* Одномерные и двумерные бикомпактные схемы в слоистых средах [Текст] / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин // Матем. моделирование. — 2009. — Т. 21, № 8. — С. 44—62.
60. *Rogov, B. V.* Monotonic bcompact schemes for linear transport equations [Текст] / B. V. Rogov, M. N. Mikhailovskaya // Math. Models Comput. Simul. — 2012. — Vol. 4. — P. 92—100.
61. *Aristova, E. N.* Boundary conditions implementation in bcompact schemes for the linear transport equation [Текст] / E. N. Aristova, B. V. Rogov // Math. Models Comput. Simul. — 2013. — Vol. 5. — P. 199—207.
62. *Aristova, E. N.* Bcompact scheme for linear inhomogeneous transport equation [Текст] / E. N. Aristova, D. F. Baydin, B. V. Rogov // Math. Models Comput. Simul. — 2013. — Vol. 5. — P. 586—594.
63. *Bragin, M. D.* Uniqueness of a high-order accurate bcompact scheme for quasi-linear hyperbolic equations [Текст] / M. D. Bragin, B. V. Rogov // Comput. Math. and Math. Phys. — 2014. — Vol. 54. — P. 831—836.
64. *Aristova, E. N.* Monotonization of a highly accurate bcompact scheme for a stationary multidimensional transport equation [Текст] / E. N. Aristova, B. V. Rogov, A. V. Chikitkin // Math. Models Comput. Simul. — 2016. — Vol. 8. — P. 108—117.

65. *Aristova, E. N.* Optimal monotization of a high-order accurate bicomcompact scheme for the nonstationary multidimensional transport equation [Текст] / E. N. Aristova, B. V. Rogov, A. V. Chikitkin // *Comput. Math. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56. — P. 962–976.
66. *Aristova, E. N.* Bicomcompact schemes for solving a steady-state transport equation by the quasi-diffusion method [Текст] / E. N. Aristova, M. I. Stoynov // *Math. Models Comput. Simul.* — 2016. — Vol. 8. — P. 615–624.
67. *Аристова, Е. Н.* Бикомпактные схемы для численного решения модельной задачи нестационарного переноса нейтронов HOLO алгоритмами [Текст] / Е. Н. Аристова, Н. И. Караваева // *Матем. моделирование.* — 2021. — Т. 33, № 8. — С. 3–26.
68. *Белов, А. А.* Бикомпактная разностная схема для уравнений Максвелла в слоистых средах [Текст] / А. А. Белов, Ж. О. Домбровская // *Докл. АН.* — 2020. — Т. 492. — С. 15–19.
69. *Белов, А. А.* Тестирование бикомпактных схем для одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах [Текст] / А. А. Белов, Ж. О. Домбровская // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2022. — Т. 62, № 7. — С. 61–79.
70. *Ciarlet, P.* The Finite Element Method [Текст] / P. Ciarlet. — Bombay : Tata Institute of Fundamental Research, 1975.
71. *Natterer, F.* Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der Finiten Elemente [Текст] / F. Natterer // *International Series of Numerical Mathematics.* — 1975. — Vol. 28. — P. 109–121.
72. *Ватсон, Г. Н.* Теория бесселевых функций [Текст]. Т. 1 / Г. Н. Ватсон. — ИЛ : Москва, 1949.
73. *Kroytor, O.* The penetration modeling of flat obstacles in Ansys Autodyn program. [Текст] / O. Kroytor // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* — 2019. — Vol. 675. — P. 65.
74. *Marchevskii, F. N.* Singular electromagnetic waves in bounded anisotropic media [Текст] / F. N. Marchevskii, V. L. Strizhevskii, S. V. Strizhevskii // *Sov. Phys. Solid State.* — 1984. — Т. 26. — С. 857.
75. Dyakonov surface waves: a review [Текст] / O. Takayama [и др.] // *Electromagnetics.* — 2008. — Т. 28. — С. 126–145.

76. *Polo Jr., J. A.* A Surface Electromagnetic Waves: a Review [Текст] / J. A. Polo Jr., A. Lakhtakia // Laser & Photonics Reviews. — 2011. — Т. 5. — С. 234—246.
77. *Sommerfeld, A.* Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen an einem zylindrischen Leiter [Текст] / A. Sommerfeld // Ann. der Physik und Chem. — 1899. — Т. 67. — С. 233—290.
78. *Zenneck, J.* Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie [Текст] / J. Zenneck // Ann. der Physik. — 1907. — Т. 23. — С. 846—866.
79. *Cox, D.* Ideals, varieties, and algorithms [Текст] / D. Cox, J. Little, D. O'Shea. — 2-е изд. — Springer, 1997.
80. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.0.1), Release-Date:2020-02-20 [Текст] //. — 2013. — URL: <https://www.sagemath.org>.
81. *Хвольсон, О. Д.* Курс Физики [Текст]. Т. 1 / О. Д. Хвольсон. — 4-е изд. — СПб : Издание К.Л. Риккера, 1914.
82. *Зоммерфельд, А.* Оптика [Текст] / А. Зоммерфельд. — Москва : Иностранная Литература, 1953.
83. *Карлинер, М. М.* Электродинамика СВЧ: Курс лекций [Текст] / М. М. Карлинер. — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т., 2006.
84. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике [Текст] / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — Москва : Наука, 1980.
85. *Боголюбов, А. Н.* Применение вариационно-разностных методов для расчета диэлектрических волноводов [Текст] / А. Н. Боголюбов, Т. В. Едакина // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 6—14.
86. *Боголюбов, А. Н.* Расчет диэлектрических волноводов со сложной формой поперечного сечения вариационно-разностным методом [Текст] / А. Н. Боголюбов, Т. В. Едакина // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1992. — Т. 34, № 3. — С. 72—74.
87. Adaptive Multigrid Methods for the Vectorial Maxwell Eigenvalue Problem for Optical Waveguide Design [Текст] / P. Deuffhard [и др.] // Mathematics – Key Technology for the Future / под ред. W. Jäger, H. J. Krebs. — Berlin–Heidelberg : Springer, 2011. — С. 279—292.

88. Advanced FEM analysis of optical waveguides: algorithms and applications [Текст] / F. Schmidt [и др.] // Proc. SPIE. — 2008. — Т. 6896.
89. *Lezar, E.* Electromagnetic waveguide analysis [Текст] / E. Lezar, D. B. Davidson // Automated solution of differential equations by the finite element method. — The FEniCS Project, 2011. — С. 629—643.
90. *Делицын, А. Л.* Смешанные конечные элементы для анализа вещественных и комплексных мод цилиндрических волноводов [Текст] / А. Л. Делицын, С. И. Круглов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. — 2011. — № 6. — С. 53—57.
91. *Делицын, А. Л.* Применение метода смешанных конечных элементов для вычисления мод цилиндрических волноводов с переменным показателем преломления [Текст] / А. Л. Делицын, С. И. Круглов // Журнал радиоэлектроники. — 2012. — № 4. — С. 1—28. — URL: <http://jre.cplire.ru/alt/apr12/3/text.html>.
92. *Гохберг, И. Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов [Текст] / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — Москва : Мир, 1965.
93. *Маркус, А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков [Текст] / А. С. Маркус. — Кишинев : «Штиинца», 1986.
94. *Копачевский, Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций [Текст] / Н. Д. Копачевский. — Симферополь : «ФОРМА», 2009.
95. *Shestopalov, Y.* Eigenwaves in waveguides with dielectric inclusions: spectrum [Текст] / Y. Shestopalov, Y. Smirnov // Applicable Analysis. — 2014. — Т. 93, № 2. — С. 408—427.
96. On the representation of electromagnetic fields in closed waveguides using four scalar potentials [Текст] / M. D. Malykh [et al.] // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2018. — Vol. 32, no. 7. — P. 886—898.
97. *Chow, V. T.* Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill, New York, 1964. [Текст] / V. T. Chow. — 1964.

