

На правах рукописи

Гамбарян Марк Микаелович

**Обратимые разностные схемы для динамических
систем с квадратичной правой частью**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ.

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на кафедре Математического моделирования и искусственного интеллекта федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы».

Научный руководитель: заведующий кафедрой математического моделирования и ИИ ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы»,
доктор физико-математических наук, доцент
Малых Михаил Дмитриевич

Официальные оппоненты: **Корпусов Максим Олегович**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математики

Блинов Юрий Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Саратовский государственный университет», заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования

Васильев Николай Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГАНУ «Санкт-Петербургское отделение мат. института им. В.А. Стеклова РАН», старший научный сотрудник

Защита состоится «24» октября 2025 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, каб. 3Г, ученому секретарю диссертационного совета ПДС 0200.006.

Автореферат разослан «__» сентября 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.006,
канд. физ.-мат. наук



Геворкян М. Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Непрерывные динамические системы являются одной из самых распространенных математических моделей, описывающих движение частиц в рамках классической механики и электродинамики, явления химической кинетики. Все эти явления роднит то обстоятельство, что они хорошо описываются математической моделью, основанной на системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие модели удается исследовать аналитически только в тех редких случаях, когда они линейны или сводятся к линейным. В нелинейном же случае как правило приходится прибегать к численному интегрированию дифференциальных уравнений.

С позиций математического моделирования, разностные схемы, употребляемые для численного интегрирования, можно рассматривать как дискретные модели тех же явлений. При этом смещается акцент с исследования сходимости разностной схемы к исследованию наследования разностной схемой тех или иных свойств непрерывной динамической системы. Со времен возникновения геометрических интеграторов гамильтоновых систем все четче и четче формулируется задача о конструировании разностных схем, аппроксимирующих заданную динамическую систему и наследующих все известные ее свойства. Задача эта в полной мере еще не решена и нет сомнений в том, что само понятие наследования будет существенно расширено. Решение этой задачи позволит исследовать динамические системы без чрезмерного измельчения шага по времени.

Ключевым вопросом здесь оказывается выбор самого главного свойства, сохранение которого, повлекло бы наследование остальных. При этом, конечно, было бы крайне желательно, чтобы это свойство имело простой “механический” в случаях классической механики смысл. Одна из возможностей, активно разрабатываемая в последние два десятилетия, основана на следующем наблюдении. Уравнения Ньютона задают взаимно однозначное соответствие между начальным и конечным положением динамической системы. Разностные схемы, аппроксимирующие уравнения Ньютона, задают соответствие между начальным и конечным положением системы, которое описывается при помощи алгебраических уравнений. Такое соответствие будет взаимно-однозначным только в том случае, если оно будет бирациональным. По этой причине конструирование и исследование разностных схем, задающих бирациональное соответствие между слоями, является актуальной задачей. Такие разностные схемы будем вслед за [1] называть обратимыми.

Степень разработанности темы. Дискретные динамические системы, в которых шаг описывается бирациональным преобразованием, рассматривались заметно ранее А.П. Веселовым в 1989 г. [2], частные примеры — Хеноном и Мозером. При этом А.П. Веселов отметил возможность

получения таких дискретных моделей из непрерывных, однако, ограничил рассмотрение полиномиальными преобразованиями Кремоны.

Если расширить класс рассматриваемых преобразований Кремоны до неполиномиальных, то всякую динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

или, для краткости,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

с квадратичной правой частью можно аппроксимировать разностной схемой, задающей бирациональное соответствие между положениями системы в момент времени t и положением при $t + \Delta t$. Если обозначить первое положение просто как $\mathbf{x}$, а второе — как $\hat{\mathbf{x}}$, то эту схему можно записать в виде

$$\hat{x}_i - x_i = F_i \Delta t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где F_i — линейные функции $\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{x}}$. В этом случае система уравнений (2) является линейной как относительно $\mathbf{x}$, так и относительно $\hat{\mathbf{x}}$ и поэтому $\mathbf{x}$ можно выразить рационально через $\hat{\mathbf{x}}$ и наоборот.

Описанные выше способ аппроксимации динамической системы (1) с квадратичной правой частью вошел в употребление в середине прошлого века в работах, связанных с солитонами. После доклада, сделанного Уильямом Каганом в 1993 г., эта разностная схема получила одно из своих имен — метод Кагана. Вскоре она была применена к классическим динамическим системам: системе Вольтерры-Лотки [3], к квадратичной гамильтоновой системе [4; 5] и уравнениям движения гироскопа для двух классических случаев — Эйлера-Пуансо [6–8] и Лагранжа-Эйлера [9]. Впервые то обстоятельство, что разностная схема Кагана задает бирациональное соответствие было отмечено Ю.Б. Сурисом [7].

