Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Российский университет дружбы народов

На правах рукописи

Хамадех Альхалиль Нисрин

# Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса

Специальность 1.1.2.
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Гольдман Михаил Львович

Москва — 2022

## Оглавление

# Введение

**Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Данная диссертация посвящена изучению дифференциальных свойства сверток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда $G_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < n$. Теория классических потенциалов Бесселя является важным разделом общей теории пространств дифференцируемых функций дробной гладкости и ее приложений в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли [1], С. М. Никольского [2], В. Г. Мазьи [3]. Условия локализации средних Рисса спектрального разложения подробно изучены в работах V. A. Il'in, Sh. A. Alimov [4]. Условия локализации для более общих $\gamma$-средних спектральных разложений и разлагаемых функций из пространства обобщенной гладкости рассмотрены в работах M. L. Goldman, T. G. Ayele [5]. Вопросы локализация $\gamma$-средних спектрального разложения играют важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Свойства Бесселевых потенциалов подробно изложены в работе В. Г. Мазьи [3]. Развитию теории этих пространств и их приложениям посвящены исследования многих выдающихся специалистов в области математического анализа и теории уравнений в частных производных в нашей стране и за рубежом. Отметим здесь работы таких исследователей как С. Л. Соболев, С. М. Никольский, О. В. Бесов, В. И. Буренков, Л. Д. Кудрявцев, П. И. Лизоркин, Ю. Г. Решетняк, Л. Хермандер, И. Стейн, В. Г. Мазья, Х. Брезис и многие другие. В работах этих исследователей для пространств классических потенциалов построена полная теория вложения. Теория обобщенных бесселевых потенциалов и ее приложения развивались в работах М. Л. Гольдмана, Р. Кермана, Д. Хароске и др. [6—11].

**Цель** диссертационной работы состоит в исследовании дифференциальных свойств обобщенных потенциалов типа Бесселя.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. исследовать дифференциальные свойства обобщенных потенциалов Бесселя;
2. описать точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций
3. исследовать критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Привести конкретизацию этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. описать точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
5. оценить аппроксимативные числа оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
6. получить необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
7. получить условии локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

**Научная новизна.** В данной работе получены следующие новые результаты:

1. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций;
2. установлены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
3. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. получены оценки аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
5. даны необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
6. получены условия локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя по собственным функциям оператора Лапласа в случае базовых весовых пространств Лоренца.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты работы носят теоретический характер.

- установлены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;

– получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
– получены оценки аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
– даны необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
– получены условия локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя по собственным функциям оператора Лапласа в случае базовых весовых пространств Лоренца.

**Методология и методы исследования.** Исследования дифференциальных свойств потенциалов опираются на оценки модулей непрерывности сверток функций из весовых пространств Лоренца с ядрами потенциалов. Изучение вопросов локализации спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа для обобщенных потенциалов Бесселя опирается на оценки модулей непрерывности потенциалов во взаимосвязи их со свойствами функций, определяющих методы суммирования спектральных разложений.

**Основные положения, выносимые на защиту:** Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций.

2. Построены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.
3. Доказаны теоремы о точных по порядку оценках равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца.
4. Доказаны теоремы о оценке аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространстве ограниченных и равномерно непрерывных функций.
5. Доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$.
6. Получены условии локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

**Степень достоверности** результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на научном семинаре Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН и Южного математического института ВНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраева, к.ф.-м.н. М. А. Плиева; в Российском университете дружбы народов на научном семинаре под руководством профессоров А. В. Арутюнова, В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана, в МГУ им. М. В. Ломоносова на научном семинаре на механико-математическом факультете под руководством профессоров Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, на научном семинаре на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова. По результатам диссертации были сделаны доклады наа Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019–2020–2021); на Международной научной конференции (Ninth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”. Rostov-on-Don, 2018–2019); на 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Международной научной конференции «Interdisciplinary Research in Science, Engineering and Technology» (Bangalore, India, 2021); на Международн. ой научной конференции «Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVI» (Vladikavkaz, 2021).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 — в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 105 страниц. Список литературы содержит 70 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится краткий обзор наиболее важных публикаций, связанных с темой исследования, и анализ основных результатов диссертации.

**Глава 1. Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона в случае базовых весовых пространств Лоренца.**

**Параграф 1.1. *Общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами*.** (см. Определение 1.1.9 ниже).

В этом параграфе будут представлены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами. Через $(X,\Sigma,\mu)$ (кратко: $(X;\mu)$) обозначим пространство с σ-алгеброй и мерой, которую считаем неотрицательной и σ-конечной. Через $L = L(X;\mu)$ обозначим множество μ-измеримых функций, далее $L_0 = L_0(X;\mu)$ есть множество μ-измеримых конечных почти всюду функций, $L^+(X;\mu) = \{f \in L(X;\mu),\ f \geqslant 0\}$; $L_0^+(X;\mu) = L_0(X;\mu) \cap L^+(X;\mu)$.

**Определение 1.1.1.** *Отображение* $\rho\ :\ L^+ \to [0,\infty]$ *есть идеальная квазинорма (кратко: ИКН), если для всех* $f,\ g,\ f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$ *выполнены условия:*

*(p1)* $\rho(f) = 0 \ \Rightarrow\ f = 0,$ μ*–почти всюду (кратко:* μ*–п.в.);*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f),\ \alpha \geqslant 0$; $\rho(f+g) \leqslant C[\rho(f)+\rho(g)],\ f,g \in L^+$; $C \geqslant 1$ *(свойство квазинормы);*

*(p2)* $f \leqslant g$, (μ*–п.в.)* $\Rightarrow\ \rho(f) \leqslant \rho(g)$ *(монотонность нормы);*

*(p3)* $f_n \in L^+,\ f_n \uparrow f\ \Rightarrow\ \rho(f_n) \uparrow \rho(f)(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

*(p4)* $\rho(f) < \infty\ \Rightarrow\ f < \infty$ (μ*–п.в.).*

*(p5)* $0 < \mu(\sigma) < \infty \;\Rightarrow\; \rho(\chi_\sigma) < \infty.$

*Здесь* $f_n \uparrow f$ *означает, что* $f_n \leqslant f_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, *(*$\mu$*–п.в.).*

Понятие ИП шире понятия банахова функционального пространства (кратко: БФП) введенного Беннеттом и Шарпли [1], идеальное квазибанахово пространство со свойством Фату есть идеальная структура в терминологии книги Крейна–Петунина–Семенова [12].

Напомним определения функциональной нормы (кратко: ФН) и порожденного его банахова функционального пространства (кратко: БФП) (см. [1, Гл. 1]).

**Определение 1.1.2.** *Пусть* $\rho$ *есть ИКН множество* $x = x(f)$ *всех функций из* $L$*, для которых* $\rho(|f|) < \infty$*, называется идеальным пространством (кратко: ИП) порожденных ИКН* $\rho$*; при этом для* $f$ *полагаем* $\|f\|_x = \rho(|f|)$.

**Определение 1.1.3.** *Отображение* $\rho : L^+ \to [0,\infty]$ *есть ФН, если для всех* $f$, $g$, $f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$*, всех констант* $\alpha \geqslant 0$ *и всех* $\mu$*-измеримых подмножеств* $E \subset X$ *выполнены следующие условия:*

*(*$\hat{p}1$*)* $\rho(f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$, $\mu$*–п.в.;*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$*;* $\rho(f + g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$*;*

*(p2)* $0 \leqslant g \leqslant f$, $\mu$*–п.в.* $\Rightarrow\; \rho(g) \leqslant \rho(f)$ *(монотонность);*

*(p3)* $0 \leqslant f_n \uparrow f$ $\mu$*–п.в.* $\Rightarrow\; \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ $(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

*(*$\hat{p}4$*)* $\mu(E) < \infty \;\Rightarrow\; \int_E f\,d\mu \leqslant h_E\rho(f)$ *(локальная интегрируемость) для некоторой* $h_E \in \mathbb{R}$*, зависящей от* $E$ *и* $\rho$*, но не от* $f$*;*

*(*$\hat{p}5$*)* $\mu(E) < \infty \;\Rightarrow\; \rho(\chi_E) < \infty.$

**Замечание 1.1.1.** *Условие (*$\hat{p}1$*) является усилением условия (p1) из Определения 1.1.1, когда* $C = 1$*, то есть квазинорма превращается в норму.*

**Определение 1.1.4.** *Пусть* $\rho$ *есть ФН. Множество* $X = X(\rho)$ *всех функций из* $K$*, для которых* $\rho(|f|) < \infty$*, называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным ФН* $\rho$*; при этом для* $f$ *полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

*Обозначим для* $f \in L_0 \Rightarrow \lambda_f(y) = \mu\{x \in S : \ |f(x)| > y\}$, $y \in [0,\infty)$ *— Лебегова функция распределения. Через* $\dot{L}_0$ *обозначим множество функций* $f \in L_0$*:* $\lambda_f(y)$ *не тождественна* $\infty$.

*Для* $f \in \dot{L}_0$ *введем невозрастающую перестановку* $f^*$ *как правую обратную функцию к невозрастающей функции* $\lambda_f$*, т. е.*

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0,\infty) : \ \lambda_f(y) \leqslant t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty).$$

*Здесь* $f^* : \ \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ *— убывающая перестановка функции* $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, т. е.* $f^*$ *— неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на* $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$*, которая является равноизмеримой с* $f$*:*

$$\mu_n\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in \mathbb{R}_+ : \ |f^*(t)| > y\}, \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

*где* $\mu_n$ *—* $n$*-мерная мера Лебега.*

**Определение 1.1.5.** *БФП* $E = E(\mathbb{R}^n)$ *называется перестановочно инвариантным пространством (кратко: ПИП), если его норма монотонна относительно перестановок, т. е.*

$$f^*(t) \leqslant g^*(t), \quad \text{и} \quad g \in E \quad \Rightarrow \quad f \in E \quad \text{и} \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$, пространства Лоренца, Орлича [12, с. 145], [13, с. 7].

Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \{u = G * f : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1}$$

где $E$ — перестановочно инвариантное пространство, а ядро $G$ — специального вида

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\left\{\|f\|_E :\ f \in E(\mathbb{R}),\ G * f = u\right\}. \tag{2}$$

Здесь свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

(мы ввели здесь множитель $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для удобства при использовании преобразования Фурье).

Здесь мы существенно используем результаты работы [14], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Для ПИП $E \equiv E(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $E' \equiv E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП, в котором норма задается соотношением

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |fg|\,\mathrm{d}\mu_n :\ f \in E;\ \|f\|_E \leqslant 1 \right\}, \tag{5}$$

где $\mu_n$ — $n$-мерная мера Лебега, $\widetilde{E} \equiv \widetilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{E}' \equiv \widetilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга, т. е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\widetilde{E}'}, \tag{6}$$

где $f$, $g$ измеримые функции.

Здесь $f^* :\ \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ — убывающая перестановка функции $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, т. е. $f^*$ — неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, которая является равноизмеримой с $f$:

$$\mu_n\left\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > y\right\} = \mu_1\left\{t \in \mathbb{R}_+ :\ |f^*(t)| > y\right\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Ядро представления $G$ назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Для $R \in \mathbb{R}_+$ введем класс монотонных функций $\mathfrak{I}_n(R)$ следующим образом. Функция $\Phi : (0,R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{I}_n(R)$, если

1. $\Phi$ убывающая и непрерывная на $(0,R)$;
2. существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\Phi(\rho)r^n, \quad r \in (0,R). \tag{7}$$

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{I}_1(T), T = V_n R^n.$$

Здесь $V_n$ — объем $n$-мерного единичного шара.

Свойства ядер обсуждаются в определениях 1.1.6 – 1.1.8 ниже.

**Замечание 1.1.2.** *Пусть $A(x)$, $B(x)$ — положительные функции на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Мы пишем $A(x) \cong B(x)$, $x \in D$, если существует постоянная $c \geqslant 1$ такая, что $c^{-1} \leqslant \frac{A(x)}{B(x)} \leqslant c$, $\forall x \in D$.*

**Определение 1.1.6.** *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$. Считаем, что $G \in S_R(\Phi)$, если*

$$G(x) \cong \Phi(|x|), \quad x \in B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

**Определение 1.1.7.** *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$, $X(\mathbb{R}^n)$ — ПИП. Считаем, что $G \in S_R(\Phi; X)$, если*

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x);$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x), \tag{9}$$

*где $B_R^c$ дополнение к $B_R$,*

$$G_R^0(x) \cong \Phi(x), \quad x \in B_R, \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n).$$

**Определение 1.1.8.** *Потенциалы* $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ *называются обобщенными потенциалами Бесселя, если*

$$\Phi \in \mathfrak{J}_n(R), \quad G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int_{\mathbb{R}^n} G \, \mathrm{d}\mu_n \neq 0. \tag{10}$$

*А если* $\Phi \in \mathfrak{J}_n(\infty)$, *потенциалы* $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *называются обобщенными потенциалами Рисса, если* $G(x) \cong \Phi(|x|)$, $|x| \in \mathbb{R}_+$.

**Замечание 1.1.3.** *Отметим, что классические ядра Бесселя–МакДональда имеют вид*

$$G_\alpha(x) = c(\alpha,n)\rho^{-\gamma} K_\gamma(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n); \quad \gamma = \frac{n-\alpha}{2}, \tag{11}$$

*где* $K_\gamma$ *— функция МакДональда, см. [2]. Хорошо известные свойства этих ядер устанавливают, что*

$$\begin{aligned} &G_\alpha(x) \cong \Phi(|x|), && 0 < |x| < R; \quad \Phi(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in \mathfrak{J}_n(R); \\ &G_\alpha(x) \cong |x|^{-\gamma-\frac{1}{2}} e^{-|x|}, && |x| > R. \end{aligned} \tag{12}$$

**Определение 1.1.9.** *Пространством Лоренца* $\Lambda^p(v)$ *, где* $v > 0$ *— измеримая функция, называется пространство всех измеримых функций на* $\mathbb{R}^n$ *с конечными (квази) нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} = \begin{cases} \left( \int\limits_0^\infty f^*(t)^p v(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}; & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in (0,\infty)} \left\{ f^*(t) v(t) \right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{13}$$

## Параграф 1.2. *Точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций.*

**Определение 1.2.1.** *Пусть* $C(\mathbb{R}^n)$ *пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций с нормой* $\|u\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$.

*Модуль непрерывности для $u \in C(\mathbb{R}^n)$ в равномерной норме:*

$$\omega_C^k(u;\tau) = \sup\left\{ \left\|\Delta_h^k u\right\|_C \;:\; |h| \leqslant \tau \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

*Здесь $\Delta_h^k u(x)$ — $k$-я разность с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что для $u \in C(\mathbb{R}^n)$: $\omega_C^k(u;\tau) \to 0$, $(\tau \to +0)$.*

В наших результатах мы использовали Теорему 1.2.1 и Лемму 1.2.1.

**Теорема 1.2.1.** [15] *Пусть $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $G \neq 0$, $\varphi(\tau) = G^*(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, такова, что при некотором $T \in \mathbb{R}_+$*

$$\int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty. \tag{14}$$

*Тогда*

1. *Для свёртки*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

*справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c_0 \int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{16}$$

$$c_0 = 1 + \left(\int_T^\infty \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^T \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1}. \tag{17}$$

2. *Пусть, кроме того, $G \in C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $k \in \mathbb{N}$, для*

$$G_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \left| D^\alpha G(x) \right|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

*при $c_1 \in \mathbb{R}_+$ имеет место оценка*

$$|G_k(x)| \leqslant c_1 \Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{19}$$

*где*

$$0 \leqslant \beta_k(\tau) := \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_+, \tag{20}$$

*и выполнены соотношения*

$$\beta_k(\tau) \leqslant \tau^{-k\backslash n}\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,T], \tag{21}$$

$$\int\limits_T^\infty \beta_K(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty. \tag{22}$$

*Тогда свёртка u, определенная в* (15), *непрерывна на* $\mathbb{R}^n$ *и для* $t \in (0,T]$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 \int\limits_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\right]\varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{23}$$

*Здесь* $c_2 = c_1\tilde{c}d$, *где*

$$d = 1 + \frac{2}{T\beta_K(T)}\left(\int\limits_T^\infty \beta_K(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{24}$$

$c_1$ — *постоянная из условия* (19), $\tilde{c} = \tilde{c}(k,n) \in \mathbb{R}_+$. Далее рассмотрены некоторые более простые оценки модулей непрерывности при дополнительных ограничениях на ядра потенциалов.

**Лемма 1.2.1.** [15] *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int\limits_t^T \tau^{-\frac{k}{n}}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant B_0 t^{1-\frac{k}{n}}\varphi(t), \quad t \in (0,T], \tag{25}$$

*где* $B_0 \in \mathbb{R}_+$ *не зависит от* $t$.

*Кроме того, пусть выполнены условия Теоремы 1.2.1. Тогда*

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T], \tag{26}$$

*где* $c_3 = (1 + B_0)c_2$, $c_2$ — *постоянная из* (23).

**Теорема 1.2.2.** *Пусть* $1 < q < \infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ *и пусть* $v$, $\omega$ *веса, и* $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$, $V(s) = \int_0^s v(t)dt$, $\tilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$, *и пусть выполнены условия леммы 1.2.1 и, кроме того*

$$A_3 := \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} < \infty,$$

*тогда*

$$\left\| \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leqslant c_3 c \|f\|_{\Lambda^q(v)}, \tag{27}$$

$c_3$ — *постоянная из* (26). *Наилучшая постоянная* $c$ *в оценке* (27) *удовлетворяет условию* $c \approx A_3$.

*Здесь символ* $\approx$ *означает, что отношение левой и правой части находятся между положительными константами, зависящими только от* $p$ *(а не от* $v$ *или* $g$*).*

**Параграф 1.4. *Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.***

**Определение 1.4.1.** *Пусть* $X = X(0,T)$ *идеальное пространство (см. [1]) и* $k \in \mathbb{N}$. *Мы вводим пространство Кальдерона* $\Lambda^k(C; X)$, *так*

$$\Lambda^k(C; X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^n) : \ \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \in X(0,T) \right\}; \tag{28}$$

$$\|u\|_{\Lambda^k(C;X)} = \|u\|_C + \left\| \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \right\|_{X(0,T)}. \tag{29}$$

**Теорема 1.4.1.** *Пусть выполнены условия леммы 1.2.1, тогда при* $\tilde{E} = \Lambda^q(v)$, $X = L_q(\tilde{\omega})$ *имеет место критерий*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C; X) \ \Leftrightarrow \ A_3 < \infty,$$

*где*

$$A_3 := \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^q w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^{q'} \frac{\upsilon(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q'}}\right\}.$$

*Здесь* $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$, $\widetilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$.

Основные результаты первой главы опубликованы в работе [16] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В Главе 2 установлены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца. Затем применяется этот результат для оценки аппроксимативных чисел обобщенных потенциалов Бесселя, когда обобщенные потенциалы Бесселя построены по основному весовому пространству Лоренца. Доказана Теорема 2.2.1.

**Параграф 2.1.** ***Определения и предварительные сведения***.

Будем рассматривать случай, когда ассоциированное пространство $E(\mathbb{R}^n)$ является пространством Лоренца: $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\upsilon)$.

Пусть $\upsilon > 0$ — измеримая функция на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda^p(\upsilon)$ (Определение 1.1.9). Считаем, что

$$0 < V(t) := \int\limits_0^t \upsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left[\frac{V(2t)}{V(t)}\right] < \infty, \qquad (30)$$

так называемое $\Delta_2$-условие. В этих предположениях $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\upsilon)$ является (квази) банаховым пространством, которое дает важный пример перестановочно-инвариантного пространства (сокращенно ПИП) из-за свойства:

$$g^* \leqslant f^*, \quad f \in E(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g \in E(\mathbb{R}^n), \quad \|g\|_E \leqslant \|f\|_E,$$

(К. Беннетт и Р. Шарпли [1]). $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ является ассоциированным. $E'$ — это ПИП (5).)