## Список рисунков

1.1	Решение краевой задачи, полученное методом сопряжения . . . . .	16
1.2	Решение краевой задачи $u'' = 1$ , $u(0) = u(1) = 0$ : точное и приближенное ( $N = 3$ ) . . . . .	19
1.3	Решений краевой задачи при $q = 1 + x^2$ и $f = 1$ , $N = 5$ . . . . .	20
1.4	Разность решений краевой задачи при $q = 1 + x^2$ и $f = 1$ , найденных при $N = 3$ и $N = 5$ . . . . .	20
1.5	Решение краевой задачи $u'' = 1$ , $u(0) = u(1) = 0$ : точное и приближенное ( $N = 3$ , МКЭ) . . . . .	23
1.6	Приближенное решение краевой задачи с разрывными коэффициентами при 9 (сверху) и 30 (снизу) элементах, штриховой линией указано точное решение . . . . .	25
1.7	Диаграмма Ричардсона для решений краевых задач с гладкими (сверху) и разрывными (снизу) коэффициентами, найденная по МКЭ . . . . .	28
2.1	Структура (среда) из анизотропного и изотропного вещества (диэлектриков) . . . . .	34
2.2	Структура из изотропа с постоянной диэлектрической проницаемостью и анизотропа с диэлектрической проницаемостью . . . . .	36
2.3	График $q_0$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_0$ . . . . .	48
2.4	График левой части последнего из уравнений (2.17) . . . . .	49
2.5	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны . . . . .	49
2.6	График $u$ , величина угла указана в градусах . . . . .	50
3.1	Волновод, заполненный слоями . . . . .	65
3.2	Дисперсионная кривая для тестового волновода с двумя слоями ( $\epsilon_0 = 1$ , $\epsilon_1 = 1$ , $\mu = 1$ , $L_x = 1$ , $L_y = 2$ ) . . . . .	69
3.3	Сечение волновода . . . . .	87
3.4	Дисперсионная кривая волновода со вставкой при $L_x = 1$ , $L_y = 2$ , $\epsilon_1 = 1.1$ . Точками указаны точки дисперсионной кривой, найденные численно (взято а. $N = 3$ , б. $N = 6$ , с. $N = 10$ мод по каждому из направлений), сплошными линиями — дуги дисперсионной кривой, соответствующие SLE модам. . . . .	88

- 3.5 Дисперсионная кривая волновода со вставкой при  $L_x = 1$ ,  $L_y = 2$ ,  $\epsilon_1 = 1.5$ . Точками указаны точки дисперсионной кривой, найденные численно (взято а.  $N = 3$ , б.  $N = 6$ , с.  $N = 10$  мод по каждому из направлений), сплошными линиями — дуги дисперсионной кривой, соответствующие SLE модам. . . . . 89
- 3.6 Дисперсионная кривая волновода со вставкой при  $L_x = 1$ ,  $L_y = 2$ ,  $\epsilon_1 = 2$ . Точками указаны точки дисперсионной кривой, найденные численно (взято а.  $N = 3$ , б.  $N = 6$ , с.  $N = 10$  мод по каждому из направлений), сплошными линиями — дуги дисперсионной кривой, соответствующие SLE модам. . . . . 89
- A.1 График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ . . . . . 106
- A.2 График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . . 106
- A.3 Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны. 106
- A.4 График  $u$ , величина угла указана в градусах. . . . . 106
- A.5 График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ . . . . . 107
- A.6 График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . . 107
- A.7 Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны. 107
- A.8 График  $u$ , величина угла указана в градусах. . . . . 107
- A.9 График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ . . . . . 108
- A.10 График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . . 108
- A.11 Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны. 108
- A.12 График  $u$ , величина угла указана в градусах. . . . . 108
- A.13 График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ . . . . . 109
- A.14 График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . . 109
- A.15 Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны. 109
- A.16 График  $u$ , величина угла указана в градусах. . . . . 109
- A.17 График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ . . . . . 110
- A.18 График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . . 110
- A.19 Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны. 110

A.20	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	110
A.21	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	111
A.22	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	111
A.23	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	111
A.24	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	111
A.25	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	112
A.26	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	112
A.27	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	112
A.28	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	112
A.29	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	113
A.30	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	113
A.31	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	113
A.32	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	113
A.33	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	114
A.34	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	114
A.35	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	114
A.36	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	114
A.37	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	115
A.38	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	115
A.39	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	115
A.40	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	115
A.41	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	116
A.42	График левой части последнего из уравнений (2.17). . . . .	116
A.43	Точки на плоскости $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.	116
A.44	График $u$ , величина угла указана в градусах. . . . .	116
A.45	График $q_o$ (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения $t, q_o$ . . . . .	117