В центре внимания этих исследований было наследование разностной схемой Кагана алгебраических интегралов движения исходной динамической системы. Для гамильтоновых систем в [4] получены явные выражения для симплектической структуры и модифицированного гамильтониана, точно сохраняющихся на схеме Кагана. Для гироскопа модифицированные выражения для квадратичных интегралов были указаны в работах Хироты и Кимуры [6; 9], метод их получения был восстановлен в [8] и представляет собой разностный аналог метода Лагутинского [10].

Среди динамических систем с квадратичной правой частью выделяется один класс — осцилляторы, которые интегрируются в эллиптических функциях. С механической точки зрения этот класс можно описать как класс моделей, описывающих движение маятника и волчка, в т.ч. несимметричного, закрепленного в своем центре тяжести. Этому же классу

принадлежат гамильтоновы системы с одной степенью свободы и кубическим гамильтонианом, рассмотренные в недавних работах Ю.Б. Суриса [5]. Этот класс был тщательно исследован методами теории аналитических функций в XIX веке. Траектории этих систем являются эллиптическими кривыми, а общее решение сужается на такой кривой до бирационального соответствия между начальными и конечными данными. Это наблюдение Пенлеве положил в основу своей теории классических трансцендентных функций [11; 12].

Схема Кагана позволяет аппроксимировать уравнения эллиптического осциллятора разностной схемой, задающей преобразование Кремоны всего пространства, а не интегральной кривой. При этом бирациональные преобразования эллиптической кривой, вообще говоря, не обязаны продолжаться до преобразования Кремоны пространства, объемлющего эту кривую. Это возвращает нас к давнему заочному спору, состоявшемуся на рубеже XIX и XX веков между Эрмитом и Клейном на страницах их книг по теории алгебраических функций и истории математики. В полном соответствии с мыслью, высказанной Эрмитом и порицаемой Клейном, теорию эллиптических функций можно рассматривать как частный случай теории преобразований Кремоны, однако для этого необходимо провести дискретизацию дифференциальных уравнений по схеме Кагана, во времена Клейна и Эрмита совершенно неизвестной.

Нет никаких сомнений в том, что свойства схемы Кагана для эллиптических осцилляторов столь же богаты, как и свойства эллиптических функций. Их исследование сулит с одной стороны построение дискретной теории эллиптических функций как раздела теории преобразований Кремоны (идея Эрмита), а с другой должно пролить свет на связь между свойствами дискретной и непрерывной моделей и уточнить понятие наследования и подражания. Отсюда вытекает цель настоящей работы.

Целью данной работы — исследование алгебраических свойств обратимых разностных схем, аппроксимирующих эллиптические осцилляторы, методами компьютерной алгебры.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

- Реализовать метод составления обратимой разностной схемы, аппроксимирующей динамическую систему с квадратичной правой частью, в виде процедуры в системе компьютерной алгебры.
- Реализовать метод вычисления приближенных решений по обратимой схеме в виде процедуры в системе компьютерной алгебры.
- Разработать алгебраические методы исследования траекторий в фазовом пространстве, полученным по обратимым схемам, реализовать их в виде комплекса программ для системы компьютерной алгебры.

- Исследовать различия непрерывной модели эллиптического осциллятора и её дискретного аналога, записанного в виде обратимой разностной схемы.
- Интегрировать созданные инструменты в пакет `fdm for sage` (<https://github.com/malykhmd/fdm>).

Научная новизна:

1. Метод конструирования обратимой разностной схемы описан Каганом, его реализация в виде компьютерной программы в системе компьютерной алгебры сделана впервые.
2. На основе метода Лагутинского впервые разработан и реализован в системе компьютерной алгебры Sage метод исследования алгебраических траекторий приближенных решений.
3. Выполнено оригинальное исследование обратимых схем для осциллятора Якоби и задачи о вращении волчка в случае Эйлера-Пуансо.

Теоретическая и практическая значимость Разрабатываемые численно-аналитические методы найдут применение в теоретических исследованиях динамических систем, богатых законами сохранения и особенно при исследовании разного рода осцилляторов. Результаты диссертации могут быть использованы при создании учебных курсов по теме «Дифференциальные уравнения» и «Компьютерная алгебра».

Методология и методы исследования. Символьные и численные вычисления выполнялись в системе компьютерной алгебры Sage, созданные в рамках диссертационного исследования инструменты были интегрированы в пакет `fdm for sage`. Для исследования алгебраических свойств обратимых разностных схем использовалась теория алгебраических интегралов, разработанная Лагутинским, теория преобразований Кремоны и классическая теория эллиптических интегралов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны и реализованы в системе компьютерной алгебры Sage инструменты для исследования динамических систем с квадратичной правой частью по обратимым схемам.
2. Разработаны и реализованы в системе компьютерной алгебры Sage инструменты для исследования алгебраических свойств обратимых разностных схем.
3. Для эллиптических осцилляторов, в т.ч. волчка, закрепленного в своем центре тяжести, доказано, что дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью:
 - а) точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную кривую,
 - б) разностная схема допускает представление при помощи квадратуры,

- в) приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента.