При $1 < p < \infty$ описание ассоциированного пространства для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ было получено Э. Сойером [17]. А именно,

$$\|g\|_{E'} = \sup_{0 \leqslant h \downarrow} \frac{\int\limits_0^\infty g^*(\tau) h(\tau)\, d\tau}{\left(\int\limits_0^\infty h(\tau)^p v(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \approx$$

$$\approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\, d\tau\right)^{p'}\right) \frac{v(\xi)\, d\xi}{V(\xi)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (31)$$

**Замечание 2.1.1.** *Обратим внимание, что для* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$

$$E'(\mathbb{R}^n) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \exists T > 0 : \int\limits_0^T \frac{t^{p'} v(t)\, dt}{V(t)^{p'}} < \infty. \quad (32)$$

*Действительно, для* $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mu_n(D) = T$, *имеем* $g(x) = \chi_D(x) \in E'(\mathbb{R}^n)$, *поскольку* $g^*(\tau) = \chi_{(0,T)}(\tau)$ *и*

$$\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\, d\tau = \begin{cases} \xi, & 0 < \xi \leqslant T, \\ T, & \xi > T; \end{cases}$$

$$\left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \leqslant c_1 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\, d\tau\right)^{p'} \frac{v(\xi)\, d\xi}{V(\xi)^{p'}} =$$

$$= c_1 \int\limits_0^T \frac{\xi^{p'} v(\xi)\, d\xi}{V(\xi)^{p'}} + c_1 T^{p'} \int\limits_T^\infty \frac{v(\xi)\, d\xi}{V(\xi)^{p'}} < \infty,$$

*где*

$$\int\limits_T^\infty \frac{v(\xi)\, d\xi}{V(\xi)^{p'}} = \frac{V(\xi)^{1-p'}}{1-p'}\bigg|_{\xi=T}^\infty \leqslant \frac{V(T)^{1-p'}}{p'-1} < \infty.$$

*С другой стороны, если* $\exists g \in E'(\mathbb{R}^n)$, $g \neq 0$, *тогда существует* $c > 0$ *и* $T \in \mathbb{R}_+$ *такой, что* $g^*(\tau) \geqslant c$, $\tau \in (0,T)$. *Тогда*

$$\infty > \left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \geqslant c_2 \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^{\xi} g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{\upsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} \geqslant c_2 c^{p'} \int\limits_0^T \frac{\xi^{p'}\upsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}.$$

Всюду в этой главе мы предполагаем, что выполнено условие (32).

**Параграф 2.2.** ***Доказательство результатов об оценке равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца.***

**Теорема 2.2.1.** *Пусть* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\upsilon)$ — *пространство Лоренца, см.* (13), (5), (30) – (32) *и* $H^G_E(\mathbb{R}^n)$ *пространство обобщенных бесселевых потенциалов, см.* (1);

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \tau \in (0,T); \quad T = V_n R^n;$$

$$\varphi(\tau) = G^*(\tau); \quad \tau > T. \tag{33}$$

*Кроме того, мы предполагаем, что верна оценка* (25), *ядро* $G$ *удовлетворяет предположениям Теоремы 1.2.1 и*

$$\sup_{t\in(0,T]} \left\{ \frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}} \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\} < \infty, \quad 0 < p \leqslant 1; \tag{34}$$

$$\left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{\upsilon(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad 1 < p < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{35}$$

*Тогда верны следующие утверждения:*

*1.* $u \in C(\mathbb{R}^n)$;

*2. Если* $0 < p \leqslant 1$, *то существует* $c_3 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что при* $0 < t < T$

$$\omega^k_C\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 A_p(t) \|u\|_{H^G_{\Lambda^p(\upsilon)}}, \tag{36}$$

*где*

$$A_p(t) = \sup_{\xi\in(0,t)} \left\{ \frac{1}{V(\xi)^{\frac{1}{p}}} \int\limits_0^{\xi} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\}. \tag{37}$$

3. *Если* $1 < p < \infty$, *то существует* $c_4 \in \mathbb{R}_+$ *такое, что при* $0 < t \leqslant T$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_4 D_p(t) \|u\|_{H^G_{\Lambda^p(v)}}, \tag{38}$$

*где*

$$D_p(t) = \left[ \int\limits_0^t \left( \int\limits_0^{\xi} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^{p'} \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} + \left( \int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^{p'} V(t)^{-\frac{p'}{p}} \right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{39}$$

**Параграф 2.3.** ***Доказаны теоремы об оценке аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных функций***.

**Определение 2.3.1.** [18] *Для (квази)нормированного функционального пространства* $X$ *на* $\mathbb{R}^n$, *с* $X \hookrightarrow C$, *его оболочкой модулей непрерывности* $\xi_C^X : (0,\infty) \to (0,\infty]$ *назовем функцию*

$$\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega(f,t)}{t}, \quad t > 0, \tag{40}$$

*где* $\omega(f,t) = \sup\limits_{|h|\leqslant t} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |(f+h) - f(x)|$, $t > 0$.

**Определение 2.3.2.** [18] *Мы также можем определить мажорантную функцию*

$$e^X(t) = t\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \omega(f,t), \quad t \geqslant 0, \tag{41}$$

*неотрицательная, монотонно возрастающая функция. Кроме того, можно также рассмотреть оболочку модулей гладкости, адаптированную к модулям гладкости более высокого порядка,*

$$\xi_{C,k}^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega_C^k(f,t)}{t^k} = t^{-k} e_k^X(t), \quad t \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{42}$$

В частности, мы обозначаем $\xi^X_{C,1} = \xi^X_C$. Мы хотим сосредоточиться на связи между оболочками непрерывности и аппроксимативными числами компактных вложений. Напомним вкратце это понятие.

**Определение 2.3.3.** [18] *Пусть $A_1$, $A_2$ — два банаховых пространства и пусть $T \in L(A_1, A_2)$ — линейный и непрерывный оператор из $A_1$ в $A_2$. Аппроксимативные числа оператора $T$ определяются выражением:*

$$a_m = \inf\Big\{ \|T - S\| \ :\ S \in L(A_1, A_2),\ \operatorname{rank} S < m \Big\}. \tag{43}$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ некоторая ограниченная область, $X$ — некоторое функциональное пространство на $\mathbb{R}^n$, а $X(\Omega)$ — сужение $X(\mathbb{R}^n)$ на $\Omega$. Предположим, что $X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$. Тогда существует $c > 0$ такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$, см. [18; 19]

$$a_{m+1}\Big(id\ :\ X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c m^{-\frac{1}{n}} \xi^X_{C,k}\Big(m^{-\frac{1}{n}}\Big). \tag{44}$$

**Теорема 2.3.1.** *Пусть $E = \Lambda^p(v)$ — пространство Лоренца и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая ограниченная область. Здесь мы сохраняем введенные выше обозначения и предполагаем, что выполнены условия Теоремы 2.2.1. Тогда, есть следующие оценки.*

1. *Если $0 < p \leqslant 1$, то существует $c_0 \in \mathbb{R}_+$ такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id\ :\ H^G_E(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_0 A_p\Big(m^{-1}\Big); \tag{45}$$

2. *Если $1 < p < \infty$, то существует $c_1 \in \mathbb{R}_+$ такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id\ :\ H^G_E(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_1 D_p\Big(m^{-1}\Big). \tag{46}$$

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [20; 21] из списка публикаций автора по теме диссертации.

В Главе 3 установлены условия локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

В третьей главе исследуются свойства спектральных разложений обобщенных потенциалов Бесселя–Рисса в ряды по собственным функциям оператора Лапласа в произвольных областях многомерного евклидова пространства. Установлен критерий квадратичной суммируемости потенциалов, который необходим для построения разложений. Исследованы условия локализации спектральных разложений. Их выполнение основано на оценках, связывающих установленные ранее свойства равномерных модулей непрерывности потенциалов с функциональными характеристиками метода суммирования спектральных разложений. Рассмотренный метод суммирования существенно обобщает классический метод средних Рисса.

**Параграф 3.1.** ***Обоснование свойств локализации***.

Пусть $\mathbb{R}^n$ мерное евклидово пространство и при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}; & 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{|f(x)|\right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{47}$$

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, $(-\hat{\Delta})$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа в $n$-мерной области $F$, $y(x,t)$ — упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(F)$ относительно $(-\hat{\Delta})$, $\mathrm{d}\rho(t)$ — соответствующая спектральная мера, а $\left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^{m}$ — система собственных функций. Таким образом, при любом фиксированном $t \geqslant 0$,

$$y_i(x,t) \in C^\infty(F) \cap L_2(F), \quad \Delta y_i(x,t) + t^2 y_i(x,t) = 0, \quad x \in F. \tag{48}$$

Здесь $m \leqslant \infty$ — кратность представления. Для каждого $u \in L_2(F)$ определены преобразования Фурье

$$\hat{u} := \left\{\hat{u}_i(t)\right\}_{i=1}^m, \hat{u}_i(t) = \int_F u(x) y_i(x,t)\, \mathrm{d}x,$$

и спектральное разложение по системе $y(x,t) := \left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^m$

$$S_\mu(u,x) = \int_0^\mu \hat{u}(t) y(x,t)\, \mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{49}$$

$$\hat{u} y = \sum_{i=1}^m \hat{u}_i y_i.$$

Пусть $s > 0$ и $\psi$ — функция на $(0,1]$ со свойствами: $0 < \psi \downarrow$ при $(0,1]$ и $\psi(t) \cong \psi(\tau)$, если $t \cong \tau$. Кроме того, для $s > 0$ положим $s_0 = s$ если $s \leqslant 1$; $s_0 = 1$, если $s > 1$ и потребуем, чтобы

1. $$\psi_{s_0}(t) = \int_0^t \tau^{s_0 - 1} \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in (0,1]; \tag{50}$$

2. $$\psi \in C^2(0,1); \quad \left|\psi'(\tau)\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-1}, \quad \left|\psi(\tau)''\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-2}; \quad \tau \in (0,1], \tag{51}$$

3. $$\int_0^1 (1-\tau)^{s-1} \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \Gamma(s). \tag{52}$$

Определим $\gamma$ как $s$-й интеграл Римана–Лиувилля.

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^t (t-\tau)^{s-1} \psi(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,1]. \tag{53}$$

Введем $\gamma$-средние спектрального разложения как

$$\sigma_\mu^\gamma(u,x) = \int_0^\mu \hat{u}(t) y(x,t) \gamma\left(1 - \frac{t^2}{\mu^2}\right) \mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{54}$$

для $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$. Мы видим, что $\gamma(1) = 1$ и если $\psi(\tau) \equiv \Gamma(s+1)$, $\tau \in (0,1]$, $\gamma(t) = t^s$, то $\gamma$-средние сводятся к классическим средним Рисса порядка $s$, см. [4] и [5].

Мы определяем

$$\omega_0(t) = \frac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_{s_0}(t)}, \quad t \in (0,1].$$

Пусть $\alpha$, $\beta \geqslant 0$ такие, что

$$\frac{n-2}{2} - s < \alpha \leqslant \beta < \min\left\{\alpha + \frac{3}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\}.$$

Пусть функция $\omega$ удовлетворяет условиям

$$\omega \in C[0,1], \quad \omega(t)t^{-\alpha} \uparrow, \quad \omega(t)t^{-\beta} \downarrow \text{ на } (0,1],$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\omega(t)}{\omega_0(t)} = 0.$$

**Параграф 3.2.** ***Необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство*** $L_2(\mathbb{R}^n)$.

**Определение 3.2.1.** *Пусть* $k$, $n \in \mathbb{N}$; $R \in \mathbb{R}_+$. *Говорят, что функция* $\Phi$ *принадлежит классу* $\mathfrak{I}_{k,n}(R)$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $0 < \Phi \downarrow$ *on* $(0,R)$; $\exists\, c \in \mathbb{R}_+$ *такой, что*

$$\int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho \leqslant c\,\Phi(r)r^n, \quad r \in (0,R); \qquad \int_R^\infty \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho < \infty.$$

2. $G(x) := \Phi(|x|) \in C^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, *и для*

$$G_k(x) := \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha G(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},$$

*справедлива оценка: для некоторых* $c_1 \in \mathbb{R}_+$

$$|G_k(x)| \leqslant c_1\Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\};$$

*где* $\Psi_k \in C(\mathbb{R}_+)$, $T = V_n R^n$

$$\varphi_k(\tau) := \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \tau^{-k/n}\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,T];$$

$$\int_T^\infty \varphi_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty.$$

**Теорема 3.2.1.** *Пусть выполнены обозначения и предположения (1), (2), (13), и* $G(x) = \Phi(|x|) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(|x|) \in \mathfrak{I}_{k,n}(R)$, $V(\infty) = \infty$ *и более того*

$$B_p := sup\left[t^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{-1}{p}} \ : \ t \in \mathbb{R}_+\right] < \infty, \quad 0 < p \leqslant 2;$$

$$B_p := \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{2}} V(t)^{\frac{-1}{p}}\right]^s \frac{v(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)}\right)^{\frac{1}{s}} < \infty, \quad 2 < p < \infty, \quad s = \frac{2p}{p-2}.$$

*Тогда для* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ *имеется вложение пространства обобщенных бесселевых потенциалов*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n).$$

**Параграф 3.3.** ***Сформулируем результат об условиях локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца***.

Пусть $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщенных Бесселевых потенциалов с $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$. Мы полагаем, что справедливы обозначения и предположения Теоремы 2.2.1 и параграфа 2.2.

**Теорема 3.3.1.** *Пусть выполнены условия Теоремы 3.2.1 и пусть* $D$, $F$ — *области в* $\mathbb{R}^n$, *и* $D \subset\subset F$.

$$\lim_{t\to+0} \frac{A_p(t^n)}{\omega_0(t)} = 0; \quad \textit{при} \quad 0 < p \leqslant 1, \quad \lim_{t\to+0} \frac{D_p(t^n)}{\omega_0(t)} = 0; \quad \textit{при} \quad 1 < p < \infty,$$

*где* $\omega_0(t) = \dfrac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_0(t)}$, $t \in (0,1]$. *Кроме того, пусть*

$$u \in H_E^G(\mathbb{R}^n); \quad u(x) \equiv 0, \quad x \in D, \tag{55}$$

*тогда для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ выполняется соотношение:*

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma^{\gamma}_{\mu}(u,x) = 0. \tag{56}$$

**Пример 3.3.1.** *Для $\gamma$-средних Рисса порядков $s$, где $0 < s < (n-1)/2$, мы полагаем что $\psi(\tau) = c$, $c \in \mathbb{R}_+$, тогда $\psi_{s_0}(t) = ct^{s_0}$, и получаем, что $\omega_0(t) = \frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}$. Тогда принцип локализации принимает вид*

$$\lim_{t\to+0} \frac{A_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \text{\textit{при}} \quad 0 < p \leqslant 1,$$

*и*

$$\lim_{t\to+0} \frac{D_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \text{\textit{при}} \quad 1 < p < \infty,$$

$$u \in H^G_E(\mathbb{R}^n); \quad u(x) \equiv 0, \quad x \in D. \tag{57}$$

*Для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ выполняется соотношение:*

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma^{\gamma}_{\mu}(u,x) = 0. \tag{58}$$

**Замечание 3.3.1.** *Заметим, что функции $\Phi \in \mathfrak{I}_{k,n}(R)$ могут обладать свойством*

$$\Phi(\rho) = 0, \quad \rho \in [2R,\infty). \tag{59}$$

*Таким образом, случай ядер с компактным носителем включен в нашу схему.*

**Замечание 3.3.2.** *Заметим, что если ядро $G$ обобщенных бесселевых потенциалов имеет компактный носитель на $B_{2R} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2R\}$, см. условие (59), то для $u \in H^G_E(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u(x) = (G * f)(x) \equiv 0, \quad x \in D,$$

*если функция* $f \in E(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет условию*

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in D^{2R} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x,D) < 2R\right\},$$

*где*

$$\rho(x,D) = \inf\left\{|x-y| : y \in D\right\},$$

*расстояние от* $x$ *до* $D$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [22] из списка публикаций автора по теме диссертации.

**Степень достоверности** результатов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью приведенных доказательств, многочисленными выступлениями на семинарах, конференциях и школах, а также имеющимися публикациями в рецензируемых изданиях, которые индексируются международными базами данных.

**Апробация результатов**

Результаты, представленные в диссертационной работе, излагались на научном семинаре Северо-Кавказского центра математических исследований ВНЦ РАН и Южного математического института ВНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., проф. А. Г. Кусраева, к.ф.-м.н. М. А. Плиева; в Российском университете дружбы народов на научном семинаре под руководством профессоров А. В. Арутюнова, В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана, в МГУ им. М. В. Ломоносова на научном семинаре на механико-математическом факультете под руководством профессоров Г. Г. Магарил-Ильяева и К. Ю. Осипенко, на научном семинаре на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством академика Е. И. Моисеева и профессора И. С. Ломова. Кроме того, результаты диссертации докладывались на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов (Москва, 2019-2020-2021);

на Международной научной конференции (Ninth International Scientific Conference ”Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”. Rostov-on-Don, 2018–2019); на 31-й Крымской Осенней Математической Школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 2020); на 5-й Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования» (Москва, 2018); на Международной научной конференции «Interdisciplinary Research in Science, Engineering and Technology» (Bangalore, India, 2021); на Международной научной конференции «Order Analysis and Related Questions of Mathematical Modelling, XVI.» (Vladikavkaz, 2021).

**Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [16; 20—23] из списка литературы, а также в следующих тезисах конференций.

1. N. H. Alkhalil. Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя . Eighth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII”. Abstracts of the International Conference (Rostov-on-Don, 22–27 April, 2018), pp. 31-32.
2. Хамадех Альхалиль Нисрин. Об оценке равномерного модуля непрерывности потенциала для локализации $\gamma$-средних его спектрального разложения. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019» (8.04–12.04.2019 г, г. Москва, МГУ). Москва, Тезисы докладов. — М.: Издание МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019.

3. Альхалиль Н. Х., Алмохаммад Х. Условия локализации спектральных разложений для обобщённых потенциалов Бесселя. «Ninth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”». Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019. Abstracts of the International Conference (Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019), pp. 74-75.
4. Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х. О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича – Лоренца. «Ninth International Scientific Conference “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX”». Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019. Abstracts of the International Conference (Rostov-on-Don, 21–26 April, 2019), pp. 30-31.
5. Альхалиль Н.Х. Алмохаммад Х. Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». Симферополь, издательство и типография «Полипринт», стр. 7-8.
6. Хамадех Альхалиль Нисрин. Оценки равномерных модулей непрерывности в пространстве потенциалов. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020» (10.11–27.11.2020 г, г. Москва, МГУ). Москва, сборник тезисов. — М.: Издание МГУ имени М.В. Ломоносова, 2020.

7. Хамадех Альхалиль Нисрин. Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя на весовых пространствах Лоренца. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021» (12.04–23.04.2021 г, г. Москва, МГУ). Москва, сборник тезисов. — М.: Издание МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021.

# Глава 1. Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона в случае базовых весовых пространств Лоренца

В данной главе установлены точные оценки модулей непрерывности порядка $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что общие точные по порядку оценки для модулей непрерывности потенциалов были получены работах М. Л. Гольдмана и А. В. Малышевой [15]. Здесь мы конкретизируем эти общие результаты в случае, когда базовое пространство для потенциалов является весовым пространством Лоренца с общими весовыми функциями. Полученная конкретизация общих построений позволяет дать явные выражения для точных мажорант модулей непрерывности потенциалов и применить эти оценки для описания пространств типа Кальдерона, в которые вложены пространства потенциалов. Результаты этого раздела опубликованы в работе [16] из списка публикаций автора по теме диссертации.

## 1.1 Определения и предварительные сведения. Общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами

В этом параграфе будут представлены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами. Через $(X,\Sigma,\mu)$ (кратко: $(X;\mu)$) обозначим пространство с $\sigma$-алгеброй и мерой, которую считаем неотрицательной и $\sigma$-конечной. Через $L = L(X;\mu)$ обозначим множество $\mu$-измеримых функций, далее $L_0 = L_0(X;\mu)$ есть множество $\mu$-измеримых конечных почти всюду функций, $L^+(X;\mu) = \{f \in L(X;\mu),\ f \geqslant 0\}$; $L_0^+(X;\mu) = L_0(X;\mu) \cap L^+(X;\mu)$.

**Определение 1.1.1.** *Отображение $\rho :\ L^+ \to [0,\infty]$ есть идеальная квазинорма (кратко: ИКН), если для всех $f,\ g,\ f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$ выполнены условия:*

*(p1)* $\rho(f) = 0 \ \Rightarrow\ f = 0$, *$\mu$–почти всюду (кратко: $\mu$–п.в.);*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, $\alpha \geqslant 0$; $\rho(f+g) \leqslant C[\rho(f)+\rho(g)]$, $f, g \in L^+$; $C \geqslant 1$ *(свойство квазинормы);*

*(p2)* $f \leqslant g$, *($\mu$–п.в.)* $\Rightarrow\ \rho(f) \leqslant \rho(g)$ *(монотонность нормы);*

*(p3)* $f_n \in L^+$, $f_n \uparrow f \ \Rightarrow\ \rho(f_n) \uparrow \rho(f)(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

*(p4)* $\rho(f) < \infty \ \Rightarrow\ f < \infty$ *($\mu$–п.в.).*

*(p5)* $0 < \mu(\sigma) < \infty \ \Rightarrow\ \rho(\chi_\sigma) < \infty$.

*Здесь $f_n \uparrow f$ означает, что $f_n \leqslant f_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, ($\mu$–п.в.).*

Понятие ИП шире понятия банахова функционального пространства (кратко: БФП) введенного Беннеттом и Шарпли [1], идеальное квазибанахово пространство со свойством Фату есть идеальная структура в терминологии книги Крейна–Петунина–Семенова [12].