## Список таблиц

1	Результаты компьютерных экспериментов . . . . .	51
---	---	----

## Приложение А

### Результаты компьютерных экспериментов

1.  $\varepsilon_o = 1, \varepsilon = 2, \varepsilon_e = 3$

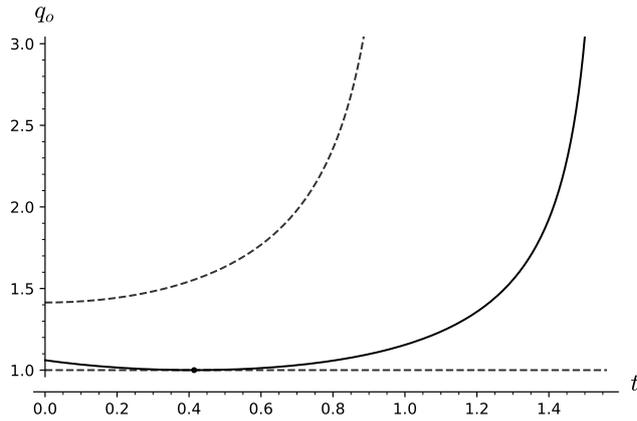


Рисунок А.1 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

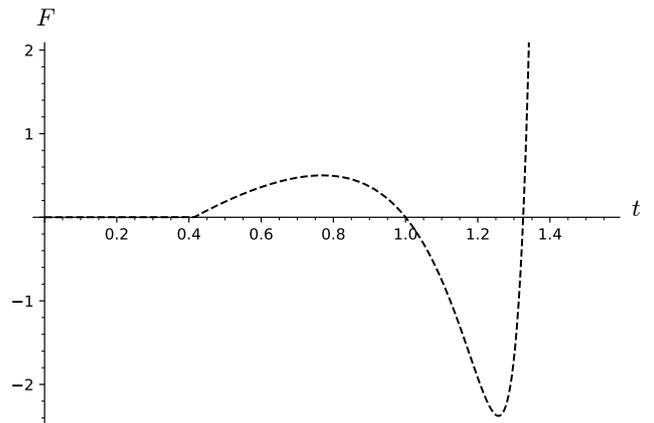


Рисунок А.2 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

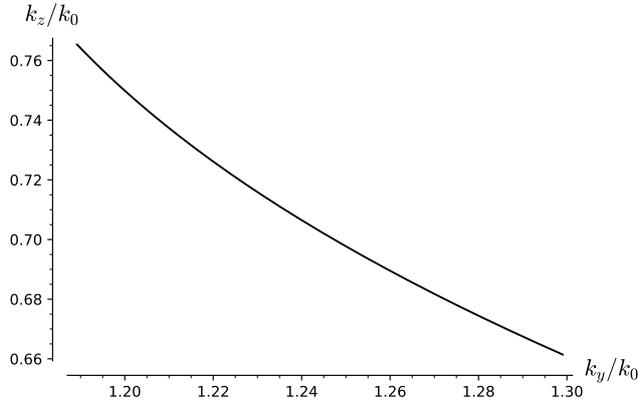


Рисунок А.3 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

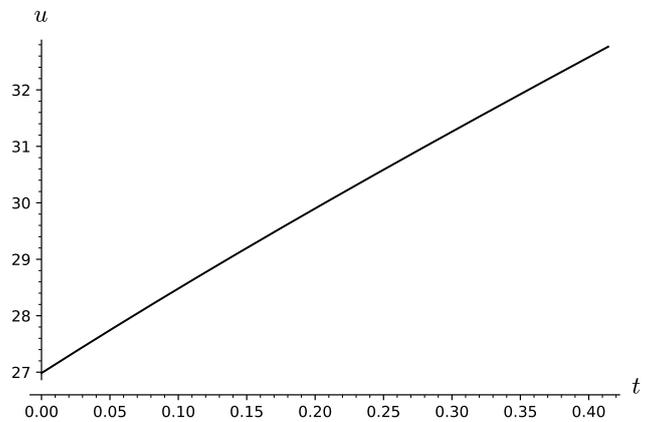


Рисунок А.4 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

2.  $\varepsilon_o = 2.5, \varepsilon = 3.5, \varepsilon_e = 5.5$

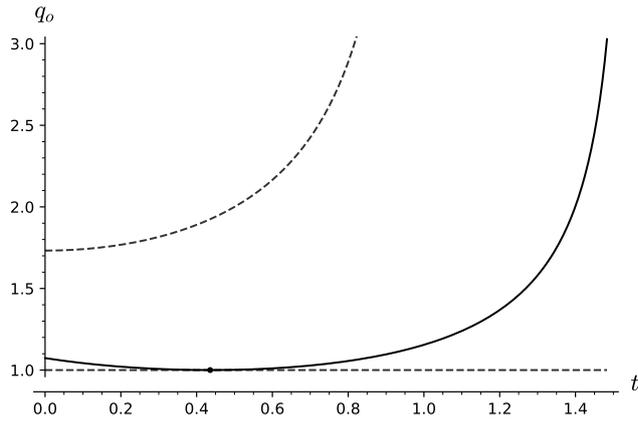


Рисунок А.5 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

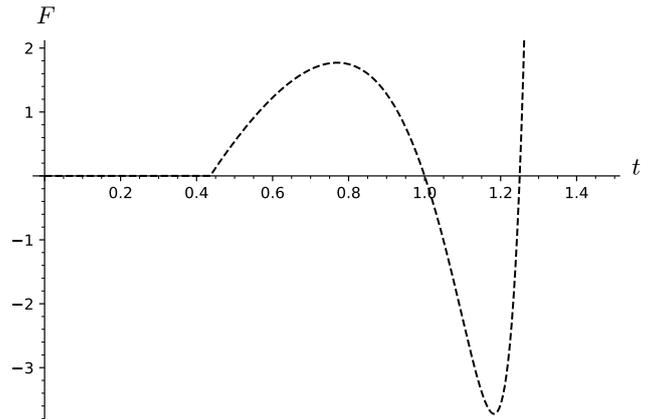


Рисунок А.6 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

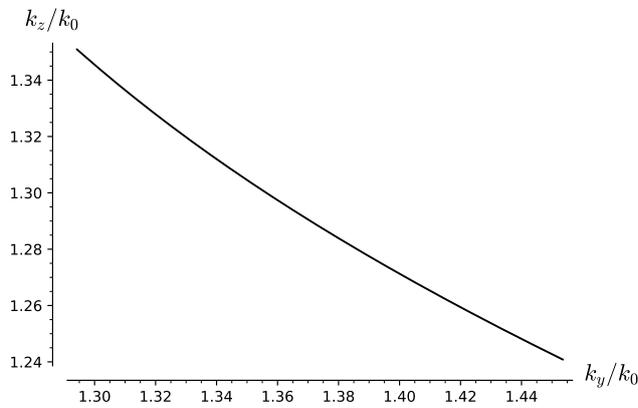


Рисунок А.7 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

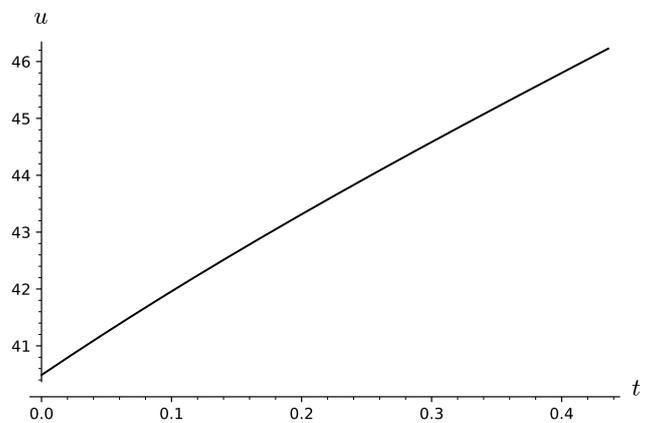


Рисунок А.8 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