Достоверность Обоснованность результатов диссертации опирается на теоретические исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в рецензируемых журналах. Везде, где это возможно, проводилось сравнения полученного численного решения с аналитическими решениями. Результаты находятся в соответствии с результатами, которые можно получить аналитически.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях РСА'2023 и РСА'2024, ПОМИ, Санкт-Петербург, и ИТТММ'24, РУДН, Москва, а также на научных семинарах: по вычислительной и прикладной математике ЛИТ ОИЯИ (Дубна, 2022 г.), научном семинаре каф. Прикладной математики МИФИ под рук. проф. Н.А. Кудряшова (Москва, декабрь 2023 г.), секции по математическому моделированию Объединённого научного семинара Института компьютерных наук и телекоммуникаций под рук. проф. Л.А. Севастьянова (Москва, сентябрь 2023 г.) и семинара по нелинейной теории дифференциальных уравнений Математического института РУДН под рук. проф. А.Е. Шишкова (Москва, апрель 2024 г.).

Личный вклад. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, доказал ряд теорем о свойствах обратимых разностных схем, самостоятельно разработал и реализовал ряд основных функций пакета `fdm` for `sage`, провел серию экспериментов в `Sage`.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях [A1–A5], изданных в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus/WoS, а также 3 тезиса докладов на международных конференциях [A6–A8].

Содержание работы

Диссертация посвящена исследованию обратимых разностных схем, аппроксимирующих динамические системы (1) с квадратичной правой частью. Во **Введении** обоснована актуальность темы, оценена разработанность темы, сформулирована цель и задачи диссертационного исследования.

В первом разделе **первой главы** перечислены наиболее типичные явления, которые описываются динамическими системами с квадратичной правой частью, в том числе вращение несимметричного волчка и задачи популяционной динамики, описываемые уравнениями Вольтерры-Лотки. Отмечена широта рассматриваемого класса, к которому можно свести динамические системы с полиномиальной правой частью благодаря процедуре квадратизации. Затем дан краткий обзор общих

принципов проектирования разностных схем для динамических систем. Показано, что наследование и даже сохранение интегралов движения не влечет за собой наследование других алгебраических свойств непрерывной модели и приводит для нелинейных динамических систем к проблеме лишних корней.

Проблема лишних корней имеет простой механический смысл: в механических системах между начальным и конечным положениями системы должно быть взаимно-однозначное соответствие. При дискретизации это соотношение должно стать алгебраическим. Поэтому можно ожидать, что всякая разностная схема задает взаимно-однозначное алгебраическое, то есть бирациональное соответствие между положениями систем в момент времени t и $t + \Delta t$. Однако, стандартные разностные схемы, например, принадлежащие семейству явных схем Рунге-Кутты, этим свойством не обладают: значению $\hat{\mathbf{x}}$ отвечает несколько значений $\mathbf{x}$, часть которых стремится к бесконечности при $\Delta t \rightarrow 0$ (лишние корни). Разностные схемы, задающие преобразование Кремоны между слоями по времени, вслед за работами М.Д. Малых предложено называть *обратимыми*.

В последнем разделе первой главы показано, как аппроксимировать динамическую систему (1) с квадратичной правой частью обратимой разностной схемой (2). Идея состоит в том, что квадратичные функции $\mathbf{x}$, стоящие в правой части исходной динамической системы, заменяются на билинейные функции $\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{x}}$. В результате чего система (2) оказывается линейной, как относительно $\mathbf{x}$, так и $\hat{\mathbf{x}}$ и поэтому она задает бирациональное соответствие между положениями $\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathfrak{R}(\mathbf{x}).$$

Сами эти положения рассматриваются в диссертации как точки проективного пространства $\mathbb{P}_n$.

Под приближенным решением задачи Коши для динамической системы (1) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ понимается последовательность точек $\{\mathbf{x}_m\}$ проективного пространства $\mathbb{P}^n$, найденных рекуррентно для $m = 1, 2, \dots$ по формулам

$$\mathbf{x}_m = \mathfrak{R}(\mathbf{x}_{m-1}, \Delta t)$$

и для $m = -1, -2, \dots$ по формулам

$$\mathbf{x}_m = \mathfrak{R}(\mathbf{x}_{m+1}, -\Delta t).$$

Величина $\mathbf{x}_m$ интерпретируется как приближенное значение решения задачи Коши при $t = m\Delta t$. Если в процессе вычисления на m -том шаге получается неопределенность, точка $m\Delta t$ считается особой.

Дан обзор статей, в которых рассматривался этот способ дискретизации. Отмечено, что есть несколько линий работ. Первая линия восходит

к докладу Уильяма Кагана, вторая — к работам Хироты и Кимуры, третья непосредственно примыкает к работам Пенлеве по интегрированию к классическим трансцендентным функциям. Этим объяснено различие в терминологии: одни авторы говорят о методе Кагана, другие — о методе Хироты и Кимуры, третьи — об обратимых разностных схемах.