Напомним определения функциональной нормы (кратко: ФН) и порожденного его банахова функционального пространства (кратко: БФП) (см. [1, Гл. 1]).

**Определение 1.1.2.** *Пусть $\rho$ есть ИКН множество $x = x(f)$ всех функций из $L$, для которых $\rho(|f|) < \infty$, называется идеальным пространством (кратко: ИП) порожденных ИКН $\rho$; при этом для $f$ полагаем $\|f\|_x = \rho(|f|)$.*

**Определение 1.1.3.** *Отображение* $\rho : L^+ \to [0,\infty]$ *есть ФН, если для всех* $f$, $g$, $f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, *всех констант* $a \geqslant 0$ *и всех* $\mu$*-измеримых подмножеств* $E \subset X$ *выполнены следующие условия:*

*(*$\hat{p}1$*)* $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\mu$*–п.в.;*

$\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$*;* $\rho(f + g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$*;*

*(p2)* $0 \leqslant g \leqslant f$, $\mu$*–п.в.* $\Rightarrow$ $\rho(g) \leqslant \rho(f)$ *(монотонность);*

*(p3)* $0 \leqslant f_n \uparrow f$ $\mu$*–п.в.* $\Rightarrow$ $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ $(n \to \infty)$ *(свойство Фату);*

*(*$\hat{p}4$*)* $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leqslant h_E\rho(f)$ *(локальная интегрируемость) для некоторой* $h_E \in \mathbb{R}$*, зависящей от* $E$ *и* $\rho$*, но не от* $f$*;*

*(*$\hat{p}5$*)* $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$.

**Замечание 1.1.1.** *Условие (*$\hat{p}1$*) является усилением условия (p1) из Определения 1.1.1, когда* $C = 1$*, то есть квазинорма превращается в норму.*

**Определение 1.1.4.** *Пусть* $\rho$ *есть ФН. Множество* $X = X(\rho)$ *всех функций из* $K$*, для которых* $\rho(|f|) < \infty$*, называется банаховым функциональным пространством (кратко: БФП), порожденным ФН* $\rho$*; при этом для* $f$ *полагаем*

$$\|f\|_X = \rho(|f|).$$

*Обозначим для* $f \in L_0 \Rightarrow \lambda_f(y) = \mu\{x \in S : |f(x)| > y\}$, $y \in [0,\infty)$ *— Лебегова функция распределения. Через* $\dot{L}_0$ *обозначим множество функций* $f \in L_0$*:* $\lambda_f(y)$ *не тождественна* $\infty$.

*Для* $f \in \dot{L}_0$ *введем невозрастающую перестановку* $f^*$ *как правую обратную функцию к невозрастающей функции* $\lambda_f$*, т. е.*

$$f^*(t) = \inf\{y \in [0,\infty) : \lambda_f(y) \leqslant t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty).$$

*Здесь* $f^* : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty]$ *— убывающая перестановка функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, т. е.* $f^*$ *— неотрицательная убывающая непрерывная справа функция* *на* $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, *которая является равноизмеримой с* $f$*:*

$$\mu_n\bigl\{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| > y\bigr\} = \mu_1\bigl\{t \in \mathbb{R}_+ : \ |f^*(t)| > y\bigr\}, \quad y \in \mathbb{R}_+,$$

*где* $\mu_n$ — $n$*-мерная мера Лебега.*

**Определение 1.1.5.** *БФП* $E = E(\mathbb{R}^n)$ *называется перестановочно инвариантным пространством (кратко: ПИП), если его норма монотонна относительно перестановок, т. е.*

$$f^*(t) \leqslant g^*(t), \quad \text{и} \quad g \in E \quad \Rightarrow \quad f \in E \quad \text{и} \quad \|f\|_E \leqslant \|g\|_E.$$

Примерами ПИП служат пространства Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$, пространства Лоренца, Орлича [12, с. 145], [13, с. 7].

Пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определяем как множество сверток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) = \bigl\{u = G * f \ : \ f \in E(\mathbb{R}^n)\bigr\}, \tag{1.1}$$

где $E$ — перестановочно инвариантное пространство, а ядро $G$ — специального вида

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\bigl\{\|f\|_E \ : \ f \in E(\mathbb{R}), \ G * f = u\bigr\}. \tag{1.2}$$

Здесь свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y, \tag{1.3}$$

(мы ввели здесь множитель $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$ для удобства при использовании преобразования Фурье).

Здесь мы существенно используем результаты работы [14], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Для ПИП $E \equiv E(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $E' \equiv E'(\mathbb{R}^n)$ — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП, в котором норма задается соотношением

$$\|g\|_{E'} = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \, \mathrm{d}\mu_n \, : \, f \in E; \; \|f\|_E \leqslant 1 \right\}, \tag{1.5}$$

где $\mu_n$ — n мерного мера Лебега, $\widetilde{E} \equiv \widetilde{E}(\mathbb{R}_+)$, $\widetilde{E}' \equiv \widetilde{E}'(\mathbb{R}_+)$ — их представления Люксембурга, т. е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\widetilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\widetilde{E}'}, \tag{1.6}$$

где $f$, $g$ измеримые функции.

Ядро представления $G$ назовем допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Для $R \in \mathbb{R}_+$ введем класс монотонных функций $\mathfrak{J}_n(R)$ следующим образом. Функция $\Phi : (0,R) \to \mathbb{R}_+$ принадлежит классу $\mathfrak{J}_n(R)$, если

1. $\Phi$ убывающая и непрерывная на $(0,R)$;
2. существует постоянная $c \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} \, \mathrm{d}\rho \leqslant c\Phi(\rho)r^n, \quad r \in (0,R), \tag{1.7}$$

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \mathfrak{J}_1(T), \quad T = V_n R^n,$$

где $V_n$ — объем $n$-мерного единичного шара.

Свойства ядер обсуждаются в определениях 1.1.6 – 1.1.8 ниже.

**Замечание 1.1.2.** *Пусть $A(x)$, $B(x)$ — положительные функции на множестве $D \subset \mathbb{R}^n$. Мы пишем $A(x) \cong B(x)$, $x \in D$, если существует постоянная $c \geqslant 1$ такая, что $c^{-1} \leqslant \frac{A(x)}{B(x)} \leqslant c$, $\forall x \in D$.*

**Определение 1.1.6.** *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$. Считаем, что $G \in S_R(\Phi)$, если*

$$G(x) \cong \Phi(|x|), \quad x \in B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+. \qquad (1.8)$$

**Определение 1.1.7.** *Пусть $\Phi \in \mathfrak{I}_n(R)$, $X(\mathbb{R}^n)$ — ПИП. Считаем, что $G \in S_R(\Phi; X)$, если*

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x);$$

$$G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x); \quad G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x), \qquad (1.9)$$

*где $B_R^c$ дополнение к $B_R$,*

$$G_R^0(x) \cong \Phi(x), \quad x \in B_R, \quad G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n).$$

**Определение 1.1.8.** *Потенциалы $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ называются обобщенными потенциалами Бесселя, если*

$$\Phi \in \mathfrak{I}_n(R), \quad G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int_{\mathbb{R}^n} G \, \mathrm{d}\mu_n \neq 0. \qquad (1.10)$$

*Ввиду вложения $L_1 \cap L_\infty \subset L_1 \cap E'$, где $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ наша схема включает потенциалы Бесселя.*

**Определение 1.1.9.** *Пространствами Лоренца $\Lambda^p(v)$ и $\Gamma_\delta^p(v)$, где $\delta$ и $v > 0$ — измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечными (квази)нормами:*

$$\|f\|_{\Lambda^p(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^*(t)^p v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}; & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in (0,\infty)} \left\{f^*(t)v(t)\right\}; & p = \infty. \end{cases} \qquad (1.11)$$

*Пусть*

$$f_\delta^{**} = \frac{1}{u(t)} \int\limits_0^t f^*(s)\delta(s)\,\mathrm{d}s; \quad u(t) = \int\limits_0^t \delta(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\|f\|_{\Gamma^p_\delta(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f_\delta^{**p}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}; & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f_\delta^{**}(t)v(t)\right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{1.12}$$

В частности, когда $\delta = 1$,

$$\|f\|_{\Gamma^p(v)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}; & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} \left\{f^{**}(t)v(t)\right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{1.13}$$

**Замечание 1.1.3.** *Пусть* $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,\mathrm{d}s,\ \ f^{**} \geqslant f^* \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \|f\|_{\Gamma^p(v)} \geqslant \|f\|_{\Lambda^p(v)}$

$$\Rightarrow \quad \Gamma^p(v) \subset \Lambda^p(v). \tag{1.14}$$

## 1.2 Точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций

В этом параграфе будут установлены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций.

**Замечание 1.2.1.** [24] *Пусть* $p,\ q \in (0,\infty]$ *и пусть* $v,\ \delta,\ \omega$ *веса, и* $Y(s) = \int_0^s \delta(t)\,\mathrm{d}t,\ V(s) = \int_0^s v(t)\,\mathrm{d}t$, *мы будем использовать результат из работы [24]. Именно, при* $1 < p \leqslant q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$\|f\|_{\Gamma^q_\delta(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)} \iff$

$$A_3 = \sup_{x>0}\left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{Y(x)}{Y(x)+Y(t)} \right)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. \left( \int_0^\infty \left( \frac{Y(t)}{Y(t)+Y(x)} \right)^{p'} \cdot \frac{v(t)}{V^{p'}(t)}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < \infty.$$

*Кроме того, наилучшая постоянная $C$ в оценке $\|f\|_{\Gamma_\delta^q(w)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^p(v)}$ удовлетворяет условию $C \approx A_3$.*

**Определение 1.2.1.** *Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций с нормой $\|u\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)|$.*

*Модуль непрерывности для $u \in C(\mathbb{R}^n)$ в равномерной норме:*

$$\omega_C^k(u;\tau) = \sup\left\{ \left\|\Delta_h^k u\right\|_C \;:\; |h| \leqslant \tau \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

*Здесь $\Delta_h^k u(x)$ — $k$-я разность с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что для $u \in C(\mathbb{R}^n)$: $\omega_C^k(u;\tau) \to 0$, $(\tau \to +0)$.*

В наших результатах мы использовали Теорему 1.2.1 и Лемму 1.2.1.

**Теорема 1.2.1.** [15] *Пусть $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $G \neq 0$, $\varphi(\tau) = G^*(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и функция $f \,:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, такова, что при некотором $T \in \mathbb{R}_+$*

$$\int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty. \tag{1.15}$$

*Тогда*

1. *Для свёртки*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.16}$$

*справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \leqslant c_0 \int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.17}$$

$$c_0 = 1 + \left(\int_T^\infty \varphi(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^T \varphi(\tau)\,d\tau\right)^{-1}. \tag{1.18}$$

*2. Пусть, кроме того,* $G \in C^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $k \in \mathbb{N}$, *для*

$$G_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} \left|D^\alpha G(x)\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.19}$$

*при* $c_1 \in \mathbb{R}_+$ *имеет место оценка*

$$|G_k(x)| \leqslant c_1 \Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.20}$$

*где*

$$0 \leqslant \beta_k(\tau) := \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_+, \tag{1.21}$$

*и выполнены соотношения*

$$\beta_k(\tau) \leqslant \tau^{-k\backslash n}\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,T], \tag{1.22}$$

$$\int_T^\infty \beta_K(\tau)\,d\tau < \infty. \tag{1.23}$$

*Тогда свёртка u, определенная в* (1.16)*, непрерывна на* $\mathbb{R}^n$ *и для* $t \in$

$(0,T]$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 \int_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\right] \varphi(\tau) f^*(\tau)\,d\tau. \tag{1.24}$$

*Здесь* $c_2 = c_1 \widetilde{c} d$, *где*

$$d = 1 + \frac{2}{T\beta_K(T)}\left(\int_T^\infty \beta_K(\tau)\,d\tau\right), \tag{1.25}$$

$c_1$ *— постоянная из условия* (1.20)*,* $\widetilde{c} = \widetilde{c}(k,n) \in \mathbb{R}_+$.

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 1.2.1 [15].

*Доказательство.* 1. По лемме Харди из равенства (1.16) следует, что

$$|u(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |G(x-y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \int\limits_0^\infty [G(x-\bullet)]^*(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad (1.26)$$

Но функция $G(x-y)$ как функция от $y \in \mathbb{R}^n$ равноизмерима с $G(y)$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$, так что

$$[G(x-\bullet)]^*(\tau) = G^*(\tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Итак, для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_0^\infty \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_T^\infty \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad (1.27)$$

Но $f^*(\tau)$ убывающая функция, поэтому

$$\int\limits_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant f^*(T) \int\limits_0^T \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\int\limits_T^\infty \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant f^*(T) \int\limits_T^\infty \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Итак

$$\int\limits_T^\infty \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \int\limits_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \left(\int\limits_T^\infty \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int\limits_0^T \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1}. \quad (1.28)$$

Подставив эту оценку в (1.27) приходим к соотношениям (1.17) и (1.18).

Подставив оценку $\left(\Delta_h^k u\right)(x)$, в силу (1.16) получим

$$\left(\Delta_h^k u\right)(x) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (1.29)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \int_{B(x,2k|h|)} \left(\Delta_h^k G\right)(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2k|h|)} \left(\Delta_h^k G\right)(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y. \quad (1.31)$$

Известна формула

$$\left(\Delta_h^k G\right)(\tau) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} C_k^l G(\tau + lk), \quad \tau \in \mathbb{R}^n.$$

Из экстремальных свойств убывающих перестановок

$$\left|\int_D f(y) g(y)\, \mathrm{d}y\right| \leqslant \int\limits_D^{\mu(D)} f^*(\tau) g^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

При $D = B(x, 2k|h|)$, т. е. $\mu(D) = V_n(2k|h|)^n \equiv \delta(h)$.

Где $g(y) = G(x + lh - y)$ равноизмерима с $G(y)$, и так

$$g^*(\tau) = G^*(x) = \varphi(\tau).$$

Получим

$$\left|\int_{B(x,2k|h|)} G(x + lh - y) f(y)\, \mathrm{d}y\right| \leqslant \int\limits_D^{\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Из этой оценки и формулы для $\mathcal{L}_1$, учитывая, что $\sum_{l=0}^k C_k^l = 2^k$, получим

$$|\mathcal{L}_1| \leqslant 2^k \int\limits_0^{\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad \delta(h) = V_n(2k|h|)^n.$$

Итак

$$|\mathcal{L}_1| \leqslant 2^{k+n} \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad 2^{-n}\delta(h) = V_n(k|h|)^n. \tag{1.32}$$

$f^*$ убывает, а тогда убывает среднее интегральное

$$\frac{1}{\delta(h)} \int\limits_0^{\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2^{-n}\delta(h)} \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Из нее следует (1.32).

Теперь оценим $\mathcal{L}_2$ (1.31). Мы используем известную формулу

$$\left(\Delta_h^k G\right)(z) = |h|^k \int\limits_0^k \frac{\partial^k G}{\partial h^k}(z + \lambda h) M_k(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.33}$$

Здесь $M_k$ — ядра представления, и они определяются индуктивно:

$$M_1(\lambda) = \chi_{(0;1)}(\lambda), \quad M_j(\lambda) = \big(M_1 * M_{j-1}\big)(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots \tag{1.34}$$

$\frac{\partial^k G}{\partial h^k}$ — производная порядка $k$ по направлению вектора $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$. Теперь можно использовать свойства ядер:

$$0 \leqslant M_k(\lambda) \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} M_k = [0,k], \quad \int\limits_0^k M_k(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 1, \tag{1.35}$$

$$M_k(\lambda) \cong \lambda^{k-1}, \quad \lambda \in (0,1]. \tag{1.36}$$

Известна формула

$$\left|\frac{\partial^k G}{\partial h^k}(x)\right| \leqslant c_{k,n} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha G(x)| = c_{k,n} G_k(x).$$

Из этой оценки и (1.33), получим

$$\left|\big(\Delta_h^k G\big)(x-y)\right| \leqslant c_{k,n}|h|^k \int\limits_0^k G_k(x+\lambda h - y) M_k(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Из этой оценки и (1.20), получим

$$\left|\big(\Delta_h^k G\big)(x-y)\right| \leqslant c_1 c_{k,n}|h|^k \int\limits_0^k \beta_k\big(|x+\lambda h - y|\big) M_k(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

У нас для $y \in \mathbb{R}^n \backslash B(x,2k|h|)$ будет $|x-y| \geqslant 2k|h|$ и при $\lambda \in (0,k]$.

$$\frac{1}{2}|x-y| \leqslant |x+\lambda h - y| \leqslant \frac{3}{2}|x-y|.$$

Из убывания $\Psi_k$ и (1.31) следует

$$\Psi_k(|x+\lambda h - y|) \leqslant \Psi_k(2^{-1}|x-y|), \quad \lambda \in (0,k].$$

Из (1.35), получаем

$$\left|\big(\Delta_h^k G\big)(x-y)\right| \leqslant c_1 c_{k,n}|h|^k \Psi_k(2^{-1}|x-y|).$$

Из этой оценки и (1.31), получаем

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c_{k,n} |h|^k \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2k|h|)} \Psi_k(2^{-1}|x-y|)|f(y)|\, \mathrm{d}y. \tag{1.37}$$

Пусть функция

$$\widetilde{\Psi}_{k,h}(y) = \begin{cases} \Psi_k(k|h|), & \text{при} \quad 0 < |y| < 2k|h|, \\ \Psi_k\left(\dfrac{|y|}{2}\right), & \text{при} \quad 2k|h| < |y| < \infty. \end{cases} \tag{1.38}$$

Тогда в силу (1.37) получаем

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c_{k,n} |h|^k \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Psi}_{k,h}(|x-y|)|f(y)|\, \mathrm{d}y.$$

Но функция $\widetilde{\Psi}_{k,h}(x-y)$ равноизмерима с $\widetilde{\Psi}_{k,h}(y)$. Применим лемму Харди, получаем

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c_{k,n} |h|^k \int\limits_0^\infty \widetilde{\Psi}^*_{k,h}(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{1.39}$$

Можно перейти к функции

$$\Psi_{k,h}(y) = \widetilde{\Psi}_{k,h}(2y) = \begin{cases} \Psi_k(k|h|), & \text{при} \quad 0 < |y| < k|h|, \\ \Psi_k(|y|), & \text{при} \quad k|h| < |y| < \infty. \end{cases} \tag{1.40}$$

Но $\widetilde{\Psi}^*_{k,h}(\tau) = \Psi^*_{k,h}(2^{-n}\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и из (1.39)

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c_{k,n} |h|^k \int\limits_0^\infty \widetilde{\Psi}^*_{k,h}(2^{-n}\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 2^n c_1 c_{k,n} |h|^k \int\limits_0^\infty \Psi^*_{k,h}(\tau) f^*(2^n\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Имеем для $\tau \in \mathbb{R}_+$: поскольку $f^*(2^n\tau) \leqslant f^*(\tau)$

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c |h|^k \int\limits_0^\infty \Psi^*_{k,h}(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad c = 2^n c_{k,n}. \tag{1.41}$$

Но функция $\Psi_{k,h}$ (1.40) радиально симметрична и непрерывна справа как функция от $|y|$ и она убывает по $|y|$ на $\mathbb{R}_+$, и так $\Psi^*_{k,h}$ из правой части (1.40), можно заменить в ней $|y|$ на $\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Учитывая при этом равенства

$$\beta_k(\tau) = \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right),.$$

Итак

$$\widetilde{\Psi}^*_{k,h}(y) = \begin{cases} \beta_k\big(2^{-n}\delta(h)\big), & \text{при} \quad 0 < \tau < V_n(k|h|)^n \equiv 2^{-n}\delta(h), \\ \beta_k(\tau), & \text{при} \quad \tau \geqslant 2^{-n}\delta(h). \end{cases}$$

Из этой оценки и (1.41) получаем

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c|h|^k \left[\beta_k\big(2^{-n}\delta(h)\big) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{L} + \mathcal{L}'\right]. \tag{1.42}$$

Здесь

$$\mathcal{L} = \int\limits_{2^{-n}\delta(h)}^{T} \beta_k(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \mathcal{L}' = \int\limits_T^\infty \beta_k(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.43}$$

Но $f^*(\tau)$ убывающая функция и из (1.33) получим

$$\mathcal{L}' \leqslant f^*(T) \int\limits_T^\infty \beta_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.44}$$

Из убывания $\beta_k f^*$, и если $0 \leqslant 2^{-n}\delta(h) \leqslant T/2$, то

$$\mathcal{L} \geqslant \int\limits_{T/2}^{T} \beta_k(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant \beta_k(T) f^*(T)\frac{T}{2}.$$

Если же $2^{-n}\delta(h) \in (T/2, T]$, то

$$\beta_k\big(2^{-n}\delta(h)\big) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \geqslant \beta_k(T) f^*(T) \int\limits_0^{T/2} \mathrm{d}\tau = \beta_k(T) f^*(T)\frac{T}{2}.$$

Поэтому можно писать

$$\beta_k\big(2^{-n}\delta(h)\big) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{L} \geqslant \frac{\beta_k(T) f^*(T) T}{2}. \tag{1.45}$$

Из (1.45) и (1.44) получим, что

$$\mathcal{L}' \leqslant \left(\int\limits_T^{\infty} \beta_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\frac{2}{T\beta_k(T)}\left[\beta_k(2^{-n}\delta(h)) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{L}\right].$$

Подставим эту оценку в (1.42) и из (1.25) получим

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant c_1 c|h|^k d(\beta_k)\left[\beta_k(2^{-n}\delta(h)) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{L}\right].$$

Но в (1.29) у нас

$$\big(\Delta_h^k u\big)(x) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2.$$

Подставим значение $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ в этой оценке

$$\left|\big(\Delta_h^k u\big)(x)\right| \leqslant 2^{k+n} \int\limits_0^{2^{-n}\delta\ (h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+\, \widetilde{c}(k,n)|h|^k d(\beta_k)\left[\beta_k(2^{-n}\delta(h)) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \mathcal{L}\right]. \quad (1.46)$$

Теперь из условия (1.22) и из (1.43) следует, что

$$\mathcal{L} \leqslant \int\limits_{2^{-n}\delta(h)}^{T} \tau^{-\frac{k}{n}} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$|h|^k \beta_k(2^{-n}\delta(h)) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(k,n)\varphi(2^{-n}\delta(h)) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \widetilde{\widetilde{c}}(k,n) \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Подставим эти оценки в (1.46). Тогда,

$$\left|\big(\Delta_h^k u\big)(x)\right| \leqslant c_1 c(k,n) d(\beta_k)\left[\int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + |h|^k \int\limits_{2^{-n}\delta(h)}^{T} \tau^{-k\backslash n} \varphi(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Имеем, что

$$\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+|h|^{-k}} \cong \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \tau \in (0,2^{-n}\delta(h)], \\ |h|^k\tau^{-\frac{k}{n}}, & \text{при} \quad \tau \in (2^{-n}\delta(h),T], \end{cases}$$

с постоянными, зависящими от $k$, $n$.