3.  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 7, \varepsilon_e = 55$

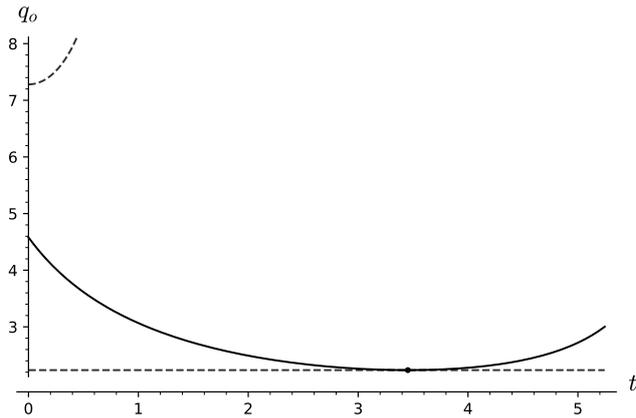


Рисунок А.9 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

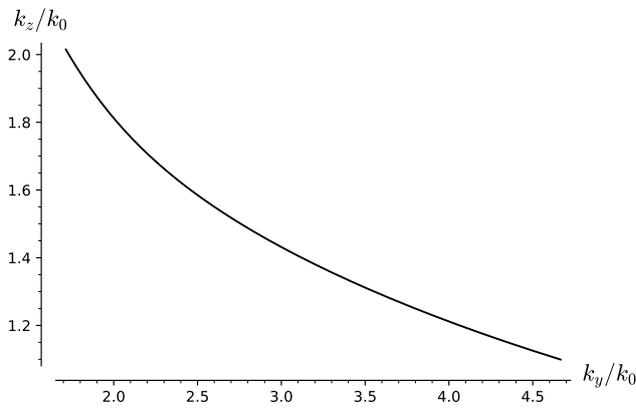


Рисунок А.11 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

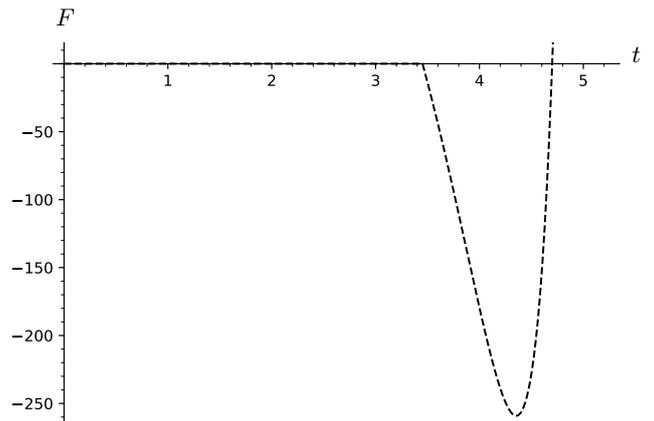


Рисунок А.10 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

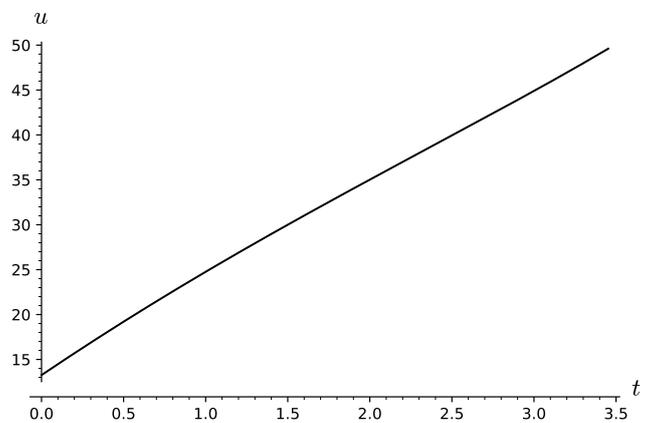


Рисунок А.12 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

4.  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 2.1, \varepsilon_e = 80$

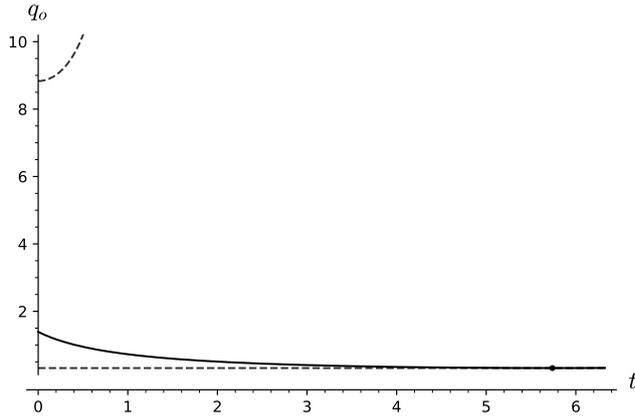


Рисунок А.13 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

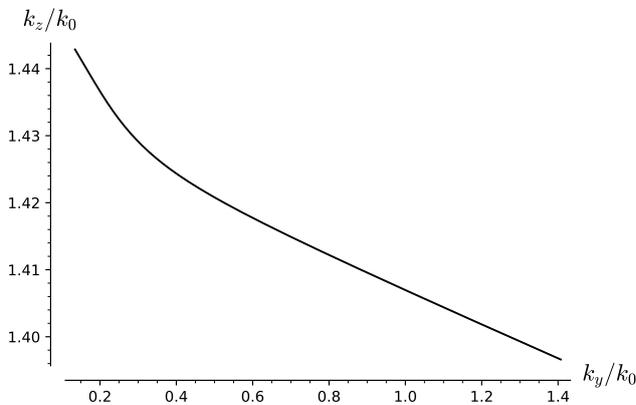


Рисунок А.15 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

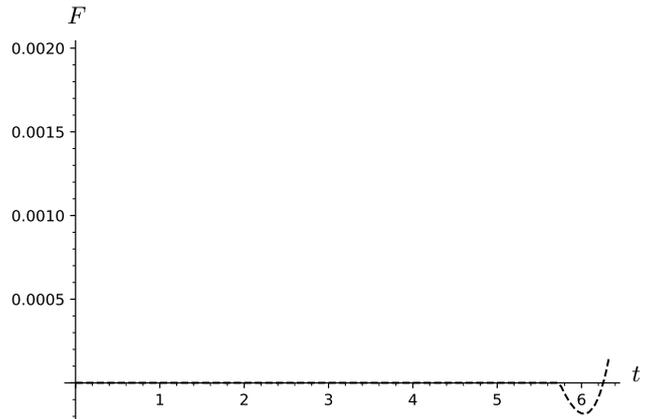


Рисунок А.14 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

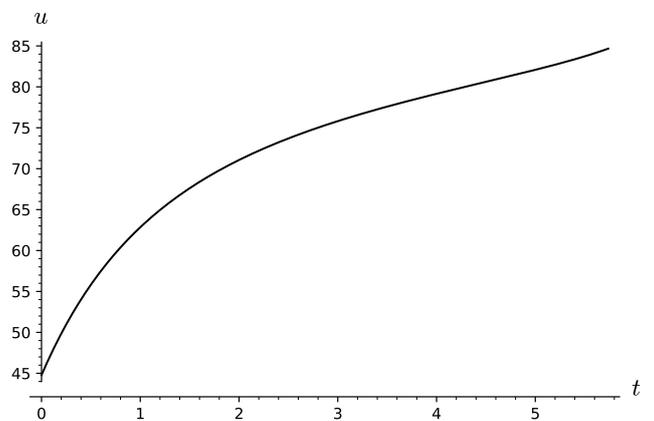


Рисунок А.16 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

5.  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 54, \varepsilon_e = 55$