Показано, что к настоящему моменту изучены свойства 1.) обратимых схем для гамильтоновых систем с одной степенью свободы и кубическим гамильтонианом и 2.) гироскопа в случае Эйлера-Пуансо. Полученные к настоящему моменту результаты позволяют думать, что дискретизация эллиптических осцилляторов по методу Кагана позволяет построить дискретную теорию, подражающую всем или почти всем свойствам непрерывной системы. В частности это означает, что можно построить теорию эллиптических функций на основе преобразований Кремоны. Эта мысль была высказана еще в XIX веке Эрмитом, но против нее обосновано возражал Ф. Клейн: бирациональные преобразования на эллиптической кривой не продолжаются до бирациональных преобразований пространства, содержащего эту кривую, то есть до преобразования Кремоны. Поэтому для дальнейшего развития теории обратимых разностных схем необходимо исследовать алгебраические свойства схемы Кагана, аппроксимирующей эллиптические осцилляторы. Это и стало целью настоящего диссертационного исследования.

Во **второй главе** представлено программное обеспечение, разработанное в рамках диссертационного исследования для проведения компьютерных экспериментов с обратимыми разностными схемами. Это программное обеспечение было реализовано в системе компьютерной алгебры Sage.

Sage — свободное программное обеспечение, распространяемое с 2005 г. под лицензией GNU GPL, и представляет собой одну из немногих альтернатив коммерческим системам компьютерной алгебры, таким как Maple и Mathematica. Эта система включает в себя в качестве модулей практически все свободные разработки в области компьютерной алгебры, постоянно дополняется. Немаловажно и то, что языком интерфейса служит python, а не специально разработанный для этого язык, как это сделано в Maple и Mathematica. Это обстоятельство существенно ускоряет и упрощает программирование в Sage, а также делает разработанный код доступным и понятным широкому кругу пользователей.

С целью использования элементов компьютерной алгебры и численных методов в одной системе в рамках диссертационного исследования Али Баддура (РУДН, 2023) была начата разработка пакета для численно-аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений — `fdm for sage`. Этот пакет распространяется под свободной лицензией GPL 3.0, актуальный архив размещен на <https://github.com/malykhmd/fdm>.

Во второй главе настоящей диссертации описаны функции, добавленные в этот пакет для работы с обратимыми схемами, и представлены результаты компьютерных экспериментов с классическими осцилляторами, как интегрируемыми в эллиптических функциях (осцилляторы Якоби и Вейерштрасса), так и неинтегрируемых в них (система Вольтерры-Лотки).

Третья и четвертая главы посвящены отысканию алгебраических интегралов обратимых разностных схем.

Третья глава носит вспомогательный характер и содержит оригинальное изложение теории М.Н. Лагутинского, которое отличается от предложенного ранее в рамках диссертационного исследования Юй Ин (РУДН, 2020) систематическим использованием линейных семейств. В диссертации метод Лагутинского изложен как способ, позволяющей за конечное число действий выяснить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей, принадлежащей заданной линейной системе.

Напомним, что множество всех гиперповерхностей вида

$$\sum_{i=0}^m a_i g_i(\mathbf{r}) = 0, \quad (3)$$

где $g_0, \dots, g_m$ — линейно независимые многочлены из $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $a_0, \dots, a_m$ — числовые параметры из $\mathbb{C}$, среди которых хотя бы один отличен от нуля, называют линейной системой размерности m , линейная система размерности 1 называется пучком, линейная система размерности 2 называется сетью. Чтобы выяснить, всякая ли интегральная кривая лежит на одной из гиперповерхностей линейной системы, следует выяснить, равен ли нулю определитель Лагутинского

$$\det \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_m \\ Dg_0 & \dots & Dg_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^m g_0 & \dots & D^m g_m \end{pmatrix} \quad (4)$$

этой линейной системы. Здесь

$$D = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если линейная система не является вырожденной, то в ней имеется единственная гиперповерхность, на которой лежит интегральная кривая динамической системы, проходящая через заданную точку $\mathbf{r}_0$ общего положения в $\mathbb{C}^n$. Эта гиперповерхность описывается уравнением

$$h(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = 0.$$

Тогда динамическая система имеет рациональный интеграл

$$\frac{h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)} = C,$$

иными словами, интегральные кривые динамической системы лежат на интегральных гиперповерхностях линейного пучка

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - Ch(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = 0.$$

В двумерном случае этот пучок вложен в заданную линейную систему, однако уже в трехмерном случае это, вообще говоря, не так. Случай вырожденной линейной системы может быть сведен к невырожденному.

В четвертой главе на пути обобщения метода Лагутинского, предложены необходимые и достаточные критерии того, что точки траектории, найденные по обратимым разностным схемам, лежат на гиперповерхности рассматриваемой линейной системы.

Пусть задана динамическая система вида (1), некоторая обратимая схема ее решения и положительный шаг Δt . Пусть задана линейная система вида (3). В рамках диссертационного исследования были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если для любой приближенной траектории $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ системы (1) определитель Кремены

$$\det(g_i(\mathbf{x}_j)) = 0 \quad (i, j = 0, 1, \dots, m), \quad (5)$$

для линейной системы (3) равен нулю, то всякая приближенная траектория лежит на гиперповерхности системы (3).