Итак получим, что

$$\int\limits_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+|h|^{-k}}\right]\varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \cong$$

$$\cong \int\limits_0^{2^{-n}\delta(h)} \varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau + |h|^k \int\limits_{2^{-n}\delta(h)}^T \tau^{-k\backslash n}\varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\left(\Delta_h^k u\right)(x)\right| \leqslant c_1\widetilde{c}(k,n)d(\beta_k)\int\limits_0 \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+|h|^{-k}}\right]\varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Заметим теперь, что

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right) = \sup_{|h|\leqslant t^{\frac{1}{n}}}\left\|\Delta_h^k u\right\|_{C(\mathbb{R}^n)}.$$

Итак,

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2\int\limits_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+t^{-\frac{k}{n}}}\right]\varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (1.47)$$

Здесь $c_2 = c_1\widetilde{c}d$, где

$$d = 1 + \frac{2}{T\beta_K(T)}\left(\int\limits_T^\infty \beta_K(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Теорема 1.2.1 доказана. □

**Замечание 1.2.2.** *При выполнении условия* $\varphi(\tau) \in E'(0,T)$ *неравенство* (1.15) *выполнено для любой функции* $f \in E(\mathbb{R}^n)$*, т. е. Теорема 1.2.1 применима для любого потенциала* $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$*, поскольку для него верна формула* (1.16).

Далее рассмотрены некоторые более простые оценки модулей непрерывности при дополнительных ограничениях на ядра потенциалов.

**Лемма 1.2.1.** [15] *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int\limits_t^T \tau^{-\frac{k}{n}}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant B_0 t^{1-\frac{k}{n}}\varphi(t), \quad t\in(0,T], \tag{1.48}$$

*где $B_0\in\mathbb{R}_+$ не зависит от $t$.*

*Кроме того, пусть выполнены условия Теоремы 1.2.1. Тогда*

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3\int\limits_0^t \varphi(\tau)f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t\in(0,T], \tag{1.49}$$

*где $c_3=(1+B_0)c_2$, $c_2$ — постоянная из (1.47).*

**Лемма 1.2.2.** [15] *Для классических потенциалов, если $k>\alpha$ (см. замечание 1.3.1 и замечание 1.3.4), справедлива оценка*

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \widetilde{c}\int\limits_0^t \tau^{\frac{\alpha}{n}-1}f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t\in(0,T],$$

*где $\widetilde{c}=\widetilde{c}(k,n,\alpha,T)\in\mathbb{R}_+$.*

**Теорема 1.2.2.** *Пусть $1<q<\infty$, и пусть выполнены условия леммы 1.2.1 и, кроме того*

$$A_3 := \sup_{x>0}\left\{\left(\int\limits_0^\infty\left(\frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^q w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left(\int\limits_0^\infty\left(\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^{q'}\frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q'}}\right\}<\infty,$$

*тогда*

$$\left\|\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right)\right\|_{L_q(\widetilde{w})} \leqslant c_3 c\|f\|_{\Lambda^q(v)}, \tag{1.50}$$

*где $\widetilde{w}(t)=\frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$, $\Phi_0(t)=\int_0^t\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $c_3$ — постоянная из (1.49). Наилучшая постоянная $c$ в оценке (1.50) удовлетворяет условию $c\approx A_3$.*

*Доказательство.* Теоремы 1.2.2. Из леммы 1.2.1 следует, что

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in (0T,].$$

Мы будем использовать следующее обозначение

$$f_\varphi^{**}(t) = \frac{1}{\left(\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)} \int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

и обозначим $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\, \mathrm{d}\tau$.

Подставим в (1.49) и получим неравенства

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \Phi_0(t) \frac{1}{\Phi_0(t)} \int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T], \tag{1.51}$$

итак,

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \Phi_0(t) f_\varphi^{**}(t), \quad t \in (0,T].$$

Из этой оценки следует, что

$$\frac{\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)}{\Phi_0(t)} \leqslant c_3 f_\varphi^{**}(t), \quad t \in (0,T].$$

Тогда получим

$$\left\| \frac{\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)}{\Phi_0(t)} \right\|_{L_q(\omega)} \leqslant c_3 \left\| f_\varphi^{**} \right\|_{L_q(\omega)}.$$

Из определения нормы в $L_q(\omega)$, следует

$$\left( \int\limits_0^\infty \left| \frac{\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)}{\Phi_0(t)} \right|^q \omega(t)\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_3 \left\| f_\varphi^{**} \right\|_{L_q(\omega)}.$$

Итак,

$$\left\| \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \right\|_{L_q(\widetilde{\omega})} \leqslant c_3 \left\| f_\varphi^{**} \right\|_{L_q(\omega)},$$

где $\widetilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$.

Но $\left\| f_\varphi^{**} \right\|_{L_q(\omega)} = \|f\|_{\Gamma_\varphi^q(\omega)}$ по определению $f_\varphi^{**}$, так что последняя оценка дает

$$\left\| \omega_C^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\widetilde{\omega})} \leqslant c_3 \|f\|_{\Gamma_\varphi^q(\omega)}.$$

По Замечанию 1.2.1 отсюда следует, что

$$\left\| \omega_C^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\widetilde{\omega})} \leqslant c_3 c \|f\|_{\Lambda^q(v)}, \tag{1.52}$$

причем наилучшая постоянная $c$ в оценке (1.50) удовлетворяет условию $c \approx A_3$.

Здесь

$$A_3 := \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q w(t)\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} < \infty,$$

где $c_3$ — постоянная из (1.49) и $c \approx A_3$. □

## 1.3 Оценка сверху модуля непрерывности для классического потенциала Бесселя

Мы рассмотрим некоторые результаты [11]. Для пространства классических бесселевых потенциалов. установлены двусторонние оценки модуля непрерывности порядка $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторые выводы и примеры об этом. Такие оценки допускают точные теоремы вложения пространства потенциалов в пространства $C(\mathbb{R}^n)$.

**Замечание 1.3.1.** *Отметим, что классические ядра Бесселя–МакДональда имеют вид*

$$G_\alpha(x) = c(\alpha,n)\rho^{-\gamma}K_\gamma(\rho), \quad \rho = |x| \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha \in (0,n);$$
$$\gamma = \frac{n-\alpha}{2}, \quad (1.53)$$

*где $K_\gamma$ — функция МакДональда, см. [2]. Хорошо известные свойства этих ядер устанавливают, что*

$$\begin{aligned} &G_\alpha(x) \cong \Phi(|x|), \quad 0 < |x| < R; \quad \Phi(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in \mathfrak{I}_n(R); \\ &G_\alpha(x) \cong |x|^{-\gamma-\frac{1}{2}}e^{-|x|}, \quad |x| > R. \end{aligned} \tag{1.54}$$

**Теорема 1.3.1.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < n$, и функция $f : \mathbb{R}^n \to R$ такова что*

$$\|f\|_{\Lambda^{\alpha/n}(0,T_1)} := \int\limits_0^{T_1} \tau^{\alpha/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad T_1 \in (0,\infty). \tag{1.55}$$

*Тогда свертка (1.3) ограничена и непрерывна, и для любого $T \in (0,\infty)$ выполняются следующие оценки:*

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leqslant c_0 \int\limits_0^{T_1} \tau^{\alpha/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau = c_0\|f\|_{\Lambda^{\alpha/n}(0,T_1)}; \tag{1.56}$$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_1 \int\limits_0^{T} h_t(\tau) f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{1.57}$$

*Здесь,*

$$h_t(\tau) = \tau^{(\alpha-k)/n-1}\left(\tau^{-k/n} + t^{-k/n}\right)^{-1}; \tag{1.58}$$

$c_i = c_i(k,n,\alpha,T_1,T) \in \mathbb{R}_+$, $i = 0,1$.

**Следствие 1.3.1.** *Пусть $k > \alpha$ в теореме 1.3.1. Тогда,*

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 \int\limits_0^{t} \tau^{\alpha/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T] \tag{1.59}$$

*с некоторой константой $c_2 = c_2(k,n,\alpha,T_1,T) \in \mathbb{R}_+$.*

**Замечание 1.3.2.** *Для любых $T, T_1 \in \mathbb{R}_+$ будет верно следующее соотношение:*

$$\min\left\{1, \frac{T}{T_1}\right\} \leqslant \left(\int_0^T \tau^{\alpha/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_0^{T_1} \tau^{\alpha/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1} \leqslant \max\left\{1, \frac{T}{T_1}\right\}.$$

**Замечание 1.3.3.** *Пусть $\alpha > k$, и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такова, что*

$$\int_0^{T_1} \tau^{(\alpha-k)/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty.$$

*Тогда из* (1.57) *и* (1.58) *следует, что,*

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 t^{k/n} \int_0^T \tau^{(\alpha-k)/n-1} f^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T].$$

*Отметим, что такая оценка является наилучшей из возможных для модуля непрерывности порядка $k$. Также отметим, что при $\alpha \leqslant k$, правая часть оценки конечна только для нулевой функции $f$.*

**Теорема 1.3.2.** *Пусть $T \in \mathbb{R}_+$, а функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \to [0,\infty)$ удовлетворяет условиям:*

$$\sigma \downarrow;\ \sigma(\tau+0) = \sigma(\tau),\ \tau \in (0,T); \quad \sigma(\tau) = 0,\ \tau \geqslant T;$$

$$\int_0^T \tau^{\alpha/n-1} \sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad \int_0^T \tau^{(\alpha-k)/n-1} \sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \infty. \tag{1.60}$$

*Тогда существует функция такая $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что*

$$f_0^*(\tau) \leqslant \sigma(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{1.61}$$

*и для свертки*

$$u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x-y) f_0(y)\,\mathrm{d}y$$

*справедлива следующая оценка*

$$\omega_C^k\left(u_0; t^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant c_3 \int\limits_0^T h_t(\tau)\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T), \tag{1.62}$$

*с некоторой константой* $c_3 = c_3(k,n,\alpha,T) \in \mathbb{R}_+$.

**Следствие 1.3.2.** *В условиях теоремы 1.3.2 имеет место и следующая оценка с константой.*

$$\omega_C^k\left(u\,;\,t^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant 2^{-1}c_3 \int\limits_0^t \tau^{\alpha/n-1}\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T]. \tag{1.63}$$

**Замечание 1.3.4.** [25] *Пространство классических потенциалов* $H_E^\alpha \equiv H_E^\alpha(\mathbb{R}^n)$ *определяем как множество сверток ядер Бесселя–Макдональда с функциями из базового пространства*

$$H_E^\alpha(\mathbb{R}^n) = \left\{u = G_\alpha * f \;:\; f \in E(\mathbb{R}^n)\right\}, \tag{1.64}$$

*с нормой*

$$\|u\|_{H_E^\alpha} = \|f\|_E,$$

*где* $u(x) = G_\alpha * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x-y)f(y)dy$.

Отметим, что

$$H_E^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \tau^{\alpha/n-1} \in \widetilde{E}'(0,T), \quad T \in \mathbb{R}_+. \tag{1.65}$$

Это условие эквивалентно вложению в пространство Лоренца с нормой (1.56). Поэтому такое пространство Лоренца является наибольшим базовым ПИП, для которого имеет смысл задача о поведении равномерного модуля непрерывности. Рассмотрим следующий вариант функции, являющейся мажорантой модулей непрерывности на единичном шаре в пространстве потенциалов Бесселя:

$$\Omega_{E,\alpha}^k(\delta) = \sup\left\{\omega_C^k(u;\delta) \;:\; u \in H_E^\alpha(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{H_E^\alpha} \leqslant 1\right\}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{1.66}$$

Тогда $0 \leqslant \Omega^k_{E,\alpha} \uparrow$. Наша цель — получить точную по порядку оценку этой функции вблизи начала координат.

**Теорема 1.3.3.** *Пусть $T \in \mathbb{R}_+$ и $E = E(\mathbb{R}^n)$ — ПИП.*

1. *Если $\tau^{(\alpha-k)/n-1} \in \widetilde{E}'(0,T)$, тогда для $u \in H^\alpha_E(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка*
$$\omega^k_C\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_4 \|u\|_{H^\alpha_E} t^{k/n}, \quad t \in (0,\mathrm{T}), \tag{1.67}$$
*где $c_4 = c_4(k,n,\alpha,T) \in \mathbb{R}_+$.*
2. *Если $\tau^{(\alpha-k)/n-1} \notin \widetilde{E}'(0,T)$, то имеет место следующая двусторонняя оценка с константами зависящими только от: $k,n,\alpha,T$*
$$\Omega^k_{E,\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \cong \|h_t\|_{\widetilde{E}'(0,t)}, \quad t \in (0,T). \tag{1.68}$$

**Следствие 1.3.3.** *Пусть $k > \alpha$ в теореме 1.3.3. Тогда*
$$\Omega^k_{E,\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \cong \left\|\tau^{\alpha/n-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,t)}, \quad t \in (0,T). \tag{1.69}$$

**Следствие 1.3.4.** *Пусть $k = 1$, в условиях теоремы 1.3.3. Тогда*
$$H^\alpha_E(\mathbb{R}^n) \subset Lip^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \tau^{(\alpha-1)/n-1} \in \widetilde{E}'(0,T), \quad T \in \mathbb{R}_+.$$

*Здесь*
$$\|u\|_{Lip^1} = \|u\|_c + \sup\left\{\omega^1_C(u;\delta)/\delta \ : \ \delta \in (0,1)\right\}.$$

**Следствие 1.3.5.** [25] *Из общих свойств модулей непрерывности следует, что оценка (1.67) является наилучшей из возможных. Кроме того, в условиях части 2 теоремы 1.3.3 в силу (1.68) имеем следующую оценку:*
$$\omega^k_C\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_5 \|u\|_{H^\alpha_E} \|h_t\|_{\widetilde{E}'(0,T)}, \quad t \in (0,T). \tag{1.70}$$
*Она точна по порядку на единичном шаре потенциального пространства Бесселя. Если $k > \alpha$, то эта оценка имеет следующий вид*
$$\omega^k_C\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_6 \|u\|_{H^\alpha_E} \left\|\tau^{\alpha/n-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}, \quad t \in (0,T).$$

Некоторые выводы и примеры.

**Пример 1.3.1.** Пусть $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Потом, $\widetilde{E}'(0,T) = L_{p'}(0,T)$, $p' = p/(p-1)$. Кроме того

$$(1.65) \;\Leftrightarrow\; \tau^{\alpha/n-1} \in L_{p'}(0,T) \;\Leftrightarrow\; \alpha > n/p;$$

$$\Omega^k_{E,\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \cong \begin{cases} t^{\alpha/n-\frac{1}{p}}, & n/p < \alpha < n/p+k; \\ t^{n/k}|\ln|^{1/p'}, & \alpha = n/p+k; \\ t^{n/k}, & \alpha > n/p+k. \end{cases} \tag{1.71}$$

**Пример 1.3.2.** Пусть $E = \Lambda p(v)$, $1 < p < \infty$ пространство Лоренца (1.11).

Тогда,

$$\widetilde{E}'(0,T) = \Gamma^{p'}(w;(0,T)), \quad w(\tau) = \tau^{p'} v(\tau)\left(\int_0^\tau v\right)^{-p'};$$

$$\|f\|_{\Gamma^{p'}(w;(0,T))} = \left(\int_0^T f^{**}(\tau)^{p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}; \quad f^{**}(\tau) = \tau^{-1}\int_0^\tau f^*\,\mathrm{d}t.$$

Кроме того,

$$(1.65) \;\Leftrightarrow\; \left\|\tau^{\alpha/n-1}\right\|_{\Gamma^{p'}(w;(0,T))} \cong \left(\int_0^T \tau^{(\alpha/n-1)p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Если это условие выполнено и $k > \alpha$, то

$$\Omega^k_{E,\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \cong \left(\int_0^t \tau^{(\alpha/n-1)p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad t \in (0,T) \tag{1.72}$$

из-за (1.69); и если $\alpha \geqslant k$, тогда из (1.68) следует

$$\Omega^k_{E,\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \cong \left(\int_0^T (h_t^{**})^{p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}, \quad t \in (0,T). \tag{1.73}$$

Здесь $h_t$ определяется по (1.58), а для $\tau \in (0,T)$ имеет место следующая оценка:

$$h_t{}^{**}(\tau) \cong \tau^{\alpha/n-1}\chi_{(0,t)}(\tau) + t^{k/n}\chi_{(t,T)}(\tau)\begin{cases}\tau^{-1}\left(1+\ln(t^{-1}\tau)\right), & \alpha = k,\\ \tau^{(\alpha-k)/n-1}, & \alpha > k.\end{cases}$$

**Пример 1.3.3.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область, а $H_E^\alpha(G), C(G)$ ограничения на $G$ пространств $H_E^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $C(\mathbb{R}^n)$. Тогда для $\tau^{\alpha/n-1} \in \widetilde{E}'(0,T)$, $T \in \mathbb{R}_+$ имеем вложение $H_E^\alpha(G) \subset C(G)$, и для аппроксимационных чисел оператора вложения (см. Определение 2.3.3) имеет место следующая оценка (см. [11])

$$a_m(I) \leqslant c\Omega^1_{E,\alpha}\left(m^{\frac{-1}{n}}\right), \quad m \in N.$$

По порядку точные оценки для $\Omega^1_{E,\alpha}$ приведены (для $k = 1$) в (1.68) и (1.69) в общем случае, а также в (1.71), (1.72) для примеров 1.3.1 и 1.3.2.

## 1.4 Критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца

В этом параграфе установлены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

**Определение 1.4.1.** *Пусть $X = X(0,T)$ идеальное пространство и $k \in \mathbb{N}$. Мы вводим пространство Кальдерона $\Lambda^k(C; X)$, так*

$$\Lambda^k(C;X) = \left\{u \in C(\mathbb{R}^n) : \ \omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \in X(0,T)\right\}; \tag{1.74}$$

$$\|u\|_{\Lambda^k(C;X)} = \|u\|_C + \left\|\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)\right\|_{X(0,T)}. \tag{1.75}$$

**Теорема 1.4.1.** *Пусть выполнены условия леммы 1.2.1, тогда при* $\tilde{E} = \Lambda^q(v)$, $X = L_q(\widetilde{\omega})$ *имеет место критерий*

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C; X) \Leftrightarrow A_3 < \infty,$$

*где*

$$A_3 := \sup_{x>0}\left\{\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^q w(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left(\int_0^\infty \left(\frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t)+\Phi_0(x)}\right)^{q'} \frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q'}}\right\}.$$

*Здесь* $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\widetilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$.

*Доказательство.* Теоремы 1.4.1.