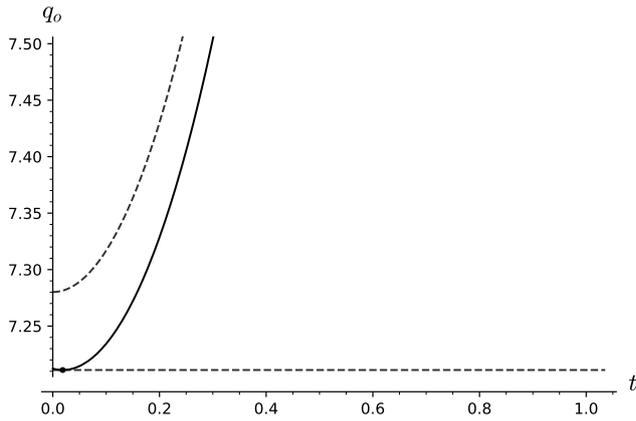


Рисунок А.17 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

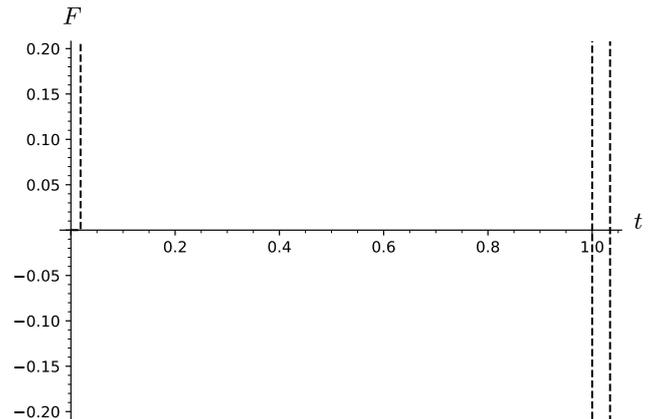


Рисунок А.18 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

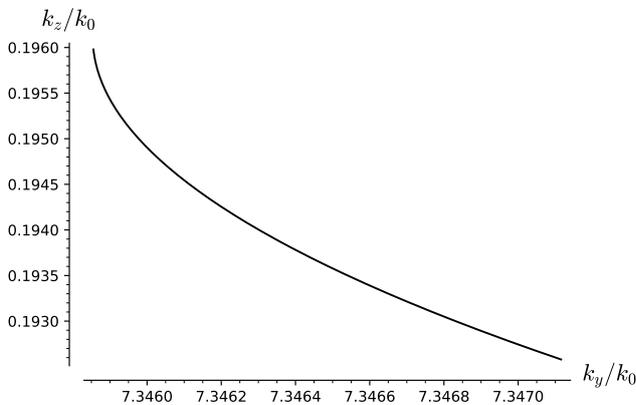


Рисунок А.19 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

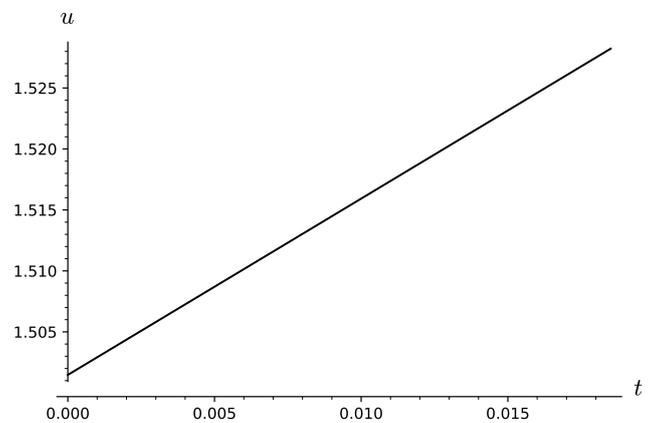


Рисунок А.20 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

6.  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 79.9, \varepsilon_e = 80$