Теорема 2. Если для любой приближенной траектории $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ системы (1) и любого положительного шага Δt определитель Кремены (5) для линейной системы (3) равен нулю, то система (1) допускает рациональный интеграл, числитель и знаменатель которого можно представить как линейную комбинацию $g_0, \dots, g_m$, их произведений и частных производных.

Теорема 1 позволяет без особых затрат найти выражения для двух интегралов обратимой схемы для осциллятора Якоби. Если же размерность линейной системы велика, то вычисление определителя Кремены как рациональной функции начальных данных становится слишком трудоемкой операцией. Однако, можно предположить, что траектории лежат на гиперповерхностях некоторого линейного пучка, принадлежащего рассматриваемой линейной системы. Вычисляя несколько определителей второго порядка, можно найти явно этот пучок, а затем обосновать гипотезу применением теоремы 1 к известному пучку, то есть вычислением определителя 2-го порядка. Таким путем найден интеграл осциллятора Вейерштрасса.

В обоих случаях получается, что точки приближенного решения, найденного по обратимой схеме, лежат на некоторой эллиптической кривой. Это открывает путь для дальнейшего исследования эллиптических осцилляторов в гл. 5 и 6.

Не следует, однако, думать, что всякий раз, как точки приближенной траектории выстраиваются в линию, эта линия является алгебраической. Теорема 2 позволяет доказать, что точки приближенного решения системы Вольтерры-Лотки, которые выстраиваются в некоторую линию, не лежат на алгебраической кривой.

В пятой главе рассматриваются обратимые разностные схемы для эллиптических осцилляторов.

Под эллиптическим осциллятором понимается динамическая система (1) с квадратичной правой частью, интегральные многообразия которой являются линиями рода $p = 1$, то есть эллиптическими кривыми. Такая динамическая система интегрируется в классических трансцендентных функциях, когда

$$\frac{dx_1}{f_1}$$

является абелевым дифференциалом первого типа на интегральных кривых. При этом квадратура

$$\int \frac{dx_1}{f_1} = t + c$$

обращается в эллиптических функциях, а x_i являются мероморфными двоякопериодическими функциями t .

На основе метода Лагутинского показано, что эллиптическим осциллятором соответствует тот случай, когда точки не только точных, но и приближенных решений ложатся на эллиптические кривые

$$h_1(\mathbf{r}, \Delta t) = c_1, \dots, h_{n-1}(\mathbf{r}, \Delta t) = c_{n-1}. \quad (6)$$

Эти кривые, конечно, зависят от шага дискретизации по времени Δt . Сужение преобразования Кремоны на интегральные кривые, задает бирациональное преобразование на эллиптической кривой. Это преобразование всегда описывается при помощи эллиптических интегралов 1-го типа. Это дает нам описание приближенного решения в виде квадратуры. В той же форме можно записать решение точного решения, но обычно его получают совершенно другим способом — разделением переменных.

Теорема 3. Если интегральная кривая (6) обратимой разностной схемы является эллиптической при малых $\Delta t \geq 0$, то саму разностную схему

можно описать следующим образом

$$\int_{\mathfrak{x}}^{\hat{\mathfrak{x}}} v(\mathfrak{x}, \Delta t, C_1, \dots, C_{n-1}) dx_1 = \Delta t, \quad (7)$$

где $vd x_1$ — абелев интеграл первого типа для этой кривой, который при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в $dx_1/f_1(\mathfrak{x})$.

Квадратура описывает один шаг в отыскании приближенного решения $\{\mathfrak{x}_m\}$ задачи Коши:

$$\int_{\mathfrak{x}_{m-1}}^{\mathfrak{x}_m} v(\mathfrak{x}, \Delta t) dx_1 = \Delta t.$$

Поскольку интеграл — функция аддитивная, мы можем выразить $\mathfrak{x}_m$ через $\mathfrak{x}_0$ при помощи квадратуры

$$\int_{\mathfrak{x}_0}^{\mathfrak{x}_m} v(\mathfrak{x}, \Delta t) dx_1 = m \Delta t. \quad (8)$$

Например, по методу Лагутинского (глава 4) можно найти, что точки приближенного решения для осциллятора Якоби

$$\dot{p} = qr, \quad \dot{q} = -pr, \quad \dot{r} = -k^2 pq, \quad (9)$$

ложатся на кривую V , заданную системой уравнений

$$p^2 + q^2 = c_1 \left(1 + \frac{k^2 \Delta t^2}{4} q^2 \right), \quad k^2 p^2 + r^2 = c_2 \left(1 + \frac{\Delta t^2}{4} r^2 \right). \quad (10)$$

Род этой кривой равен 1. Как учит теорема 3 на интегральной кривой (10) осциллятора Якоби обратимую схему можно записать в виде квадратуры

$$\int_p^{\hat{p}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = \Delta u, \quad (11)$$