Согласно теореме 1.2.2, при $A_3 < \infty$, справедлива оценка

$$\left\|\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)\right\|_{L_q(\widetilde{\omega})} \leqslant c\|f\|_{\Lambda^q(v)}. \tag{1.76}$$

Отсюда следует вложение

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C; X).$$

Теперь покажем, что

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C; X) \Rightarrow A_3 < \infty. \tag{1.77}$$

где $E = \Lambda^q(v)$, $X = L_q(\widetilde{w})$, $\widetilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$, $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

В работе [26] установлено, что

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda^k(C; X) \Leftrightarrow K \longmapsto X,$$

где $K$ конус из функций в $(0,T)$

$$K = \left\{h(t) = \int_0^T \Omega(t,\tau)\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;:\; \sigma \in \widetilde{E}_0(0,T)\right\},$$

$$\rho_K(h) = \inf\left\{ \|\sigma\|_{\widetilde{E}(0,T)};\ \int\limits_0^T \Omega(t,\tau)\sigma(\tau)\,d\tau = h(t) \right\},$$

где

$$\widetilde{E}_0(0,T) = \left\{\sigma \in \widetilde{E}(0,T)\ :\ 0 \leqslant \sigma \downarrow\right\}; \quad \Omega(t,\tau) = \varphi(\tau)\big(1 + (\tau/t)^{k/n}\big)^{-1}.$$

Поэтому можно писать

$$h(t) = \int\limits_0^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\right] \varphi(\tau)(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqslant \sigma \downarrow .$$

Но $0 < \tau < t$

$$\Rightarrow\ \tau^{-\frac{k}{n}} > t^{-\frac{k}{n}}\ \Rightarrow\ \tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}} \cong t^{-\frac{k}{n}}\ \Rightarrow\ \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \cong 1.$$

Поэтому можно писать

$$h(t) \cong \int\limits_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau + \int\limits_t^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\right] \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau.$$

При условии

$$\int\limits_t^\tau \tau^{-\frac{k}{n}} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant B_0 t^{1-\frac{k}{n}} \varphi(\tau), \quad t \in (0,T],$$

где $B_0 \in \mathbb{R}_+$ не зависит от $t$, имеем:

$$\int\limits_t^T \left[\frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\right] \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau \leqslant \int\limits_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$h(t) \cong \int\limits_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau; \quad \sigma \in \widetilde{E}_0, \quad \|\sigma\|_{\widetilde{E}} = \rho_K(h).$$

Вложение $K \to X$ означает, что $K \subset X$, и $\exists\, c_k \in \mathbb{R}_+$; $\|h\|_x \leqslant c_k \rho_K(h)$, это дает оценку

$$\left\| \int\limits_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,d\tau \right\|_x \leqslant c_k \|\sigma\|_{\widetilde{E}}; \quad c_k \in \mathbb{R}_+.$$

При $\widetilde{E} = \Lambda^q(u)$, $X = L_q(\widetilde{w})$, оценка примет вид

$$\left\| \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\|_{L_q(\widetilde{w})} \leqslant c_k \|\sigma\|_{\Lambda^q(v)}.$$

Но

$$\left\| \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right\|_{L_q(\widetilde{w})} = \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^q \widetilde{w}(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{\Phi_0(t)} \int_0^t \varphi(\tau)\sigma^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left( \int_0^\infty \varphi(\tau)\sigma^{**}(\tau)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} = \|\sigma\|_{\Gamma^q_\varphi(w)}.$$

Отсюда следует

$$\|\sigma\|_{\Gamma^q_\varphi(w)} \leqslant c_k \|\sigma\|_{\Lambda^q(v)}$$

По Замечанию 1.2.1 отсюда следует, что

$$A_3 < \infty,$$

где

$$A_3 := \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q w(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{v(t)}{V^{q'}(t)}\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{q'}} \right\}.$$

$\square$

# Глава 2. Точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца

В данной главе описано точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца. Затем применяется этот результат для оценки аппроксимативных чисел обобщенных потенциалов Бесселя, когда обобщенные потенциалы Бесселя построены по основному весовому пространству Лоренца. Доказана Теорема 2.2.1.

## 2.1 Определения и предварительные сведения

Будем рассматривать случай, когда ассоциированное пространство $E(\mathbb{R}^n)$ является пространством Лоренца: $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$.

Пусть $v > 0$ — измеримая функция на $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим пространство Лоренца $\Lambda^p(v)$ (Определение 1.1.9). Считаем, что

$$0 < V(t) := \int_0^t v(\tau)\, d\tau < \infty, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left[ \frac{V(2t)}{V(t)} \right] < \infty, \tag{2.1}$$

так называемое $\Delta_2$-условие. В этих предположениях $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ является (квази) банаховым пространством, которое дает важный пример перестановочно-инвариантного пространства (сокращенно ПИП) из-за свойства:

$$g^* \leqslant f^*, \quad f \in E(\mathbb{R}^n) \Rightarrow g \in E(\mathbb{R}^n), \quad \|g\|_E \leqslant \|f\|_E,$$

(К. Беннетт и Р. Шарпли [1]). $E' = E'(\mathbb{R}^n)$ является ассоциированным. $E'$ это ПИП (1.5).)

При $1 < p < \infty$ описание ассоциированного пространства для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ было получено Э. Сойером [17]. А именно,

$$\|g\|_{E'} = \sup_{0\leqslant h\downarrow} \frac{\int\limits_0^\infty g^*(\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\left(\int\limits_0^\infty h(\tau)^p v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \approx$$

$$\approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\right)\frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.2)$$

Здесь символ $\approx$ означает, что отношение левой и правой части находятся между положительными константами, зависящими только от $p$ (а не от $v$ или $g$).

**Замечание 2.1.1.** *Обратим внимание, что для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$*

$$E'(\mathbb{R}^n) \neq \{0\} \;\Leftrightarrow\; \exists T > 0 : \int\limits_0^T \frac{t^{p'} v(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)^{p'}} < \infty. \quad (2.3)$$

*Действительно, для $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mu_n(D) = T$, имеем $g(x) = \chi_D(x) \in E'(\mathbb{R}^n)$, поскольку $g^*(\tau) = \chi_{(0,T)}(\tau)$ и*

$$\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \xi, & 0 < \xi \leqslant T, \\ T, & \xi > T; \end{cases}$$

$$\left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \leqslant c_1 \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} =$$

$$= c_1 \int\limits_0^T \frac{\xi^{p'} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} + c_1 T^{p'} \int\limits_T^\infty \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} < \infty,$$

*где*
$$\int_T^\infty \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} = \frac{V(\xi)^{1-p'}}{1-p'}\bigg|_{\xi=T}^{\infty} \leqslant \frac{V(T)^{1-p'}}{p'-1} < \infty.$$

*С другой стороны, если* $\exists g \in E'(\mathbb{R}^n)$, $g \neq 0$, *тогда существует* $c > 0$ *и* $T \in \mathbb{R}_+$ *такой, что* $g^*(\tau) \geqslant c$, $\tau \in (0,T)$. *Тогда*
$$\infty > \left(\|g\|_{E'}\right)^{p'} \geqslant c_2 \int_0^T \left(\int_0^\xi g^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'} \frac{v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}} \geqslant c_2 c^{p'} \int_0^T \frac{\xi^{p'} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}.$$

Всюду в этой главе мы предполагаем, что выполнено условие (2.3).

## 2.2 Доказательство результатов об оценке равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца

**Замечание 2.2.1.** *Пусть в условиях Теоремы 1.2.1* $G \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$ *для* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$, *см.* (1.11), (1.5), (2.1)–(2.3), *а* $f \in E(\mathbb{R}^n)$. *Тогда неравенство* (1.17) *показывает, что свертка* (1.16) *равномерно ограничена. Более того, формула* (1.24) *показывает, что* $\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \to 0$ *при* $t \to +0$, *что подразумевает, что* $u \in C(\mathbb{R}^n)$.

**Теорема 2.2.1.** *Пусть* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ — *пространство Лоренца, см.* (1.11), (1.5), (2.1)–(2.3) *и* $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ *пространство обобщенных бесселевых потенциалов, см.* (1.10);
$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right), \quad \tau \in (0,T); \quad T = V_n R^n;$$
$$\varphi(\tau) = G^*(\tau); \quad \tau > T, \quad (2.4)$$

*где* $V_n$ — *объем n-мерного единичного шара.*

*Кроме того, мы предполагаем, что верна оценка* (1.48)*, ядро $G$ удовлетворяет предположениям Теоремы 1.2.1 и*

$$\sup_{t\in(0,T]}\left\{\frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}<\infty,\quad 0<p\leqslant 1; \tag{2.5}$$

$$\left(\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\frac{\upsilon(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)^{p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty,\quad 1<p<\infty,\quad p'=\frac{p}{p-1}. \tag{2.6}$$

*Тогда верны следующие утверждения:*

*1. $u\in C(\mathbb{R}^n)$;*

*2. Если $0<p\leqslant 1$, то существует $c_3\in\mathbb{R}_+$ такое, что при $0<t<T$*

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant c_3A_p(t)\|u\|_{H^G_{\Lambda^p(\upsilon)}}, \tag{2.7}$$

*где*

$$A_p(t)=\sup_{\xi\in(0,t)}\left\{\frac{1}{V(\xi)^{\frac{1}{p}}}\int\limits_0^{\xi}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{2.8}$$

*3. Если $1<p<\infty$, то существует $c_4\in\mathbb{R}_+$ такое, что при $0<t\leqslant T$*

$$\omega_C^k\left(u;t^{\frac{1}{n}}\right)\leqslant c_4D_p(t)\|u\|_{H^G_{\Lambda^p(\upsilon)}}, \tag{2.9}$$

*где*

$$D_p(t)=\left[\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\xi}\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}\frac{\upsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{V(\xi)^{p'}}+\left(\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{p'}V(t)^{-\frac{p'}{p}}\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.10}$$

*Доказательство.* теоремы 2.2.1

1) По теореме 1.2.1 (см. Замечание 2.2.1) имеем включение

$$H^G_E(\mathbb{R}^n)\subset C(\mathbb{R}^n).$$

В условиях теоремы 2.2.1 имеем эквивалентность (1.8), так что

$$G^*(\tau)\cong\varphi(\tau),\quad 0<\tau\leqslant T=V_nR^n.$$

Вместе с равенством $\varphi(\tau) = G^*(\tau)$, $\tau > T$, получаем

$$\varphi(\tau) \cong G^*(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_+. \tag{2.11}$$

Таким образом, применение Теоремы 1.2.1 и замечания 2.2.1 к функции $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$, дает: $u \in C(\mathbb{R}^n)$ и формулы (1.16)–(1.25), (1.48), (1.49) верны. Здесь $u = G * f$, $f \in \Lambda^p(v)$. Теперь воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\, d\tau = \left\{ \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau)\, d\tau}{\|f\|_{\Lambda^p(v)}} \right\} \|f\|_{\Lambda^p(v)}.$$

Тогда согласно (1.49) при $0 < t < T$

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 \sup_{g \in \Lambda^p(v)} \left\{ \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) g^*(\tau)\, d\tau}{\|g\|_{\Lambda^p(v)}} \right\} \|f\|_{\Lambda^p(v)}. \tag{2.12}$$

Обозначим

$$g^* = h \in L_P(v); \quad \|g\|_{\Lambda^p(v)} = \left( \int\limits_0^\infty h^p v\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 0 \leqslant h \downarrow;$$

и получим

$$F_t \equiv \sup_{g \in \Lambda^p(v)} \left\{ \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) g^*(\tau)\, d\tau}{\|g\|_{\Lambda^p(v)}} \right\} = \sup_{0 \leqslant h \downarrow} \left\{ \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) h(\tau)\, d\tau}{(\int\limits_0^\infty h^p v\, d\tau)^{\frac{1}{p}}} \right\}. \tag{2.13}$$

Здесь числитель не зависит от значений $h(\tau)$ при $\tau \in (t,\infty)$. Следовательно, “sup” реализуется на функциях $h$, таких что $h(\tau) = 0$ при $\tau \in (t,\infty)$. Это означает, что

$$\sup_{g \in \Lambda^p(v)} \left\{ \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) g^*(\tau)\, d\tau}{\|g\|_{\Lambda^p v}} \right\} = \sup_{0 \leqslant h \downarrow} \frac{\int\limits_0^t \varphi(\tau) h(\tau)\, d\tau}{\left(\int\limits_0^t h^p v d\tau\right)^{\frac{1}{p}}} \equiv B(t). \tag{2.14}$$

2) Пусть $0 < p \leqslant 1$. Для вычисления $B(t)$ применим результат [27]. А именно, где

$$B(t) \equiv \sup_{\xi \in (0,t)} \left\{ \frac{\int\limits_0^{\xi} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(\int\limits_0^{\xi} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{p}}} \right\} = A_p(t).$$

Из (2.12)–(2.14) получаем для $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0,T]$,

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 A_p(t) \|f\|_{\Lambda^p(v)}, \quad 0 < p \leqslant 1.$$

Здесь $f \in \Lambda^p(v)$ — любая функция такая, что $G * f = u$ для данного $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, возмем "inf" по множеству таких функций $f \in \Lambda^p(v)$ для данного $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$, и получаем

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 A_p(t)\, \|u\|_{H_E^G}, \quad E = \Lambda^p(v). \tag{2.15}$$

Это оценка (2.7) с постоянной $c_3$ из (1.49).

3) Пусть $1 < p < \infty$. Положим в равенстве (2.13)

$$\varphi_t(\tau) = \varphi(\tau)\chi_{(0,t)}(\tau); \quad 0 \leqslant \varphi_t(\tau) \downarrow \quad \Rightarrow \quad \varphi_t^*(\tau) = \varphi_t(\tau).$$

Тогда

$$F_t = \sup_{0 \leqslant h \downarrow} \left\{ \frac{\int\limits_0^{\infty} \varphi_t(\tau) h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(\int\limits_0^{\infty} h^p v\,\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{p}}} \right\} = \sup_{0 \leqslant h \downarrow} \left\{ \frac{\int\limits_0^{t} \varphi_t^*(\tau) h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(\int\limits_0^{\infty} h^p v\,\mathrm{d}\tau)^{\frac{1}{p}}} \right\}.$$

Теперь применим формулу (2.2) с $g(\tau) = \varphi_t(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, и получим

$$F_t = \|\varphi_t\|_{E'} \cong \left( \int\limits_0^{\infty} \left( \int\limits_0^{\xi} \varphi_t(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right)^{p'} \frac{v(\xi) d\xi}{V(\xi)^{p'}} \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.16}$$

Отметим, что

$$\int\limits_0^{\xi} \varphi_t(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^{\xi} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \xi \in (0,t); \quad \int\limits_0^{\xi} \varphi_t(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^{t} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad \xi \geqslant t.$$

Подставляем эти равенства в (2.16) и видим, что $F_t \cong D_p(t)$, $0 < t \leqslant T$. Поэтому из (2.12), (2.13) следует

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 F_t \|f\|_{\Lambda^p(v)} \leqslant c_4 D_p(t) \|f\|_{\Lambda^p(v)}, \quad t \in (0,T].$$

Отсюда аналогично (2.15) получаем, что при $t \in (0,T]$.

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_4 D_p(t)\, \|u\|_{H_E^G}, \quad E = \Lambda^p(v). \tag{2.17}$$

Это завершает доказательство Теоремы 2.2.1. □

**Замечание 2.2.2.** *Конкретизируем ответы в классических случаях: для классического пространства потенциалы полагаем*

$$\varphi(t) = t^{\frac{\alpha}{n}-1}, \quad 0 < \alpha < n, \tag{2.18}$$

*см. Замечание 1.3.1; для классического пространства Лоренца* $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(v)$ *и* $v(t) = t^{\beta}$. *В этом случае условие нетривиальности* $E'(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$, *см.* (2.3) *будет следующим:* $-1 < \beta \leqslant p - 1$ *для* $0 < p \leqslant 1$; $-1 < \beta < p - 1$ *для* $p > 1$.

Во всех формулах

$$\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{n}{\alpha} t^{\frac{\alpha}{n}}, \quad t \in (0,T); \tag{2.19}$$

и условие (1.48) будет таким: $0 < \alpha < k$. В ответ получим

$$A_p(t) = \frac{(\beta+1)}{\alpha} t^{\left(\frac{\alpha}{n}-\beta-1\right)}, \quad \frac{\alpha}{n} \geqslant \beta + 1, \quad 0 < p \leqslant 1; \tag{2.20}$$

$D_p(t) \cong t^{\left(\frac{\alpha}{n}-\beta-1\right)}$; $\frac{\alpha}{n} \geqslant \frac{\beta+1}{p}$, $1 < p < \infty$. Доказательство результатов об оценке равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца.

## 2.3 Доказаны теоремы об оценке аппроксимативных чисел оператора вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных функций

**Определение 2.3.1.** [18] *Для (квази)нормированного функционального пространства $X$ на $\mathbb{R}^n$, с $X \hookrightarrow C$, его оболочкой модулей непрерывности $\xi_C^X : (0,\infty) \to (0,\infty]$ назовем функцию*

$$\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega(f,t)}{t}, \quad t > 0, \tag{2.21}$$

*где* $\omega(f,t) = \sup\limits_{|h|\leqslant t}\sup\limits_{x\in R^n} |(f+h) - f(x)|$*,* $t > 0$*.*

**Определение 2.3.2.** [18] *Мы также можем определить мажорантную функцию*

$$e^X(t) = t\xi_C^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \omega(f,t), \quad t \geqslant 0, \tag{2.22}$$

*неотрицательная, монотонно возрастающая функция. Кроме того, можно также рассмотреть оболочку модулей гладкости, адаптированную к модулям гладкости более высокого порядка,*

$$\xi_{C,k}^X(t) = \sup_{\|f\|_X \leqslant 1} \frac{\omega_C^k(f,t)}{t^k} = t^{-k} e_k^X(t), \quad t \geqslant 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

В частности, мы обозначаем $\xi_{C,1}^X = \xi_C^X$. Мы хотим сосредоточиться на связи между оболочками непрерывности и аппроксимативными числами компактных вложений. Напомним вкратце это понятие.

**Определение 2.3.3.** [18] *Пусть $A_1$, $A_2$ — два банаховых пространства и пусть $T \in L(A_1,A_2)$ — линейный и непрерывный оператор из $A_1$ в $A_2$. Аппроксимативные числа оператора $T$ определяются выражением:*

$$a_m = \inf\Big\{ \|T - S\| \ : \ S \in L(A_1,A_2), \operatorname{rank} S < m \Big\}. \tag{2.24}$$

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ некоторая ограниченная область, $X$ — некоторое функциональное пространство на $\mathbb{R}^n$, а $X(\Omega)$ — сужение $X(\mathbb{R}^n)$ на $\Omega$. Предположим, что $X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$. Тогда существует $c > 0$ такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$, см. [19]

$$a_{m+1}\Big(id : X(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant cm^{-\frac{1}{n}}\xi_{C,k}^{X}\Big(m^{-\frac{1}{n}}\Big). \tag{2.25}$$

**Теорема 2.3.1.** *Пусть $E = \Lambda^p(v)$ — пространство Лоренца и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая ограниченная область. Здесь мы сохраняем введенные выше обозначения и предполагаем, что выполнены условия Теоремы 2.2.1. Тогда, есть следующие оценки.*

1. *Если $0 < p \leqslant 1$, то существует $c_0 \in \mathbb{R}_+$ такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_0 A_p\Big(m^{-1}\Big); \tag{2.26}$$

2. *Если $1 < p < \infty$, то существует $c_1 \in \mathbb{R}_+$ такое, что*

$$a_{m+1}\Big(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c_1 D_p\Big(m^{-1}\Big). \tag{2.27}$$

*Доказательство.* Теоремы 2.3.1.

1. Если $0 < p \leqslant 1$, из неравенства (2.7) можно записать

$$\frac{\omega_C^k\Big(u; t^{\frac{1}{n}}\Big)}{t^{\frac{k}{n}}} \leqslant c_3 \frac{A_p(t)}{t^{\frac{k}{n}}} \|u\|_{H_E^G}.$$

Тогда подставим в неравенство (2.22)

$$\xi_{C,k}^{H_E^G}\Big(t^{\frac{1}{n}}\Big) = \sup_{\|u\|_{H_E^G \leqslant 1}} \frac{\omega_C^k\Big(u, t^{\frac{1}{n}}\Big)}{t^{\frac{k}{n}}} \leqslant c_3 \frac{A_p(t)}{t^{\frac{k}{n}}}.$$

Имеем $H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$. Итак, используя [18; 19], что существует $c > 0$ такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$,

$$a_{m+1}\Big(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant cm^{-\frac{1}{n}}\xi_{C,k}^{H_E^G}\Big(m^{-\frac{1}{n}}\Big) \leqslant c_0 A_p\Big(m^{-1}\Big),$$

где $c_0 = cc_3 m^k$.