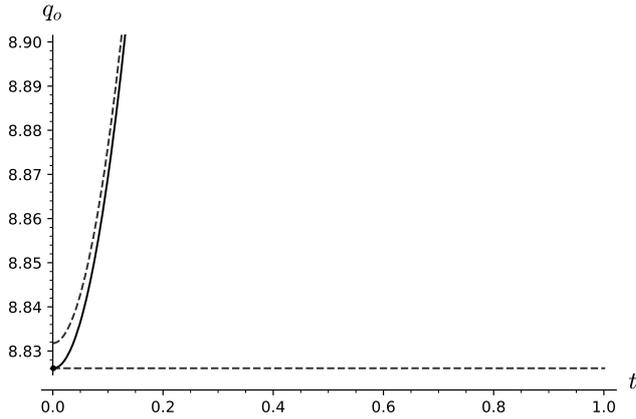


Рисунок А.21 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

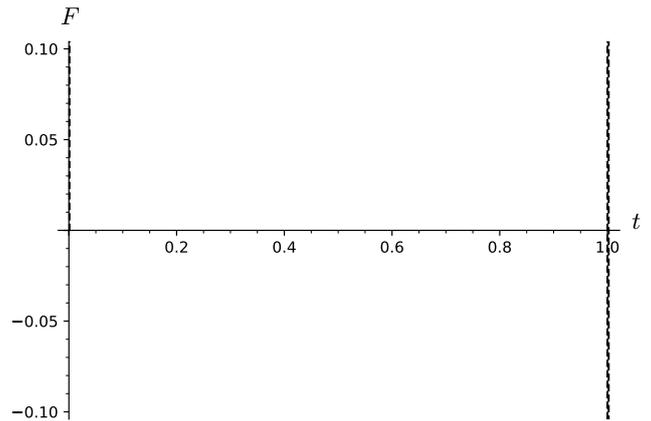


Рисунок А.22 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

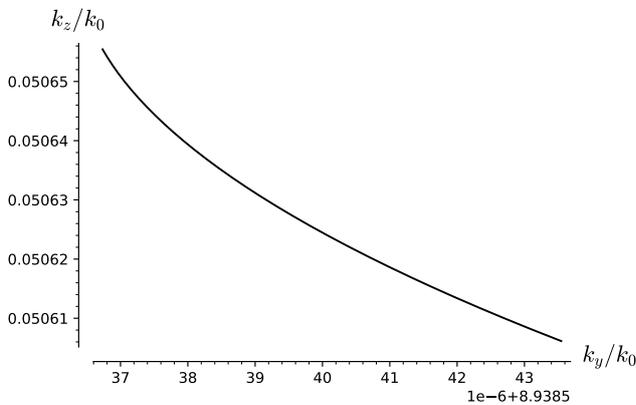


Рисунок А.23 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

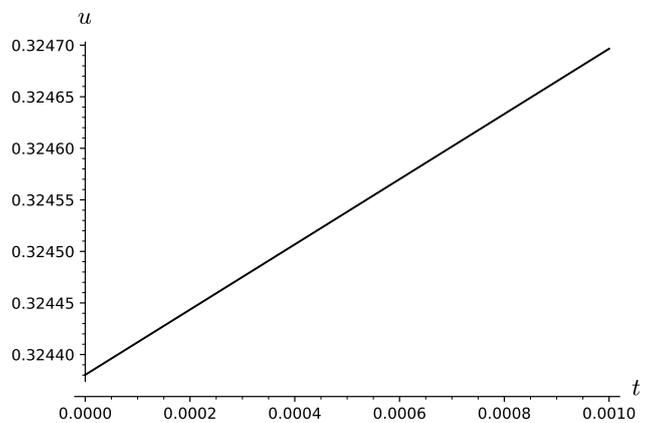


Рисунок А.24 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

7.  $\varepsilon_o = 13, \varepsilon = 14, \varepsilon_e = 16$

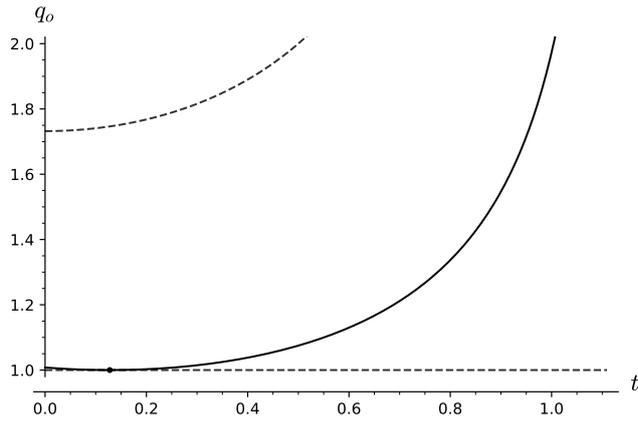


Рисунок А.25 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

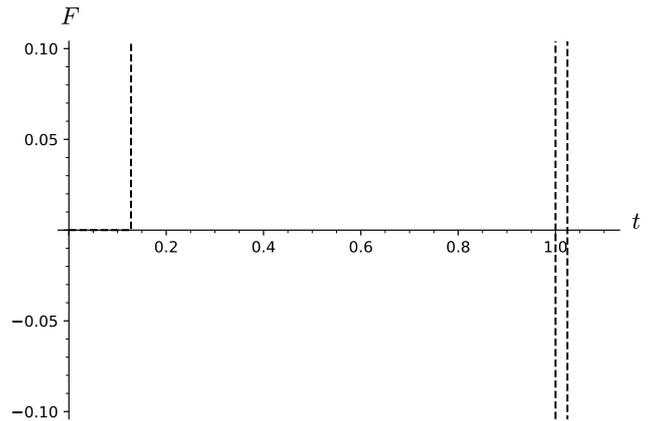


Рисунок А.26 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

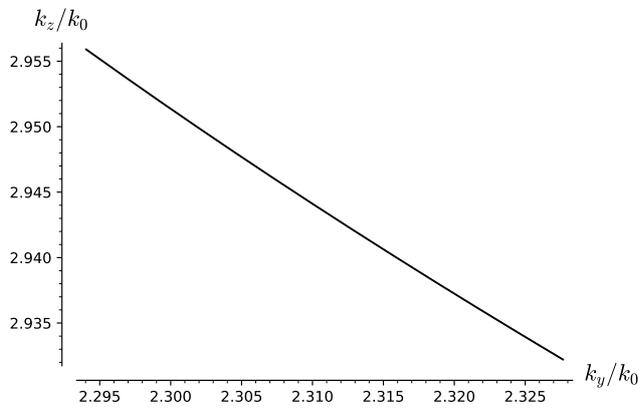


Рисунок А.27 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

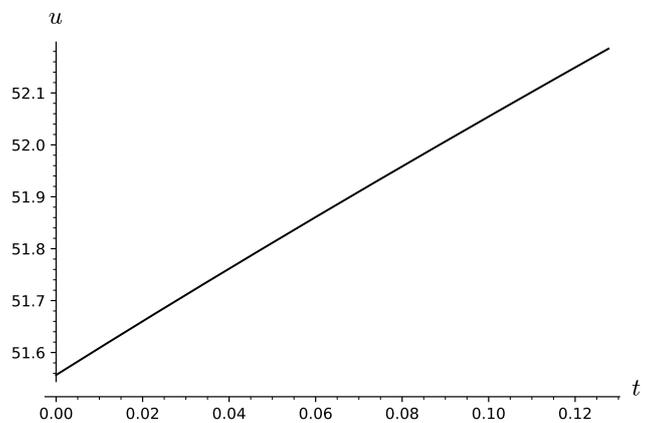


Рисунок А.28 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

8.  $\varepsilon_o = 33, \varepsilon = 34, \varepsilon_e = 36$

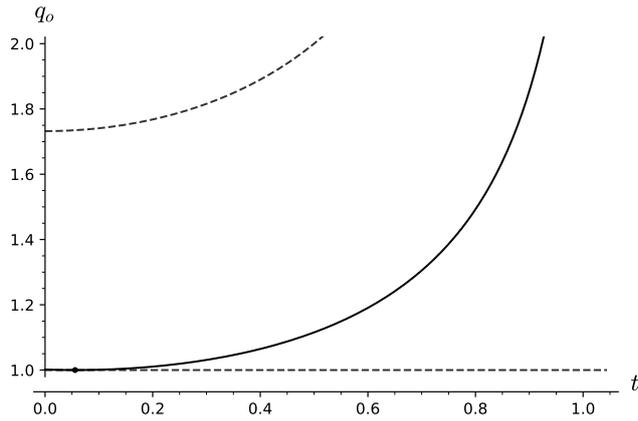