где правая часть $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{r})$ не зависит от p и $\hat{p}$. Допустим, что мы нашли приближенное решение по обратимой схеме с некоторым шагом Δt . Тогда начальные данные определяют значения констант c_1 и c_2 , следовательно, и величину Δu . В силу теоремы 3

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = \Delta u,$$

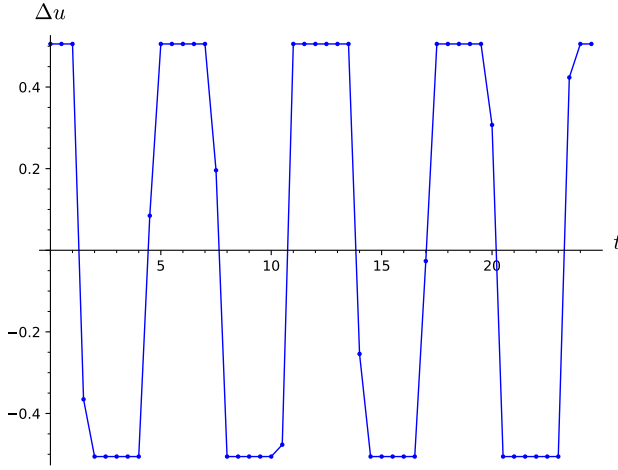


Рис. 1 — Изменение приращение квадратуры для осциллятора Якоби.

то есть квадратура, стоящая слева, остается постоянной на решении.

В диссертации это проиллюстрировано прямым вычислением. Пусть

$$k = \frac{1}{5}, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1,$$

начальное значение p возьмем равным нулю, а q и r определим из уравнений (10). Получающиеся при нарочито большом шага $\Delta t = 1/2$ значения квадратуры

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} \quad (12)$$

представлены на рис. 1. Разумеется, при построении графика мы использовали арифметическое значение корня, из-за чего величина Δu оказалась переменной. Почти все время она принимает одно из двух значений, а именно $\pm 0.5055731 \dots$. Перемена знака хорошо известна и в классической теории эллиптических функций и легко объясняется необходимостью правильно выбирать ветвь корня. Однако между участками постоянства Δu имеются точки, в которых значения квадратуры отличаются от этих двух значений. Аналога для этого эффекта в теории динамических систем нет: переход от одной ветви к другой там происходит «мгновенно».

Квадратурное описание (8) обратимой разностной схемы позволяет исследовать наследование приближенным решением важнейшего свойства точного решения осциллятора — его периодичность.

Для приближенных решений само понятие периодичности можно вводить по-разному. Прежде всего, в диссертации показано, как подобрать шаг

Δt так, чтобы решение представляло собой периодическую последовательность точек с заданным периодом.

Условимся говорить, что бесконечная последовательность $\{\mathfrak{x}_m\}$ является периодической, если существует такое число $M \in \mathbb{N}$, что

$$\mathfrak{x}_{m+M} = \mathfrak{x}_m. \quad (13)$$

Если приближенное решение задачи Коши является периодической последовательностью, то будем называть его периодическим, а число $M\Delta t$ — периодом этого приближенного решения.

Квадратурное представление разностной схемы (8) позволяет записать условие (13) в виде

$$N\omega(\Delta t) = M\Delta t, \quad (14)$$

где ω — положительный период абелева интеграла (7). При выполнении этого условия, всякое решение задачи Коши, лежащее на рассматриваемой интегральной кривой V , имеет период $T = M\Delta t$.

Для осциллятора Якоби в диссертации предложен способ, который позволяет вычислить величину шага Δt для заданных M и N . Если соединить точки приближенных решений ломаной, то при $N = 1$ и наименьшем положительном корне Δt уравнения определения шага, получается выпуклый M угольник, вписанный в эллипс (проекция кривой (10) на плоскость pq). На рис. 2 показаны случаи $M = 5$ и $M = 13$. При $N = 2$ и $N = 3$ тоже получается M угольник, точки которого соединены через 2 или 3 соответственно.

В конце 5-ой главы показано, что при любом выборе шага Δt приближенное решение можно представить как набор значений мероморфной двоякопериодической функции, вычисленной в точках $m\Delta u$. Таким образом, решение, найденное по схеме Кагана, наследует периодичность точного решения при любом выборе шага Δt .

Дискретная и непрерывная теории эллиптических осцилляторов описываются одними и теми же формулами: квадратура описывает переход от начальных данных к конечным, движение является периодическим, описывается мероморфными функциями и т.д. Вся разница состоит в том, что в дискретной теории шаг Δt подобран таким образом, что бирациональное преобразование, описывающее переход от старого положения системы к новому, продолжается до преобразования Кремоны. Таким образом, теория эллиптических функций выводится из куда более общей теории преобразований Кремоны, как это и предполагал Эрмит.