Более того, подставим сюда формулу (2.23), и получим

$$e_k^{H_E^G}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) := t^{\frac{k}{n}} \xi_{C,k}^{H_E^G}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_3 A_p(t).$$

2. Если $1 < p < \infty$, из неравенства (2.9) можно записать

$$\frac{\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right)}{t^{\frac{k}{n}}} \leqslant c_4 \frac{D_p(t)}{t^{\frac{k}{n}}} \|u\|_{H_E^G}.$$

Тогда подставим в неравенство (2.23)

$$\xi_{C,k}^{H_E^G}\left(t^{\frac{k}{n}}\right) = \sup_{\|u\|_{H_E^G} \leqslant 1} \frac{\omega_C^k\left(u, t^{\frac{1}{n}}\right)}{t^{\frac{k}{n}}} \leqslant c_4 \frac{D_p(t)}{t^{\frac{k}{n}}}. \tag{2.28}$$

Тогда, аналогично предыдущему

$$a_{m+1}\left(id : H_E^G(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\right) \leqslant c m^{-\frac{1}{n}} \xi_{C,k}^{H_E^G}\left(m^{-\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_1 D_p(m^{-1});, \tag{2.29}$$

где $c_1 = cc_4 m^k$.

Более того, подставим сюда формулу (2.23), и получим

$$e_k^{H_E^G}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) := t^{\frac{k}{n}} \xi_{C,k}^{H_E^G}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_4 D_p(t).$$

□

## 2.4 Некоторые следствия

В этом параграфе рассмотрены оболочки модулей непрерывности и оценены аппроксимативные числа некоторых вложений. Для пространств классических бесселевых потенциалов мы используем результаты работы [28].

Для вложения $H^{\alpha}_{E}(\mathbb{R}^n)\subset\mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ мы должны предполагать, что

$$\tau^{\frac{\alpha}{n-1}}\in\widetilde{E}'(0,T),\quad T\in\mathbb{R}_{+}. \tag{2.30}$$

**Предложение 2.4.1.** [28] *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,n)$, $E(\mathbb{R}^n)$ — ПИП. Предположим, что* (2.30) *выполнено. Тогда*

$$e_k^{H^{\alpha}_{E}}\left(t^{\frac{1}{n}}\right)\asymp\left\|\frac{\tau^{\frac{\alpha-k}{n}-1}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+t^{-\frac{k}{n}}}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)},\quad t\in(0,T); \tag{2.31}$$

*и*

$$\xi_{C,k}^{H^{\alpha}_{E}}\left(t^{\frac{1}{n}}\right)\asymp t^{-\frac{k}{n}}\left\|\frac{\tau^{\frac{\alpha-k}{n}-1}}{\tau^{-\frac{k}{n}}+t^{-\frac{k}{n}}}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)},\quad t\in(0,T). \tag{2.32}$$

*В частности, получаем*

$$\xi_{C}^{H^{\alpha}_{E}}\left(t^{\frac{1}{n}}\right)\asymp t^{-\frac{1}{n}}\left\|\frac{\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}}{\tau^{-\frac{1}{n}}+t^{-\frac{1}{n}}}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}\asymp t^{-\frac{k}{n}}\left\|\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}+\left\|\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}. \tag{2.33}$$

*Доказательство.* Ясно, что (2.32) является прямым следствием (2.31) и определения (2.22), тогда как (2.33) является частным случаем (2.32). Заметим, что вторая эквивалентность связана с тем, что функция

$$h_t(\tau)=\frac{\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}}{\tau^{-\frac{1}{n}}+t^{-\frac{1}{n}}},\quad t\in(0,T)$$

монотонно убывает, поэтому

$$h_t^{*}(\tau)=h_t(\tau)\simeq\begin{cases}\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}, & 0<\tau\leqslant t,\\ t^{\frac{1}{n}}\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}, & \tau>t.\end{cases} \tag{2.34}$$

Таким образом, остается показать (2.31). Пусть $u\in H^{\alpha}_{E}(\mathbb{R}^n)$ с $\|u\|_{H^{\alpha}_{E}}\leqslant 1$. Ввиду (1.64) отсюда следует существование некоторого $f\in E\,(\mathbb{R}^n)$ с $\|f\|_E\leqslant 1$. Кроме того, из неравенства Гельдера заключаем

$$\int\limits_0^T\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}f^{*}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\leqslant\left\|\tau^{\alpha/n-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}\|f^{*}(\tau)\|_{\widetilde{E}(0,T)}\leqslant\left\|\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}$$

ввиду (1.6). Таким образом, (1.15) выполнено, а из (1.24) $\left(\varphi(\tau) \cong \tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\right)$ так же, как и выше, следует, что

$$\omega_C^k\left(u; t^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c \left\| \frac{\tau^{\frac{\alpha-k}{n}-1}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right\|_{\widetilde{E}'(0,T)}, \tag{2.35}$$

равномерно по $u \in H_E^\alpha(\mathbb{R}^n)$ с $\|u\|_{H_E^\alpha} \leqslant 1$. Это доказывает верхнюю оценку в (2.31).

Для обратной оценки вернемся к постановке Замечания 1.3.3 и начнем с некоторой непрерывной справа, неотрицательной, монотонно убывающей функции $\eta$ на $(0,T)$ с

$$\eta(\tau) = 0, \quad \tau \geqslant T, \quad \text{и} \quad \|\eta\|_{\widetilde{E}(\mathbb{R}_+)} = \|\eta\|_{\widetilde{E}(0,T)} = 1,$$

напомним (1.6). Таким образом, неравенство Гёльдера вместе с предположением (2.30) приводят к оценке

$$\int_0^T \tau^{\alpha/n-1}\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqslant \left\|\tau^{\alpha/n-1}\right\|_{\widetilde{E}'(0,T)},$$

так, что выполняется $\int_0^\infty \tau^{\alpha/n-1}\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty$ и можно применить

$$\omega_C^k\left(u_0; t^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant c \int_0^T \frac{\tau^{\frac{\alpha-k}{n}-1}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,T],$$

где $u_0$ — потенциал Бесселя специального вида (см. [28]). Более того, поскольку

$$\|u_0\|_{H_E^\alpha} = \|f_0\|_E = \|f_0{}^*\|_{\check{E}(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|\eta\|_{\check{E}(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1,$$

мы приходим к оценке

$$e_k^{H_E^\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant c \int_0^T \frac{\tau^{\frac{\alpha-k}{n}-1}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}}\eta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

для любого такого $\eta$. Взяв супремум по $\eta$, принцип двойственности в ПИП завершает доказательство (2.31). □

**Замечание 2.4.1.** [28] *Если* $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ *и* $0 < \alpha < n$, *то* (1.65) *можно переписать в виде* $H_E^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n) \ \Leftrightarrow\ \alpha > \frac{n}{p}$.

**Пример 2.4.1.** [28] Вернемся к нашему стандартному примеру $E = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Как уже отмечалось в замечании 2.4.1, нам необходимо обеспечить $H_E^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$. Тогда (см. Следствие 1.3.4 совпадает с известным вложением Соболева в этом случае.

$$H_E^\alpha(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Lip}^1(\mathbb{R}^n) \ \text{тогда, и только тогда, когда}\ \alpha > \frac{n}{p} + 1.$$

Что касается оболочки модулей непрерывности, то условие

$$\tau^{\alpha/n-1} \in \widetilde{E}'(0,T), \quad \text{но} \quad \tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1} \notin \widetilde{E}'(0,T), \quad T \in \mathbb{R}_+, \tag{2.36}$$

эквивалентно тому, что $\frac{n}{p} < \alpha < \frac{n}{p} + 1$, и (2.33)

$$\xi_C^{H_E^\alpha}\left(t^{\frac{1}{n}}\right) \simeq \begin{cases} t^{\frac{\alpha-1}{n}-\frac{1}{p}}, & \frac{n}{p} < \alpha < \frac{n}{p} + 1, \\ |\log t|^{\frac{1}{p'}}, & \alpha = \frac{n}{p} + 1. \end{cases} \tag{2.37}$$

поскольку

$$\left\|\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\right\|_{L_{p'}(0,t)} \simeq t^{\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}}, \quad \text{и} \quad \left\|\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}\right\|_{L_{p'}(t,T)} \simeq \begin{cases} t^{\frac{\alpha-1}{n}-\frac{1}{p}}, & \alpha < \frac{n}{p} + 1, \\ |\log t|^{\frac{1}{p'}}, & \alpha = \frac{n}{p} + 1. \end{cases}$$

**Пример 2.4.2.** [28] Пусть $\alpha \in (0,n)$, $E(\mathbb{R}^n)$ — ПИП и пусть выполняется (2.36). Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$, где $k_0 \simeq T^{-1}$. Тогда для $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ получаем, что

$$a_k\left(id : H_E^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\right) \leqslant c\left\|\frac{\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}}{\tau^{-\frac{1}{n}} + k^{-\frac{1}{n}}}\right\|_{\widetilde{E}'\left(0,\frac{1}{k_0}\right)}. \tag{2.38}$$

В частности, если,

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\frac{\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}}{\tau^{-\frac{1}{n}} + k^{-\frac{1}{n}}}\right\|_{\widetilde{E}'\left(0,\frac{1}{k_0}\right)} = 0,$$

тогда $id :\ H_E^\alpha(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$ компакт.

**Замечание 2.4.2.** [28] *Ввиду предложения 2.4.1 очевидно, что (2.38) можно заменить на*

$$a_k\Big(id\,:\,H^{\alpha}_{E}(\Omega)\hookrightarrow C(\Omega)\Big)\leqslant c\left\|\tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\right\|_{\widetilde{E}'\left(0,\frac{1}{k}\right)}+k^{\frac{-1}{n}}\left\|\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}\right\|_{\widetilde{E}'\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k_0}\right)},\qquad(2.39)$$

*где* $k>k_0$.

**Пример 2.4.3.** [28] В терминах нашего стандартного примера $E=L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$, мы уже подробно вычислили в примере 2.4.1 слагаемые в правой части (2.39), что приводит к оценке

$$a_k\Big(id\,:\,H^{\alpha}_{E}(\Omega)\hookrightarrow C(\Omega)\Big)\leqslant ck^{-\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}},\qquad \frac{n}{p}<\alpha<\frac{n}{p}+1.$$

**Замечание 2.4.3.** [28] *Для пространства* $X\hookrightarrow L_\infty$*, его (локальная) оболочка модулей непрерывности* $\xi^X_C(t)\,:\,(0,\infty)\to[0,\infty]$ *имеет вид*

$$\xi^X_C(t)=\sup_{\|f\|_X\leqslant 1} f^*(\tau),\qquad t>0.$$

*В частности, когда* $X=E$ *— ПИП с фундаментальной функцией* $\varphi_E(t)=\left\|\chi_{A_t}\right\|_E$*, где* $|A_t|=t$*, то*

$$\xi^X_C(t)\simeq\frac{1}{\varphi_E(t)}.\qquad(2.40)$$

**Пример 2.4.4.** [28] Наконец, мы сосредоточимся на частном случае $E=\Lambda^p(v)$, $1<p<\infty$, как введено в (1.11). Тогда $E'=\Gamma^{p'}(w)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$,

$$w(\tau)=\frac{\tau^{p'}v(\tau)}{V(\tau)^{p'}},$$

где

$$\|f\|_{\Gamma^{p'}(w;(0,T))}=\left(\int\limits_0^T f^{**}(\tau)^{p'}w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}};\quad V(\tau)=\int\limits_0^\tau v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Таким образом, с учетом (2.34) мы можем переписать (2.38) в этом случае в виде

$$a_k\Big(id : H^{\alpha}_{\Lambda^p(v)}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c\Big\|h_{1/k}\Big\|_{\Gamma^{p'}\left(w;\left(0,\frac{1}{k_0}\right)\right)} \simeq$$

$$\simeq \left(\int\limits_0^{\frac{1}{k_0}} h^{**}_{1/k}(\tau)^{p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (2.41)$$

Из $h^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t h^*(s)\,\mathrm{d}s$ мы получаем из (2.34), что

$$h^{**}_{1/k}(\tau) \simeq \tau^{\frac{\alpha}{n}-1}\chi_{\left(0,\frac{1}{k}\right]}(\tau) + \chi_{\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k_0}\right)}(\tau)\begin{cases} k^{\frac{-\alpha}{n}}\tau^{-1}, & \alpha \in (0,1),\\ k^{\frac{-1}{n}}\tau^{-1}\big(1+\log(k\tau)\big), & \alpha = 1,\\ k^{\frac{-1}{n}}\tau^{\frac{\alpha-1}{n}-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Пусть $W(\tau) = \int_0^\tau w(s)\,\mathrm{d}s$ и определим последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ формулой

$$\lambda_0 = \frac{1}{k_0}, \quad W\big(\lambda_n\big) = \frac{1}{2}W\big(\lambda_{n-1}\big) = 2^{-n}W\left(\frac{1}{k_0}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lambda_n > \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, причем $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$. Ввиду монотонности $h^{**}_{1/k}(\tau)$, таким образом, можно продолжить (2.40) на

$$a_k\Big(id : H^{\alpha}_{\Lambda^p(v)}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\Big) \leqslant c\left(\int\limits_0^{1/k_0} h^{**}_{1/k}(\tau)^{p'} w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{p'}} \simeq$$

$$\simeq W\left(\frac{1}{k_0}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(2^{-n}h^{**}_{1/k}\big(\lambda_n\big)\Big)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Пусть, как и в замечании 2.4.2, фундаментальную функцию $\Gamma^{p'}(w)$ обозначим через

$$\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t) = \Big\|\chi_{A_t}\Big\|_{\Gamma^{p'}(w)}, \text{ где } |A_t| = t.$$

Тогда непосредственный расчет дает

$$\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t) = \left( \int\limits_0^{1/k_0} \min\left(1, \frac{t}{\tau}\right)^{p'} w(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p'}},$$

который — с использованием понятия так называемой (локальная) оболочки функции непрерывности $\xi_C^{\Gamma^{p'}(w)}(t)$ и (2.40) — приводит к

$$\frac{1}{\xi_C^{\Gamma^{p'}(w)}(t)} \simeq \varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t) = \left( \int\limits_0^{1/k_0} \min\left(1, \frac{t}{\tau}\right)^{p'} w(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Хорошо известно, что $\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)$ возрастает по $t$, тогда как $\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)t^{-1}$ убывает. Предположим дополнительно, что

$$\lim_{t\to 0} \varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t) = 0, \text{ и } \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)}{t} = \infty.$$

Снова определим последовательность положительных чисел $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ индуктивно по формуле

$$\mu_n = \frac{1}{k_0},$$

$$\mu_{n+1} = \sup\left\{ t \, : \, \max\left( \frac{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)}{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(\mu_n)}, \frac{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(\mu_n)}{\mu_n} \frac{t}{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)} \right) = \frac{1}{2} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда $\mu_n > \mu_{n+1} > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, причем $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Снова монотонность $h_{1/k}^{**}(\tau)$ следует, что (2.41) можно распространить на

$$a_k\left(id \, : \, H^{\alpha}_{\Lambda^p(v)}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)\right) \leqslant c\left( \int\limits_0^{1/k_0} h_{1/k}^{**}(\tau)^{p'} w(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \simeq$$

$$\simeq \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{h_{1/k}^{**}(\mu_n)}{\xi_C^{\Gamma^{p'}(w)}(\mu_n)} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где мы снова использовали (2.40). Заметим, что построение последовательности $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ в [29] приводится, кроме того, возможность разложения

$\mathbb{N}_0$ на непересекающиеся множества индексов $I_n \subset \mathbb{N}_0$, $m = 1, 2$, т. е. с $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ и $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}_0$, такие что

$$\begin{cases} \varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t) \simeq \varphi_{\Gamma^{p'}(w)}\left(\mu_n\right), & \text{если} \quad t \in \left[\mu_{n+1}, \mu_n\right], \quad n \in I_1, \\ \frac{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}(t)}{t} \simeq \frac{\varphi_{\Gamma^{p'}(w)}\left(\mu_n\right)}{\mu_n}, & \text{если} \quad t \in \left[\mu_{n+1}, \mu_n\right], \quad n \in I_2. \end{cases}$$

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [20; 21] из списка публикаций автора по теме диссертации.

# Глава 3. Условия локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца

В третьей главе устанавливается условие локализации $\gamma$-средних спектрального разложения по системе фундаментальных функций оператора Лапласа в произвольной многомерной области. Результат получен в терминах принадлежности разлагаемой функции пространству обобщенных потенциалов Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца. Мы сохраняем и добавляем к понятиям и определениям, приведенным выше.

## 3.1 Обоснование свойств локализации

Пусть $\mathbb{R}^n$ мерное евклидово пространство и при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}; & 1 \leqslant p < \infty; \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{|f(x)|\right\}; & p = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, $(-\hat{\Delta})$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа в $n$-мерной области $D$; $y(x,t)$ — упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(F)$ относительно $(-\hat{\Delta})$, $\mathrm{d}\rho(t)$ — соответствующая спектральная мера, а $\left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^{m}$ — система фундаментальных функций. Таким образом, при любом фиксированном и $t \geqslant 0$, $y_i(\bullet,t) \in C^\infty(F)$ и

$$\Delta y_i(x,t) + t^2 y_i(x,t) = 0, \quad x \in F. \tag{3.2}$$

Здесь $m \leqslant \infty$ — кратность представления. Для каждого $f \in L_2(F)$ определены преобразования Фурье

$$\hat{f} := \left\{\hat{f}_i(t)\right\}_{i=1}^m; \quad \hat{f}_i(t) = \int_F f(x) y_i(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

и спектральное разложение по системе $y(x,t) := \left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^m$

$$S_\mu(f;x) = \int\limits_0^\mu \hat{f}(t) y(x,t)\,\mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{3.3}$$

где

$$\hat{f} y = \sum_{i=1}^m \hat{f}_i y_i.$$

Пусть $s > 0$ и $\psi$ — функция на $(0,1]$ со свойствами: $0 < \psi \uparrow$ при $(0,1]$ и $\psi(t) \cong \psi(\tau)$, если $t \cong \tau$. Кроме того, для $s > 0$ положим $s_0 = s$ если $s \leqslant 1$; $s_0 = 1$, если $s > 1$ и потребуем, чтобы

1. $$\psi_{s_0}(t) = \int\limits_0^t \tau^{s_0-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in (0,1]; \tag{3.4}$$

2. $$\psi \in C^2(0,1); \quad \left|\psi'(\tau)\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-1}, \quad \left|\psi(\tau)''\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-2}; \quad \tau \in (0,1], \tag{3.5}$$

3. $$\int\limits_0^1 (1-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Gamma(s). \tag{3.6}$$

Определим $\gamma$ как $s$-й интеграл Римана–Лиувилля.

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0,1]. \tag{3.7}$$

Введем $\gamma$-средние спектрального разложения как

$$\sigma_\mu^\gamma(f,x) = \int_0^\mu \hat{f}(t)y(x,t)\gamma\left(1-\frac{t^2}{\mu^2}\right)\mathrm{d}\rho(t), \quad \mu>0, \tag{3.8}$$

для $f\in L_2(F)$. Мы видим, что $\gamma(1)=1$ и если $\psi(\tau)\equiv\Gamma(s+1)$, $\tau\in(0,1]$, $\gamma(t)=t^s$, то такие $\gamma$-средние сводятся к классическим средним Рисса с порядка $s$, см. [4; 5]. Мы определяем

$$\omega_0(t)=\frac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_{s_0}(t)}, \quad t\in(0,1]. \tag{3.9}$$

Пусть $\alpha$, $\beta\geqslant 0$ такие, что

$$\frac{n-2}{2}-s<\alpha\leqslant\beta<\min\left\{\alpha+\frac{3}{2},\ \frac{n}{2}+1\right\}. \tag{3.10}$$

Пусть функция $\omega$ удовлетворяет условиям

$$\omega(t)t^{-\alpha}\uparrow, \quad \omega(t)t^{-\beta}\downarrow \ \text{ на } \ (0,1] \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+0}\frac{\omega(t)}{\omega_0(t)}=0. \tag{3.11}$$

Пусть $\Omega\subset\subset F$, т. е. $\Omega$ — ограниченная область и $\bar{\Omega}\subset F$,

$$f\in H_2^{\omega(.)}(\Omega)\cap L_2(F). \tag{3.12}$$

**Определение 3.1.1.** *Пространство типа Никольского с обобщенной гладкостью $H_2^{\omega(.)}(\Omega)$ определяется следующим образом:*

$$H_2^{\omega(.)}(\Omega)=\left\{f\in L_2(\Omega)\,:\,\|f\|_{H_2^{\omega(.)}(\Omega)}<\infty\right\}, \tag{3.13}$$

$$\|f\|_{H_2^{\omega(.)}(\Omega)}=\|f\|_{L_2(\Omega)}+\sup_{0<t\leqslant 1}\left[\frac{\omega_{2,\Omega}^k(f;t)}{\omega(t)}\right], \tag{3.14}$$

*где*

$$\omega_{p,\Omega}^k(f;t)=\sup\left\|\Delta_{h,\Omega}^k f\right\|_{L_p(\Omega)}, \quad t>0,$$

*$\omega(t)$ определена в (3.11) и является функцией сравнения для модуля непрерывности порядка $k$ для функции $f\in L_p(\Omega)$ с*

$$\Delta_{h,\Omega}^k f(x)=\begin{cases}\Delta_h^k f(x)=\sum\limits_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}C_k^m f, & [x,x+kh]\subset\Omega;\\ 0; & [x,x+kh]\not\subseteq\Omega.\end{cases} \tag{3.15}$$

**Обоснование свойств локализации**

Предварительные сведения [4; 5].