Рисунок А.29 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

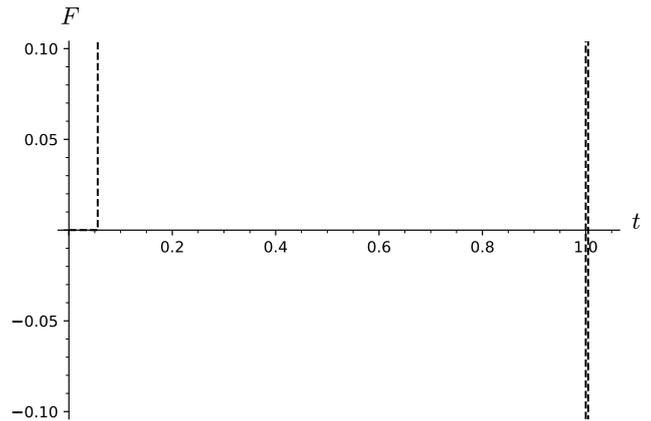


Рисунок А.30 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

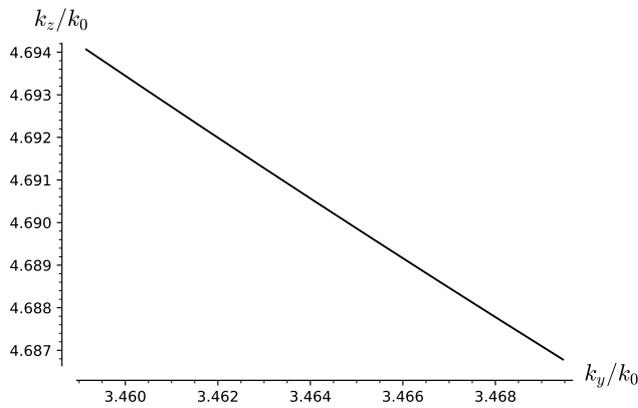


Рисунок А.31 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

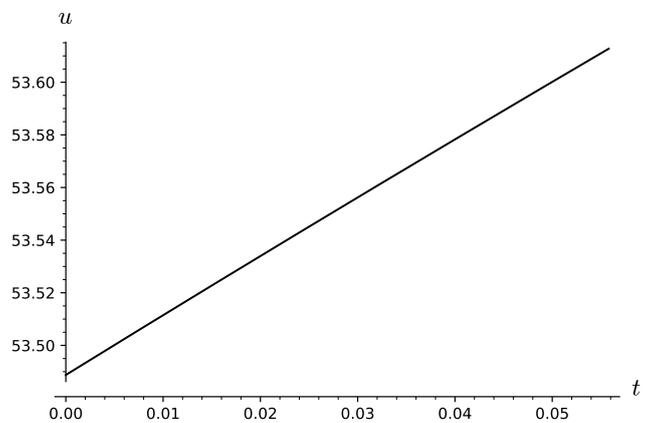


Рисунок А.32 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

9.  $\varepsilon_o = 133, \varepsilon = 134, \varepsilon_e = 136$

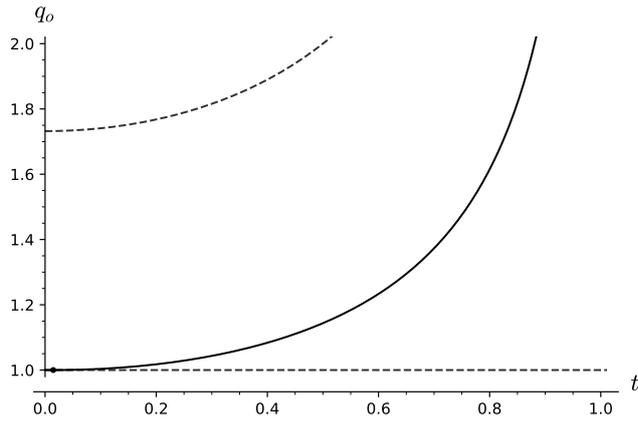


Рисунок А.33 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

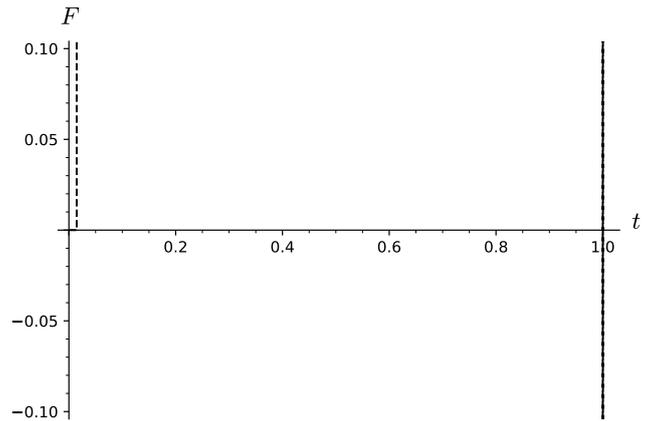


Рисунок А.34 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

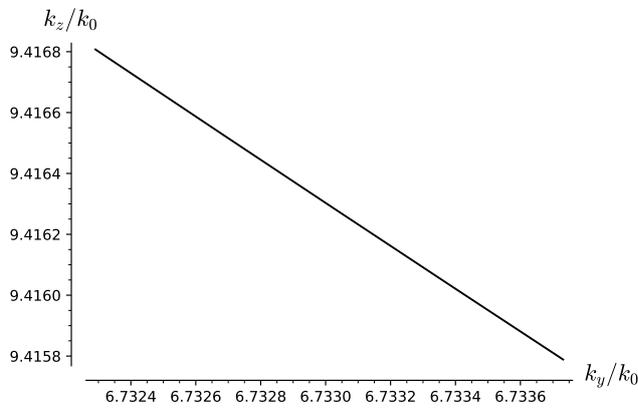


Рисунок А.35 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

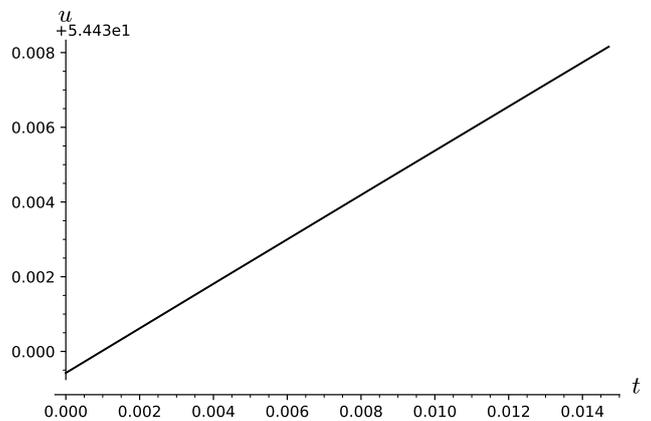


Рисунок А.36 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

10.  $\varepsilon_o = 20, \varepsilon = 40, \varepsilon_e = 60$

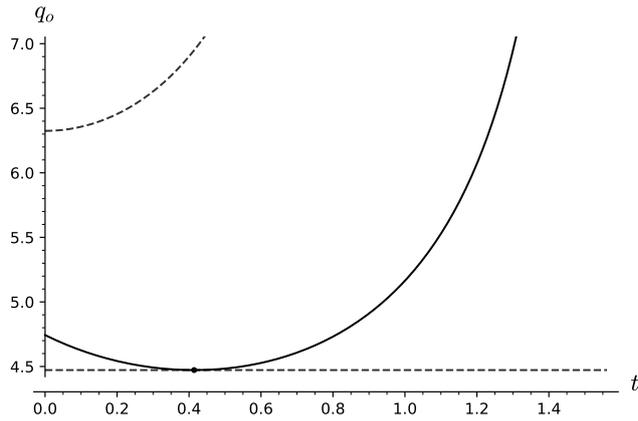


Рисунок А.37 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