В шестой главе особо рассмотрен волчок в случае Эйлера-Пуансо как частный случай эллиптического осциллятора. Показано, что дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью:

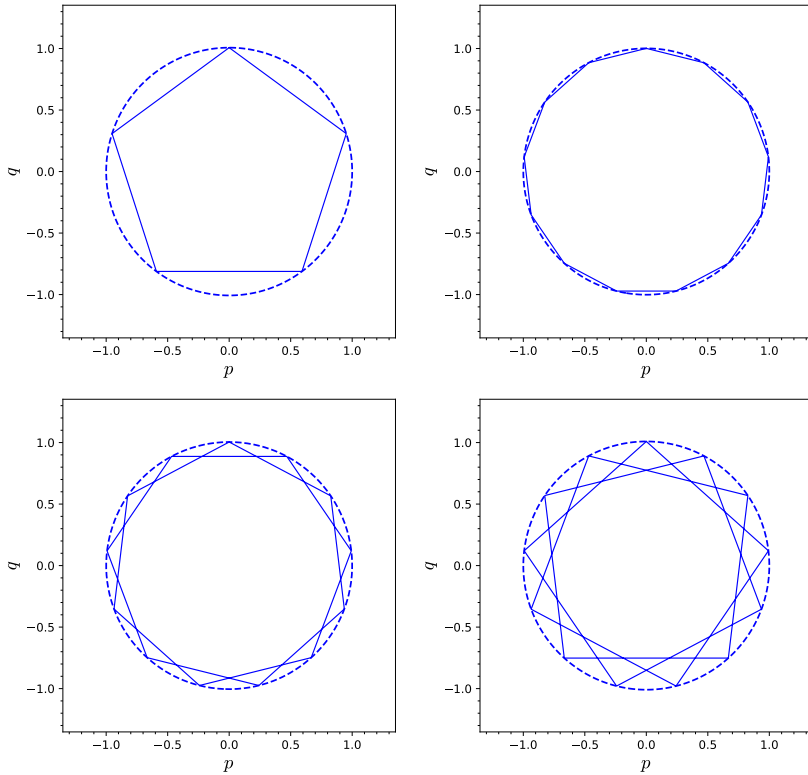


Рис. 2 — Периодические решения для осциллятора Якоби при $M = 5$ и $N = 1, M = 13$ и $N = 1, 2, 3$.

1. точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную кривую,
2. разностная схема допускает представление при помощи квадратуры,
3. приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента.

Все отличие сводится к тому, что место бирациональных преобразований на интегральной кривой занимают преобразования Кремоны всего трехмерного пространства скоростей. Вычислены аналитически явные выражения для интегралов и квадратур.

В **Заключении** приведены основные результаты работы.

Настоящее диссертационное исследование посвящено исследованию обратимых разностных схем, аппроксимирующих динамические системы, интегрируемые в эллиптических функциях.

В рамках настоящего диссертационного исследования были решены следующие задачи.

- Реализован метод составления обратимой разностной схемы, аппроксимирующей динамическую систему квадратичной правой частью, в виде процедуры в системе fdm for sage (<https://github.com/malykhmd/fdm>).
- Реализован метод вычисления приближенных решений по обратимой схеме, в виде процедуры в системе fdm for sage (<https://github.com/malykhmd/fdm>).
- На основе метода Лагутинского разработан метод исследования линии, вдоль которой выстраиваются точки приближенного решения в фазовом пространстве, метод реализован в системе Sage.
- Выполнено оригинальное сравнение непрерывной модели эллиптического осциллятора и ее дискретного аналога, записанного в виде обратимой разностной схемы.

В ходе исследования было показано, что для эллиптических осцилляторов, в т.ч. волчка, закрепленного в своем центре тяжести, дискретная теория в существенном повторяет непрерывную теорию:

1. точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную кривую,
2. разностная схема допускает представление при помощи квадратуры,
3. приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента,
4. шаг Δt можно подобрать так, чтобы приближенное решение представляло собой периодическую последовательность.

Главное отличие сводится к тому, что место бирациональных преобразований на интегральной кривой непрерывной модели занимают преобразования Кремены пространства, содержащего интегральные кривые.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

- A1. О траекториях динамических систем с квадратичной правой частью, вычисленных по обратимым разностным схемам [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2022. — Т. 517. — С. 17–35.
- A2. Обратимые разностные схемы для эллиптических осцилляторов [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2023. — Т. 528. — С. 54–78.

- A3. О траекториях динамических систем, лежащих на гиперповерхностях линейных систем [Текст] / Э. А. Айрян [и др.] // Письма в журнал Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2023. — Т. 20, № 2. — С. 200—208.
- A4. О реализации численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений в системах компьютерной алгебры [Текст] / А. Баддур [и др.] // Программирование. — 2023. — № 5. — С. 47—58.
- A5. Finite Difference Models of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side [Текст] / М. Malykh [и др.] // Mathematics. — 2024. — Т. 12, № 167.