Мы используем предыдущие обозначения и определения, свойства фундаментальных функций описаны в [4; 5].

1. $y_i(.,t) \in C^\infty(F), \quad \Delta y_i(x,t) + t^2 y_i(x,t) = 0$ на $F$.
2. Справедлива следующая формула среднего значения
$$\int\limits_\theta y_i(x_0 + r\theta, t)\, \mathrm{d}\theta = (2\pi)^{\frac{n}{2}} y_i(x_0,t) \frac{J_{(n-2)/2}(rt)}{(rt)^{(n-2)/2}}, \tag{3.16}$$
где $J_v(.)$ — функция Бесселя. Интеграл вычисляется по всем углам $\theta$ сферической системы координат $(r,\theta)$, $0 < r < \rho(x_0,\partial F)$.
3. Для любой подобласти $\Omega \subset\subset F$, $\mu \geqslant 1$, $V \in [1,\mu]$ системы координат.
$$\sup_{x\in\Omega} \int\limits_{|t-\mu|\leqslant V} |y(x,t)|^2\, \mathrm{d}\rho(t) \leqslant c(\Omega) V \mu^{n-1}. \tag{3.17}$$
4. Для $f \in L_2(\Omega)$ верно равенство Парсеваля.
$$\int\limits_0^\infty \left|\hat{f}(t)\right|^2 \mathrm{d}\rho(t) = \int\limits_F |f(t)|^2\, \mathrm{d}x.$$
5. Если $f \in C_0^\infty(F)$, то для любой подобласти $\Omega \subset\subset F$ справедливо равномерно сходящееся в $\Omega$-разложении
$$f(x) = \int\limits_0^\infty \hat{f}(t) y(x,t)\, \mathrm{d}\rho(t). \tag{3.18}$$

**Интегро-дифференциальные операторы Бесселя [5]**

Пусть $h \in C^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ — конечная функция в окрестности нуля. Определим «производную Бесселя» следующим образом
$$\mathbb{D}^1[h](r) = \left(r^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right) h(r), \quad \mathbb{D}^l = \mathbb{D}\left(\mathbb{D}^{l-1}\right), \quad l = 2,3,\ldots .$$

Введем соответствующий оператор интегрирования

$$\mathbb{T}^a[h](r) = \left(2^{a-1}\Gamma(a)\right)^{-1} \int\limits_0^r h(r^2 - \mathcal{J}^2)^{a-1}\mathcal{J}\,\mathrm{d}\mathcal{J}, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1,$$

$$\mathbb{T}^\ell = \mathbb{T}^a\mathbb{T}^n \text{ для } \ell = n + a, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant a \leqslant 1.$$

Для $\ell = n - a$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$, положим $\mathbb{D}^\ell = \mathbb{D}^n\mathbb{T}^a$. Операторы обратны друг другу, и

$$\mathbb{T}^\ell\mathbb{D}^\ell[h] = \mathbb{D}^\ell\mathbb{T}^\ell[h] = h.$$

Таким образом, мы определяем обозначение $\mathbb{D}^\ell = \mathbb{T}^{-\ell}$ при $\ell < 0$. Операторы могут быть распространяется на более широкие классы функций, для которых введенные формулы имеют смысл.

Справедлива следующая формула (ср. [30; 31])

$$\mathbb{D}^\ell\left[r^q J_q(rt)\right] = t^\ell r^{q-\ell} J_{q-\ell}(rt), \quad q > -1, \quad \ell \in \mathbb{R}^1, \tag{3.19}$$

где операторы действуют в $r$.

**Представление $\gamma$-средних спектрального разложения для финитной функции. Представление Фурье–Бесселя для функции $\gamma$ [5]**

Используя замену переменных в (3.7), мы получаем следующую формулу для дальнейшего использования.

$$\gamma\left(1 - \frac{\tau^2}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)\mu^{2s}} \int\limits_0^\mu (t^2 - \tau^2)^{s-1}\psi\left(1 - \frac{t^2}{\mu^2}\right) t\,\mathrm{d}t. \tag{3.20}$$

Мы также будем использовать следующие обозначения

$$L \equiv L_{s,V}(t,\tau,R) := t^{V+s+1}\tau^{-V} \int\limits_R^\infty r^{1-s} J_{V+s}(tr)\,\mathrm{d}r, \tag{3.21}$$

$$M_R(\mu,\tau) := 2^s\mu^{-2s} \int\limits_0^\mu \psi\left(1 - \frac{t^2}{\mu^2}\right) L_{s,V}(t,\tau,R)\,\mathrm{d}t. \tag{3.22}$$

**Предложение 3.1.1.** [5]. *Для* $s > 0$, $V > -1$ *справедлива следующая формула*

$$\gamma\left(1 - \frac{\tau^2}{\mu^2}\right) = \tau^{-V} \int_0^A \mathcal{P}_\mu^\gamma(r) J_V(r\tau)\, \mathrm{d}r, \quad \tau, \mu > 0, \tag{3.23}$$

*где*

$$\mathcal{P}_\mu^\gamma(r) = \frac{r^{1-s} 2^s}{\mu^{2s}} \int_0^\mu t^{V+s+1} \psi\left(1 - \frac{t^2}{\tau^2}\right) J_{V+s}(rt)\, \mathrm{d}t. \tag{3.24}$$

**Представление $\gamma$-средних**

Пусть $x_0 \in F$, $f \in C_0^\infty\left(K_{x_0,M}\right)$, где $K_{x_0,M} = \{x : |x - x_0| \leqslant M$, $0 < M < \rho(x_0,\partial F)$ и

$$F(r) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} r^{n-2} \int_\theta f(x_0 + r\theta)\, \mathrm{d}r. \tag{3.25}$$

Положим $x = x_0 + r\theta$ в (3.18) и проинтегрируем относительно $\theta$. В силу равномерной сходимости интеграл с.р.т. $\theta$ можно взять внутрь и применить формулу среднего значения (3.16) Получим

$$F(r) = \int_0^\infty \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \tau^{(2-n)/2} \left[ r^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r\tau) \right] \mathrm{d}\rho(\tau).$$

Для $f \in C_0^\infty\left(K_{x_0,M}\right)$ такое разложение быстро сходится. Применение оператора $\mathbb{D}^\ell$, $\ell \in \mathbb{R}^1$ под знаком интеграла относительно $\tau$ и учитывая уравнение (3.19), получаем

$$\mathbb{D}^\ell F(r) = \int_0^\infty \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \tau^{-V} r^V J_V(r\tau)\, \mathrm{d}\rho(\tau), \quad V = \frac{n-2}{2} - \ell. \tag{3.26}$$

**Предложение 3.1.2.** *Пусть* $x_0 \in F$, $f \in C_0^\infty\left(K_{x_0,M}\right)$, $M < \rho(x_0,\partial F)$, $s > 0$, $\ell < \frac{n}{2}$, $V = \frac{n-2}{2} - \ell$, $\delta = V + 1/2 - s \leqslant 0$. *Тогда*

$$\sigma_\mu^\gamma(f,x_0) = \int_0^\infty r^{-V} \mathbb{D}^\ell F(r) \mathcal{P}_\mu^\gamma(r)\, \mathrm{d}r, \tag{3.27}$$

*где* $\mathcal{P}_\mu^\gamma(r)$ *имеет вид* (3.24).

*Доказательство.* Для $A > 0$ обозначим

$$K_A(\mu) = \int_0^A r^{-V} \mathbb{D}^{\ell} F(r) \mathcal{P}_{\mu}^{\gamma}(r)\, \mathrm{d}r.$$

Подставим сюда быстро сходящееся разложение (3.26)

$$\mathcal{K}_A(\mu) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \left[ \int_0^{\infty} \tau^{-V} \mathcal{P}_{\mu}^{\gamma}(r) J_V(r\tau)\, \mathrm{d}r \right] \mathrm{d}\rho(\tau).$$

Внутренний интеграл есть $\mathcal{H}_A(\mu,\tau) = \gamma\left(1 - \frac{\tau^2}{\mu^2}\right) - \mathcal{M}_A(\mu,\tau)$ (см. [5]), и уравнения (3.8) дает

$$\mathcal{K}_A(\mu) = \sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0) - \int_0^{\infty} \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \mathcal{M}_A(\mu,\tau)\, \mathrm{d}\rho(\tau).$$

Для доказательства соотношения (3.27) нам нужно показать, что

$$\sigma_A(\mu) := \sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0) - \int_0^{\infty} \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \mathcal{M}_A(\mu,\tau)\, \mathrm{d}\rho(\tau) \to 0 \ \text{ при } \ A \to \infty. \tag{3.28}$$

Доказательство соотношения (3.28) зависит от предложения 3.1.4. □

**Следствие 3.1.1.** *Пусть в предложении 3.1.2* $f(x) \equiv 0$, *если* $|x - x_0| \leqslant R$ *для* $0 < R < M$. *Тогда*

$$\sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0) = \int_R^{\infty} r^{-V} \mathbb{D}^{\ell} F(r) \mathcal{P}_{\mu}^{\gamma}(r)\, \mathrm{d}r. \tag{3.29}$$

На самом деле в (3.27), $\mathbb{D}^{\ell} F(r) \equiv 0$ при $0 < r < R$.

**Предложение 3.1.3.** *Пусть в предложении 3.1.2,* $f(x) \equiv 0$, *если* $|x - x_0| \leqslant R$ *для* $0 < R < M$. *Тогда справедливо представление*

$$\sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\tau) y(x_0,\tau) \mathcal{M}_A(\mu,\tau)\, \mathrm{d}\rho(\tau). \tag{3.30}$$

*Ниже мы даем оценки значения* $\mathcal{M}_A(\mu,\tau)$ *во всех областях аргументов. Оценки необходимы для изучения свойств* $\sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0)$ (3.29).

**Предложение 3.1.4.** *Пусть* $\xi = \frac{V+1}{2} - s$

*1. При* $\mu \geqslant \frac{3}{R}$, $0 < \tau < 1/R$, $\xi \leqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\left|\mathcal{M}_R(\mu,\tau)\right| \leqslant c_1(\mu R)^{\xi}\psi_1\left(\frac{1}{\mu R}\right). \tag{3.31}$$

*2. При* $\mu \geqslant \frac{1}{R}$, $\tau > 1/R$ *справедлива оценка*

$$\left|\mathcal{M}_R(\mu,\tau)\right| \leqslant c_2 R^{-s}\mu^{\xi+1}\psi_1\left(\frac{1}{\mu R}\right)\tau^{-\left(V+\frac{1}{2}\right)}|\mu-\tau|^{-1}, \quad |\mu-\tau| > 1/R, \tag{3.32}$$

$$\left|\mathcal{M}_R(\mu,\tau)\right| \leqslant c_3 R^{s_0-s}\mu^{\xi+s_0}\psi_{s_0}\left(\frac{1}{\mu R}\right)\tau^{-\left(V+\frac{1}{2}\right)}|\mu-\tau|^{-1},$$

$$|\mu-\tau| \leqslant 1/R, \tag{3.33}$$

*где* $c_1$, $c_2$, $c_3$ *не зависят от* $\tau$, $\mu$, $R$.

**Предложение 3.1.5.** *Пусть* $0 < \mu < 3R$, $\xi = V + \frac{1}{2} - s$. *Тогда*

$$\left|\mathcal{M}_R(\mu,\tau)\right| \leqslant c_1, \ \text{ если } \ 0 < \tau \leqslant 2\mu, \quad \xi \leqslant 0, \tag{3.34}$$

$$\left|\mathcal{M}_R(\mu,\tau)\right| \leqslant c_2\mu^{V+\frac{3}{2}}\tau^{-\left(V+\frac{3}{2}\right)}, \ \text{ если } \ \tau > 2\mu, \quad V \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{3.35}$$

*где* $c_1$, $c_2$ *не зависят от* $\tau$, $\mu$, $R$.

**Предложение 3.1.6.** *Пусть* $s > 0$, $\alpha$, $\beta$ *и функция* $\omega(t)$ *удовлетворяют следующим соотношениям*

$$\omega(t)t^{-\alpha} al. \uparrow, \quad \omega(t)t^{-\beta} al. \downarrow \ \text{на } (0,1],$$

$$\omega(t) \leqslant c\omega_0(t), \quad t \in (0,1], \quad \omega_0(t) = \frac{t^{((n-1)/2)+s_0-s}}{\psi_{s_0}(t)}. \tag{3.36}$$

$\Omega \subset\subset G$, $x_0 \in \Omega$, $0 < R < \rho(x_0,\partial\Omega)$, $R \leqslant 1$, $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $f(x) \equiv 0$ *для* $|x - x_0| \leqslant R$. *Тогда для всех* $\mu \geqslant 3/R$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\sigma_{\mu}^{\gamma}(f,x_0)\right| \leqslant c\|f\|_{H_2^{\omega}}\left\{(\mu R)^{s_0-s-1/2}\psi_{s_0}\left(\frac{1}{\mu R}\right)\omega\left(\frac{1}{\mu}\right)(\mu)^{n/2}+\right.$$

$$\left.+(\mu R)^{\xi}\psi_1\left(\frac{1}{\mu R}\right)\omega(R)V_{\beta}(R)\right\}. \tag{3.37}$$

*Здесь c не зависит от* $\mu$, $R$, $f$, $x_0$ *и*

$$V_\beta(R) = \begin{cases} R^{-\frac{n}{2}}, & \beta < \frac{n}{2}, \\ R^{-\frac{n}{2}} \log_2\left(\frac{1}{R}\right), & \beta = \frac{n}{2}, \\ R^\beta, & \beta > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

**Теорема 3.1.1.** [5] *В обозначениях и предположениях параграфа 3.1,* (3.4)–(3.15)*,* (3.36) *пусть* $D \subset \Omega$ *и функция* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *удовлетворяет условию* $f(x) \equiv 0$, $x \in D$. *Тогда каждого компакта* $K \subset D$ *равномерно в* $x \in K$ *выполняется соотношение:*

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma_\mu^\gamma(f,x) = 0. \tag{3.38}$$

**Замечание 3.1.1.** *Теорема 3.1.1 дает условия локализации* $\gamma$*-средних спектрального разложения. В типичных ситуациях имеем* $s < \frac{n-1}{2}$,

$$\psi_{s_0}(t) \cong t^{s_0}\psi(t), \quad \omega_0(t) = \frac{t^{\frac{n-1}{2}-s}}{\psi(t)}, \quad t \in (0,1].$$

*В частности, для средних Рисса* $\psi(t) \equiv \Gamma(s+1)$ *и* (3.11) *дает условие*

$$\omega(t) = \bar{\bar{o}}\left(t^{\frac{n-1}{2}-s}\right).$$

## 3.2 Необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$

**Определение 3.2.1.** *Пусть* $k$, $n \in \mathbb{N}$; $R \in \mathbb{R}_+$. *Говорят, что функция* $\Phi$ *принадлежит классу* $\mathfrak{I}_{k,n}(R)$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

*1.* $0 < \Phi \downarrow$ *on* $(0,R)$*;* $\exists\, c \in \mathbb{R}_+$ *такой, что*

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \leqslant c\,\Phi(r)r^n, \quad r \in (0,R); \quad \int\limits_R^\infty \Phi(\rho)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho < \infty. \tag{3.39}$$

*2.* $G(x) := \Phi(|x|) \in C^k(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$*, и для*

$$G_k(x) := \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha G(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},$$

*справедлива оценка: для некоторых* $c_1 \in \mathbb{R}_+$

$$|G_k(x)| \leqslant c_1\Psi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}; \tag{3.40}$$

*где* $\Psi_k \in C(\mathbb{R}_+)$*,* $T = V_nR^n$

$$\varphi_k(\tau) := \Psi_k\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \tau^{-k/n}\varphi(\tau), \quad \tau \in (0,T]; \tag{3.41}$$

$$\int\limits_T^\infty \varphi_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty. \tag{3.42}$$

Пусть ПИП $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\upsilon)$ — пространство Лоренца, см. обозначения и предположения (2.1), (2.2), (1.5), (1.11) и $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ — соответствующее пространство обобщенных бесселевых потенциалов (1.1), (1.2) с $G(x) = \Phi(|x|)$, $\Phi \in \mathfrak{I}_{n,k}(R)$, см. Определения (1.7) и Теорему 1.2.1. Для $0 < p < \infty$ определим функцию на $(0,T]$, $T = V_nR^n$, Мы требуем, чтобы

$$A_p(t) < \infty, \quad D_p(t) < \infty, \quad \text{см. (2.8), (2.10)}. \tag{3.43}$$

**Теорема 3.2.1.** *Пусть выполнены обозначения и предположения* (1.48)*, и* $V(\infty) = \infty$ *и более того*

$$B_p := sup\left[t^{\frac{1}{2}}V(t)^{\frac{-1}{p}} \ : \ t \in \mathbb{R}_+\right] < \infty, \quad 0 < p \leqslant 2; \tag{3.44}$$

$$B_p := \left(\int\limits_0^\infty \left[t^{\frac{1}{2}}V(t)^{\frac{-1}{p}}\right]^s \frac{\upsilon(t)\,\mathrm{d}t}{V(t)}\right)^{\frac{1}{s}} < \infty, \quad 2 < p < \infty, \quad s = \frac{2p}{p-2}. \tag{3.45}$$

*Тогда для $E(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\upsilon)$ имеется вложение пространства обобщенных бесселевых потенциалов*

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n). \tag{3.46}$$

*Доказательство.* Теоремы 3.2.1. Отметим, что условия (3.44), (3.45) дают критерий вложения

$$E = \Lambda^p(\upsilon) \subset L_2(\mathbb{R}^n). \tag{3.47}$$

Из утверждений следует (см. [27; 32]): пусть

$$C_p = \sup_{f \in \Lambda^p(\upsilon)} \left[ \left( \int_0^\infty f^*(\tau)^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty f^*(\tau)^p \upsilon(\tau) \, d\tau \right)^{-\frac{1}{p}} \right]. \tag{3.48}$$

Тогда,

$$C_p = B_p, \quad 0 < p \leqslant 2; \quad C_p \cong B_p, \quad 2 < p < \infty.$$

Из вложения (3.47) следует вложение

$$H^G_E(\mathbb{R}^n) \subset H^G_{L_2}(\mathbb{R}^n).$$

Но, в предположениях параграфа 3.2 и параграфа 1.2, ядро

$$G(x) = \Phi(|x|) \in L_1(\mathbb{R}^n),$$

и в соответствии с обобщенным неравенством Минковского для сверток

$$f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ u = G * f \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|G\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Это дает вложение (3.46). □

## 3.3 Локализация $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца

Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область, $(-\hat{\Delta})$ — произвольное самосопряженное неотрицательное расширение оператора Лапласа в $n$-мерной области $F$, $y(x,t)$ — упорядоченное спектральное представление пространства $L_2(F)$ относительно $(-\hat{\Delta})$, $\mathrm{d}\rho(t)$ — соответствующая спектральная мера, а $\left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^{m}$ — система собственных функций. Таким образом, при любом фиксированном $t \geqslant 0$,

$$y_i(x,t) \in C^\infty(F) \cap L_2(F), \quad \Delta y_i(x,t) + t^2 y_i(x,t) = 0, \quad x \in F. \tag{3.49}$$

Здесь $m \leqslant \infty$ — кратность представления. Для каждого $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ определены преобразования Фурье

$$\hat{u} := \left\{\hat{u}_i(t)\right\}_{i=1}^{m}, \hat{u}_i(t) = \int_F u(x) y_i(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

и спектральное разложение по системе $y(x,t) := \left\{y_i(x,t)\right\}_{i=1}^{m}$

$$S_\mu(u,x) = \int\limits_0^\mu \hat{u}(t) y(x,t)\,\mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{3.50}$$

$$\hat{u} y = \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i y_i.$$

Пусть $s > 0$ и $\psi$ — функция на $(0,1]$ со свойствами: $0 < \psi \downarrow$ на $(0,1]$ и $\psi(t) \cong \psi(\tau)$, если $t \cong \tau$. Кроме того, для $s > 0$ положим $s_0 = s$ если $s \leqslant 1$;

$s_0 = 1$, если $s > 1$ и потребуем, чтобы

$$1. \quad \psi_{s_0}(t) = \int_0^t \tau^{s_0-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty, \quad t \in (0{,}1]; \tag{3.51}$$

$$2. \quad \psi \in C^2(0{,}1); \quad \left|\psi'(\tau)\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-1}, \quad \left|\psi(\tau)''\right| \leqslant c\psi(\tau)\tau^{-2}, \quad \tau \in (0{,}1]; \tag{3.52}$$

$$3. \quad \int_0^1 (1-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Gamma(s). \tag{3.53}$$

Определим $\gamma$ как $s$-й интеграл Римана–Лиувилля.