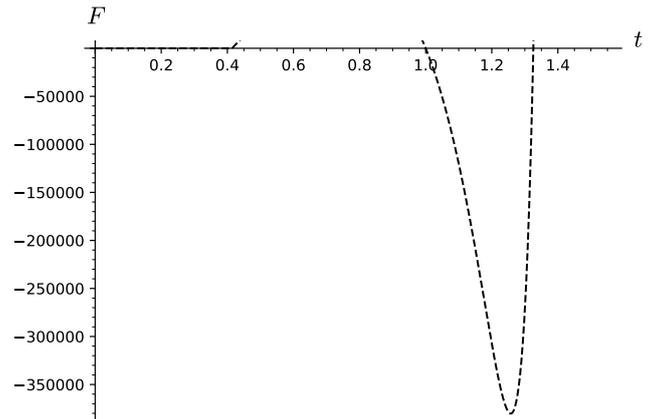


Рисунок А.38 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

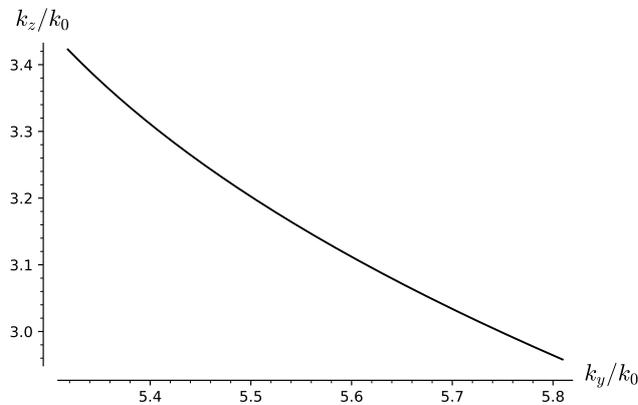


Рисунок А.39 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

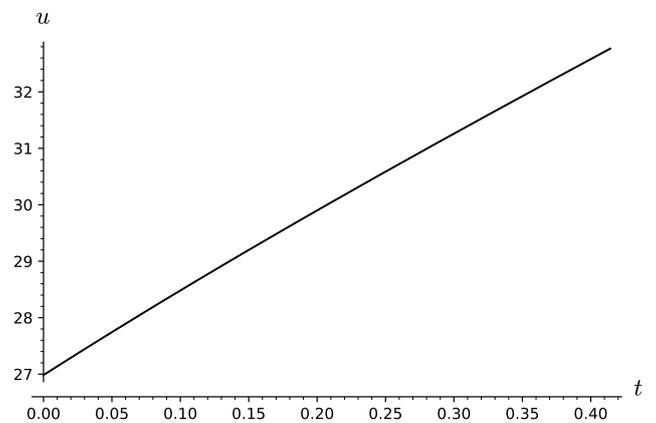


Рисунок А.40 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

11.  $\varepsilon_o = 20, \varepsilon = 50, \varepsilon_e = 80$

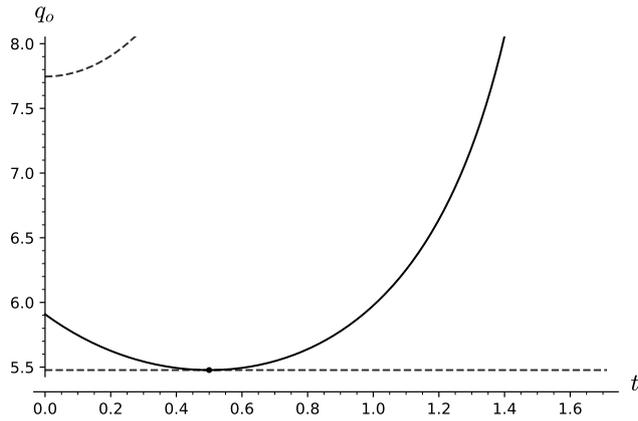


Рисунок А.41 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .

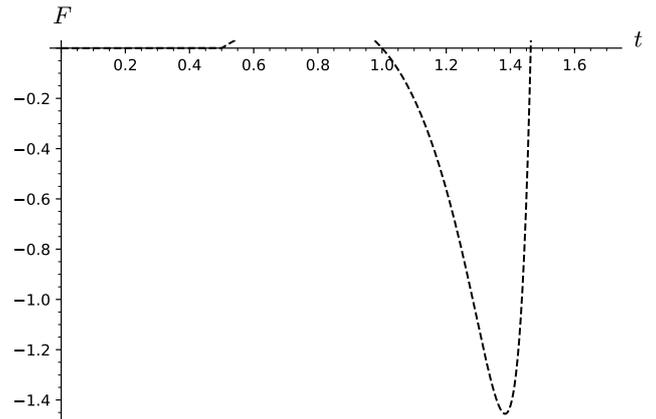


Рисунок А.42 — График левой части последнего из уравнений (2.17).

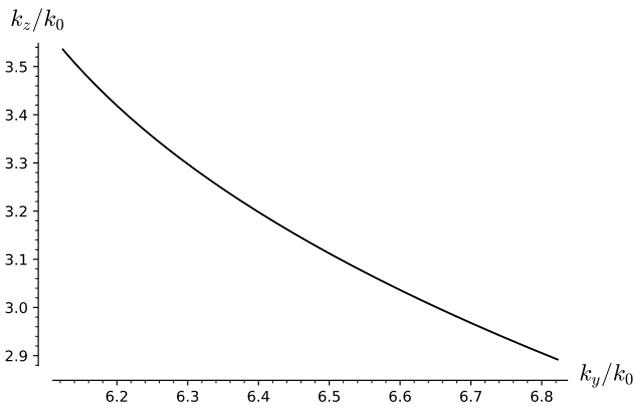


Рисунок А.43 — Точки на плоскости  $\beta\gamma$ , при которых имеются поверхностные волны.

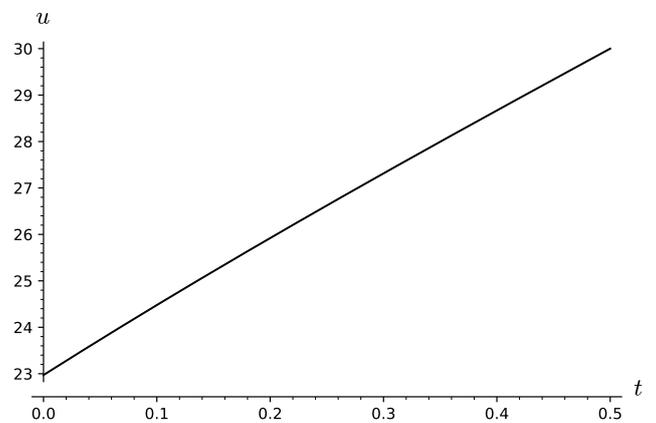


Рисунок А.44 — График  $u$ , величина угла указана в градусах.

12. Недьяконовский случай  $\varepsilon_o = 2, \varepsilon = 5, \varepsilon_e = 4$

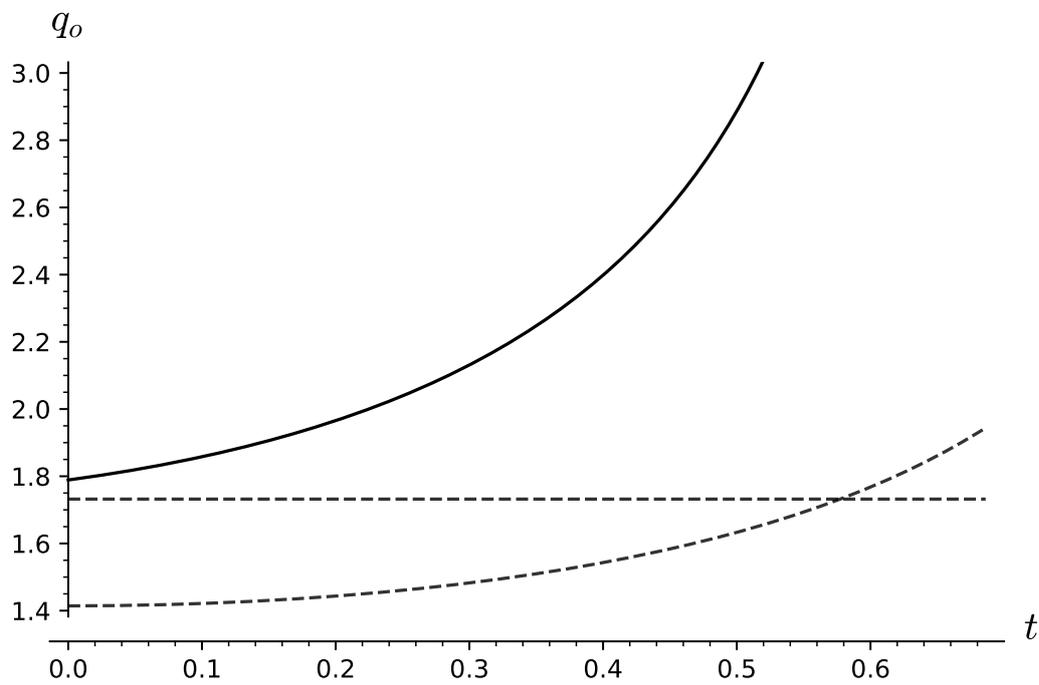


Рисунок А.45 — График  $q_o$  (сплошная линия), пунктирные линии указывают границы области изменения  $t, q_o$ .