В прочих изданиях

- A6. *Гамбарян, М. М.* Компьютерные эксперименты с обратимыми разностными схемами [Текст] / М. М. Гамбарян // Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2024 (ITTMM 2024). Book of Abstracts. — RUDN, 2024. — С. 57—58.
- A7. Reversible difference schemes for classical nonlinear oscillators [Текст] / М. Gambaryan [и др.] // International Conference Polynomial Computer Algebra '2023 / под ред. N. N. Vassiliev. — VVM Publishing, 2023. — С. 75—77.
- A8. *Gambaryan, M.* On computer experiments with reversible difference schemes in Sage [Текст] / М. Gambaryan, М. Malykh, L. Lapshenkova // International Conference Polynomial Computer Algebra '2024 / под ред. N. N. Vassiliev. — VVM Publishing, 2024. — С. 95—99.

Список литературы

1. *Баддур, А.* О периодических приближенных решениях динамических систем с квадратичной правой частью [Текст] / А. Баддур, М. Д. Мальных, Л. А. Севастьянов // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2021. — Т. 507. — С. 157—172.
2. *Веселов, А. П.* Группа Кремоны и динамические системы [Текст] / А. П. Веселов // Матем. заметки. — 1989. — Т. 45, № 3. — С. 118—120.
3. *Sanz-Serna, J. M.* An unconventional symplectic integrator of W. Kahan [Текст] / J. M. Sanz-Serna // Applied Numerical Mathematics. — 1994. — Vol. 16. — P. 245—250.
4. Geometric properties of Kahan's method [Текст] / E. Celledoni [et al.] // J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — Vol. 46. — P. 025201.

5. *Petrera, M.* Geometry of the Kahan discretizations of planar quadratic Hamiltonian systems [Текст] / M. Petrera, J. Smirin, Y. B. Suris // Proc. R. Soc. A. — 2019. — Vol. 475. — P. 20180761.
6. *Hirota, R.* Discretization of the Euler Top [Текст] / R. Hirota, K. Kimura // Journal of the Physical Society of Japan. — 2000. — Vol. 69, no. 3. — P. 627–630.
7. *Petrera, M.* On the Hamiltonian structure of Hirota-Kimura discretization of the Euler top [Текст] / M. Petrera, Y. B. Suris // Math. Nachr. — 2010. — Vol. 283, no. 11. — P. 1654–1663.
8. On the Construction of Elliptic Solutions of Integrable Birational Maps [Текст] / M. Petrera [et al.] // Experimental Mathematics. — 2017. — Vol. 26, no. 3. — P. 324–341.
9. *Hirota, R.* Discretization of the Lagrange Top [Текст] / R. Hirota, K. Kimura // Journal of the Physical Society of Japan. — 2000. — Vol. 69, no. 10. — P. 3193–3199.
10. *Добровольский, В. А.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871 – 1915) [Текст] / В. А. Добровольский, Ж.-М. Стрельцын, Н. В. Локоть // Историко-математические исследования. — 2001. — Т. 6. — С. 111–127. — in Russian.
11. *Umemura, H.* Birational automorphism groups and differential equations [Текст] / H. Umemura // Nagoya Math. J. — 1990. — Т. 119. — С. 1–80.
12. *Малых, М. Д.* О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде [Текст] / М. Д. Малых // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2015. — Т. 432. — С. 196–223.

Гамбарян Марк Микаелович

Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной
правой частью

Разработаны и реализованы в системе компьютерной алгебры Sage инструменты для исследования динамических систем с квадратичной правой частью по обратимым схемам. Для эллиптических осцилляторов, в т.ч. волчка, закрепленного в своем центре тяжести, доказано, что дискретная теория повторяет непрерывную теорию полностью: точки приближенного решения ложатся на некоторую эллиптическую кривую, которая при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интегральную кривую, разностная схема допускает представление при помощи квадратуры, приближенное решение можно представить при помощи эллиптической функции дискретного аргумента. Символьные и численные вычисления выполнялись в системе компьютерной алгебры Sage, созданные в рамках диссертационного исследования инструменты были интегрированы в пакет `fdm for sage`. Для исследования алгебраических свойств обратимых разностных схем использовалась теория алгебраических интегралов, разработанная Лагутингским, теория преобразований Кремоны и классическая теория эллиптических интегралов.

Gambaryan Mark

Reversible difference schemes for dynamical systems with quadratic
right-hand side

Sage tools for studying moving systems with quadratic right-hand side by reversible schemes have been developed and implemented in computer systems algebra. For elliptic oscillators, including a top fixed at its center of gravity, it has been proven that the episodic theory completely repeats the continuous chain: the solution approximation points lie on some elliptic curve at which $\Delta t \rightarrow 0$ is the transition to the integral curve, the difference scheme admits representation using quadrature, the approximate solution can be represented using an elliptic function of a composite argument. Symbolic and counting calculations are performed in the Sage computer algebra system; the tools created within the framework of the dissertation research have been integrated into the `fdm package for sage`. To study the algebraic properties of inverted difference schemes, the theory of algebraic integrals developed by Lagutingsky, the theory of Cremona transformations and the classical theory of elliptic integrals were used.

Гамбарян Марк Микаелович

Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____