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^t (t-\tau)^{s-1}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in (0{,}1]. \tag{3.54}$$

Введем $\gamma$-средние спектрального разложения как

$$\sigma_\mu^\gamma(u,x) = \int_0^\mu \hat{u}(t)y(x,t)\gamma\left(1-\frac{t^2}{\mu^2}\right)\mathrm{d}\rho(t), \quad \mu > 0, \tag{3.55}$$

для $u \in L_2(F) \cap H_E^G(\mathbb{R}^n)$. Мы видим, что $\gamma(1) = 1$ и если $\psi(\tau) \equiv \Gamma(s+1)$, $\tau \in (0{,}1]$, $\gamma(t) = t^s$, то $\gamma$-средние сводятся к классическим средним Рисса порядка $s$, см. [4] и [5].

Мы определяем

$$\omega_0(t) = \frac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_{s_0}(t)}, \quad t \in (0{,}1].$$

Пусть $\alpha$, $\beta \geqslant 0$ такие, что

$$\frac{n-2}{2} - s < \alpha \leqslant \beta < \min\left\{\alpha + \frac{3}{2}, \frac{n}{2} + 1\right\}.$$

Пусть функция $\omega$ удовлетворяет условиям

$$\omega \in C[0{,}1], \quad \omega(t)t^{-\alpha} \uparrow, \quad \omega(t)t^{-\beta} \downarrow \text{ на } (0{,}1],$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\omega(t)}{\omega_0(t)}=0. \tag{3.56}$$

Пусть выполнены условия Теоремы 3.2.1 и $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ — пространство обобщенных Бесселевых потенциалов с $E(\mathbb{R}^n)=\Lambda^p(\upsilon)$. Мы предполагаем, что обозначения и предположения Теоремы 3.1.1, (3.4) – (3.9). В соответствии с утверждениями (2.8) и (2.10) определим

$$\omega(t) := \begin{cases} A_p(t^n), & 0<p\leqslant 1; \\ D_p(t^n), & 1<p<\infty. \end{cases} \tag{3.57}$$

**Теорема 3.3.1.** *По условиям третьей главы и пусть $D$, $F$ — области в $\mathbb{R}^n$, и $D \subset\subset F$.*

$$\lim_{t\to+0}\frac{A_p(t^n)}{\omega_0(t)}=0 \quad \textit{при} \quad 0<p\leqslant 1 \quad \textit{и}$$
$$\lim_{t\to+0}\frac{D_p(t^n)}{\omega_0(t)}=0 \quad \textit{при} \quad 1<p<\infty,$$

*где* $\omega_0(t)=\dfrac{t^{\frac{n-1}{2}+s_0-s}}{\psi_{s_0}(t)}$. *Тогда, если*

$$u\in H_E^G(\mathbb{R}^n);\quad u(x)\equiv 0,\quad x\in D, \tag{3.58}$$

*то для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x\in K$ выполняется соотношение:*

$$\lim_{\mu\to\infty}\sigma_\mu^\gamma(u,x)=0. \tag{3.59}$$

*Доказательство.* Теоремы 3.3.1. По Теореме 3.2.1 имеем вложение (3.46). Это означает, что

$$u\in H_E^G(\mathbb{R}^n)\ \Rightarrow\ u\in L_2(\mathbb{R}^n)\ \Rightarrow\ u\in L_2(F),$$

и $\gamma$-средние спектрального разложения $\sigma_\mu^\gamma(u,x)$ правильно определены формулой

$$\sigma_\mu^\gamma(u,x)=\int_0^\mu \hat{u}(t)y(x,t)\gamma\left(1-\frac{t^2}{\mu^2}\right)d\rho(t), \tag{3.60}$$

где $y(x,t)$ — система фундаментальных функций

$$\hat{u}y = \sum_{i=1}^{m} \hat{u}_i y_i; \quad \hat{u}_i(t) = \int_F u(x) y_i(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

см. обозначения в параграфе 3.1.

Более того, для $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ у нас есть оценка для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{mes}\Omega < \infty$:

$$\omega_{2,\Omega}(u;t) \leqslant \omega_C(u;t)\big(\operatorname{mes}\Omega\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.61}$$

Действительно,

$$\left\|\Delta_h^k u\right\|_{L_2(\Omega_{kh})} = \left(\int_{\Omega_{kh}} \left|\Delta_h^k u\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sup_{x\in\Omega_{kh}} \left|\Delta_h^k u\,(x)\right| \big(\operatorname{mes}\Omega_{kh}\big)^{\frac{1}{2}},$$

и для

$$\omega_{2,\Omega}^k(u;t) = \sup_{|h|\leqslant t} \left\|\Delta_h^k u\right\|_{L_2(\Omega_{kh})}$$

у нас есть оценки

$$\begin{aligned}\omega_{2,\Omega}^k(u;t) &\leqslant \sup_{|h|\leqslant t}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\Delta_h^k u(x)\right| \big(\operatorname{mes}\Omega_{kh}\big)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sup_{|h|\leqslant t} \left\|\Delta_h^k u\right\|_{C(\mathbb{R}^n)} \big(\operatorname{mes}\Omega_{kh}\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \omega_C^k(u;t)\big(\operatorname{mes}\Omega\big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

и следует (3.61). Таким образом, по теореме 2.2.1, см. (2.7), (2.9) имеем

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{2,\Omega}^k(u;t) \leqslant \big(\operatorname{mes}\Omega\big)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_E^G(\mathbb{R}^n)} A_p(t^n), & 0 < p \leqslant 1, \quad t \in (0,T]; \\ \omega_{2,\Omega}^k(u;t) \leqslant \big(\operatorname{mes}\Omega\big)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_E^G(\mathbb{R}^n)} D_p(t^n), & 1 < p < \infty, \quad t \in (0,T]. \end{cases} \tag{3.62}$$

Теперь применим Теорему 3.1.1.

Эти оценки показывают, что

$$u \in H_E^G(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; u \in H_2^{\omega(.)}(\Omega), \quad \omega(t) := \begin{cases} A_p(t^n), & 0 < p \leqslant 1; \\ D_p(t^n), & 1 < p < \infty. \end{cases} \tag{3.63}$$

Наконец, $u \in H_2^{\omega(.)}(\Omega) \cap L_2(F)$, и мы получаем утверждение (3.59), применив Теорему 3.1.1. $\square$

**Пример 3.3.1.** Для $\gamma$-средних Рисса порядков $s$, где $0 < s < (n-1)/2$, мы полагаем что $\psi(\tau) = c$, $c \in \mathbb{R}_+$, тогда $\psi_{s_0}(t) = ct^{s_0}$, и получаем, что $\omega_0(t) = \frac{1}{c} t^{\frac{n-1}{2}-s}$. Тогда принцип локализации принимает вид

$$\lim_{t\to+0} \frac{A_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \text{при} \quad 0 < p \leqslant 1,$$

и

$$\lim_{t\to+0} \frac{D_p(t^n)}{\frac{1}{c}t^{\frac{n-1}{2}-s}} = 0; \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty,$$

$$u \in H_E^G(\mathbb{R}^n); \quad u(x) \equiv 0, \quad x \in D. \tag{3.64}$$

Для каждого компакта $K \subset D$ равномерно по $x \in K$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\mu\to\infty} \sigma_\mu^\gamma(u,x) = 0. \tag{3.65}$$

**Замечание 3.3.1.** *Заметим, что функции $\Phi \in \mathfrak{I}_{k,n}(R)$ могут обладать свойством*

$$\Phi(\rho) = 0, \quad \rho \in [2R,\infty). \tag{3.66}$$

*Таким образом, случай ядер с компактным носителем включен в нашу схему.*

**Замечание 3.3.2.** *Заметим, что если ядро $G$ обобщенных бесселевых потенциалов имеет компактный носитель на $B_{2R} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 2R\}$, см. условие (3.66), то для $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ имеем*

$$u(x) = (G * f)(x) \equiv 0, \quad x \in D,$$

*если функция $f \in E(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию*

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in D^{2R} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x,D) < 2R\},$$

*где*

$$\rho(x,D) = \inf\left\{|x-y| \,:\, y \in D\right\},$$

*расстояние от* $x$ *до* $D$.

Основные результаты третьей главы опубликованы в работе [22] из списка публикаций автора по теме диссертации.

## Заключение

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. исследованы дифференциальные свойства обобщенных потенциалов Бесселя;
2. получены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций;
3. исследованы критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца;
4. описаны точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае базовых весовых пространств Лоренца;
5. оценены аппроксимативные числа оператора вложения пространства потенциалов в пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций;
6. получены необходимые и достаточные условия для вложения пространства потенциалов в пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$;
7. получены условия локализации $\gamma$-средних спектрального разложения обобщенного потенциала Бесселя в случае базовых весовых пространств Лоренца.

## Список сокращений и условных обозначений

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | множество натуральных чисел |
| $L_p$ | пространство Лебега |
| $\mathbb{R}$ | множество действительных чисел |
| $E(\mathbb{R}^n)$ | перестановочно-инвариантное пространство |
| $\Lambda^p(v)$ | весовое пространство Лоренца |
| $H_E^G(\mathbb{R}^n)$ | пространство потенциалов |
| $G * f$ | свертка $(G * f) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y)$ y |
| $\chi_A$ | характеристическая функция |
| $\rho$ | функциональная норма |
| $\omega_c^k(u;\tau)$ | модуль непрерывности |
| $\lambda_f(f)$ | Лебегова функция распределения |
| $\mu$ | мера Лебега |
| $E'(\mathbb{R}^n)$ | ассоциированное пространство |
| $\tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ | представления Люксембурга |
| $C(\mathbb{R}^n)$ | пространство ограниченных и равномерно непрерывных функций |
| $G_\alpha(x)$ | классические ядра Бесселя–Макдональда |
| $\Lambda^k(C;X)$ | пространство Кальдерона |
| $a_m(T)$ | аппроксимативные числа |
| $\sigma_\mu^\gamma(f;x)$ | $\gamma$-средние спектрального разложения |
| $H_p^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ | пространство типа Никольского с обобщенной гладкостью |

## Список литературы


1. *Bennett C.*, *Sharpley R.* Interpolation of operators. — New York : Acad. Press, 1988.
2. *Nikolsky S. M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. — Moscow : Science, 1977.
3. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Л. : Издательство ЛГУ, 1985.
4. *Il'in V. A.*, *Alimov S. A.* Conditions for the convergence of spectral decompositions that correspond to self-adjoint extensions of elliptic operators. I, II // Differentsial'nye Uravneniya. — 1971. — Vol. 7. — P. 670—710, 851—882.
5. *Goldman M. L.*, *Ayele T.* Spaces of generalized smoothness in summability problems for Φ-means of spectral decomposition // Eurasian Math. Journal. — 2014. — Vol. 5, no. 1. — P. 61—81.
6. *Caetano A.*, *Moura S.* Local growth envelopes of spaces of generalized smoothness: the critical case // Math. Inequal. Appl. — 2004. — Vol. 7. — P. 573—606.
7. *Goldman M. L.* Rearrangement invariant envelopes of generalized Sobolev and Calderon spaces //. Vol. 424. — 2007. — P. 53—81.
8. *Goldman M. L.*, *Heinig H.*, *Stepanov V.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. — 1996. — Vol. 48. — P. 959—979.
9. *Goldman M.*, *Kerman R.* On the optimal embedding of Calderon spaces and of generalized Besov spaces // Proceedings of the Mathematical Institute V. A. Steklov. — 2003. — Vol. 243, no. 4. — P. 154—184.

10. *Goldman M.*, *Kerman R.* On the rearrangement-invariant hull of the Calderon space // Dokl. Akad. Nauk. — 2003. — Vol. 392. — P. 155—159.

11. *Goldman M.*, *Malysheva A.*, *Haroske D.* Estimates of the uniform modulus of continuity for Bessel potentials // Dokl. Akad. Nauk. — 2013. — Vol. 450. — in Russian.

12. *Крейн С. Г.*, *Петунин Ю. И.*, *Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

13. *Goldman M.* Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2011. — Vol. 56, no. 10/11. — P. 1—19.

14. *Гольдман М. Л.* Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 91—111.

15. *Гольдман М. Л.*, *Малышева А. В.* Об оценке равномерного модуля непрывности обобщенного потенциала Бесселя // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 283. — С. 1—12.

16. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 3—12.

17. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. — 1990. — Vol. 96. — P. 145—158.

18. *Akhieser N. I.* Vorlesungen über Approximations Theorie. — Berlin, German : Akademie-Verlag, 1953.

19. *Haroske D.* Envelopes and Sharp Embeddings of Function Spaces // CRC Research Notes in Mathematics. Vol. 437. — Boca Raton, FL : Chapman & Hall/CRC, 2007.

20. *Alkhalil N.* Estimates for continuity envelopes and approximation numbers of Generalized Bessel potentials over Lorentz space // Annals of R.S.C.B. — 2021. — Vol. 25, no. 2. — P. 1201—1206.

21. *Alkhalil N. H.* Modulus of continuity for Bessel type potentials over Lorentz space // Eurasian Math. J. — 2021. — Vol. 12, no. 2. — P. 10—18.

22. *Goldman M.*, *Alkhalil N.* On Spectral Decomposition of Generalized Bessel Potentials // Advances in Systems Science and Applications. — 2020. — Vol. 21, no. 3. — P. 22—30.

23. *Альхалиль Н. Х.*, *Алмохаммад Х.* Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340—349.

24. *Gogatishvili A.*, *Johansson M.*, *Okpoti C. A., Persson L. E.* Characterization of embeddings in Lorentz spaces using a method of discretization and anti-discretization // Bull. Austral. Math. Soc. — 2007. — Vol. 76. — P. 69—92.

25. *Гольдман М. Л.*, *Малышева А. В.*, *Хароске Д.* Оценка равномерного модуля непрерывности для потенциалов Бесселя // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 450, № 2. — С. 143.

26. *Goldman M. L.*, *Haroske D.* Optimal Calderon spaces for generalized Bessel potentials // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 492, no. 1. — P. 404—407.

27. *Burenkov V. I.*, *Goldman M. L.* Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions // Proc. of the Steklov Inst. Math. Vol. 210. — 1995. — P. 65—89.

28. *Goldman M. L.*, *Haroske D.* Estimates for continuity envelopes and approximation numbers of Bessel potentials // Journal of Approximation Theory. — 2013. — Vol. 172. — P. 58—85.

29. *Stechkin S.* On the order of the best approximations of continuous functions // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1951. — Vol. 15. — P. 219—242.

30. *Erdelyi H. A.*, *Bateman H.* Vishye trantsedentnye funktsi. Funktsi Beselya, funktsi parabolichskogo tsilindra, ortogonalhye mnogochlene. — Moscow : Nauka, 1966. — 295 p.

31. *Erdelyi H. A.*, *Bateman H.* Tables of integral transforms. Bessel transforms. Integrals of special functions. V. 2. — Moscow : Nauka, 1970. — 327 p.

32. *Goldman M.* Hardy-type inequalities on the cone of quasi monotone functions // Russian Academy of Sciences, Far-Eastern Branch, Research Report 98/31. — 1998. — P. 1—70.

33. *Гольдман М. Л.* Перестановочно инвариантные оболочки обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // ДАН. — 2008. — Т. 423, № 1. — С. 14—18.

34. *Гольдман М. Л.*, *Энрикес Ф.* Описание перестановочно инвариантной оболочки анизотропного пространства Кальдерона. — 2005.

35. *Netrusov Y. V.* Embedding Theorems spaces Lizorkina–crops in Ukraine // Zap. scientific. SEM. LOMI. — 1987. — Vol. 159. — P. 103—112.

36. *Goldman M. L.*, *Tsegaye G. A.* Spaces with Generalized Smoothness in Summability Problems for Φ-means of Spectral Decompositions. — Switzerland : Springer International Publishing, 2015. — P. 163—169.

37. *Малышева А. В.* Оптимальные вложения обобщённых потенциалов Рисса // Вестник РУДН. «Серия Математика. Информатика. Физика». — 2013. — № 2. — С. 28—37.

38. *O'Neil R.* Convolution operators and $L(p,q)$ spaces // Duke Math. J. — 1963. — Vol. 30. — P. 129—142.

39. *Goldman M. L.* On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010.

40. *Caetano A.* About approximation numbers in function spaces // J. Approx. Theory. — 1998. — Vol. 94. — P. 383—395.

41. *Caetano A.*, *Moura S.* Local growth envelopes of spaces of generalized smoothness: the subcritical case // Math. Nachr. — 2004. — Vol. 273. — P. 43—57.

42. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Лизоркина–Трибеля // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 103—112.

43. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 69—82.

44. *Гольдман М. Л.*, *Малышева А. В.* Двусторонняя оценка модуля непрерывности свертки // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 585—596.

45. *Гольдман М. Л.* Конус перестановок для обобщенных бесселевых потенциалов // Труды Матем. Ин-та им. В.А. Стеклова РАН. — 2008. — Т. 260. — С. 151—163.

46. *Goldman M. L.* Integral properties of generalized Bessel potentials // Dokl. Math. — 2007. — Vol. 75, no. 3. — P. 361—366.

47. *Goldman M. L.* On optimal embeddings of the generalized Bessel and Riesz potentials // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — Vol. 269. — P. 91—111. — in Russian.

48. *Haroske D.* Limiting embeddings, entropy numbers and envelopes in function spaces. — Jena, Germany : Habilitationsschrift, Friedrich–Schiller-Universität, 2002.

49. *Goldman M. L.*, *Tsegaye G. A.* Spaces with Generalized Smoothness in Summability Problems for Φ-means of Spectral Decompositions. — Switzerland : Springer International Publishing, 2015. — P. 163—169.

50. *Goldman M. L.* Hardy-type inequalities on the cone of quasimonotone functions // Russian Academy of Sciences, Far-Eastern Branch. — 1998.

51. *Almohammad K.* The Modular Inequalities for Hardy-type Operators on Monotone Functions in Orlicz Space // Advances in Systems Science and Applications. — 2020. — Vol. 21, no. 2. — P. 133—141.

52. *Kerman R.*, *Pick L.* Optimal Sobolev imbeddings // Forum Math. — 2006. — Vol. 18. — P. 535—570.

53. *Kerman R.*, *Pick L.* Compactness of Sobolev imbeddings involving rearrangement-invariant norms // Studia Math. — 2008. — Vol. 186. — P. 127—160.

54. *Kolyada V.* Rearrangements of functions and embedding theorems // Russian Math. Surveys. — 1989. — Vol. 44, no. 5. — P. 73—117.

55. *Kolyada V.* On the differential properties of the rearrangements of functions // Progress in Approximation Theory. — New York, 1992. — Vol. 19. — P. 333—352.

56. *Kolyada V.* Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type // East J. Approx. — 1998. — Vol. 4. — P. 111—199.

57. *Lebesgue H.* Sur les integrales singuliéeres // Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. — 1909. — T. 3, № 1. — C. 25—117.

58. *Neves J.* Lorentz–Karamata spaces, Bessel and Riesz potentials and embeddings // Math. (Rozprawy Mat.) — 2002. — Vol. 405. — P. 46.

59. *Goldman M. L.* Local growth envelopes and optimal embeddings of generalized Sobolev spaces // Dokl. Math. — 2006. — Vol. 74. — P. 692—695.

60. *Skrzypczak L.* On approximation numbers of Sobolev embeddings of weighted function spaces // J. Approx. Theory. — 2005. — Vol. 136. — P. 91—107.

61. *Triebel H.* The Structure of Functions. — Basel : Birkhauser, 2001.

62. *Gogatishvili A.*, *Pick L. D.* Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms // Publ. Mat., Bare. — 2003. — Vol. 47, no. 2. — P. 311—358.

63. *Goldman M. L.* On imbedding generalized spaces in Lorentz spaces // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1987. — Vol. 172. — P. 143—154.

64. *Alkhalil N.* Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя // 8th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII». — 2018. — С. 31—32.

65. *Альхалиль Х. Н.* Об оценке равномерного модуля непрерывности потенциала для локализации $\gamma$-средних его спектрального разложенияоб оценке равномерного модуля непрерывности потенциала для локализации $\gamma$-средних его спектрального разложения // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019.

66. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* Условия локализации спектральных разложений для обобщённых потенциалов Бесселя // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 74—75.

67. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* О свойствах потенциалов типа Рисса на базе пространств Орлича–Лоренца // 9th International Scientific Conference «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis IX». — Rostov-on-Don, 04.2019. — С. 30—31.

68. *Алмохаммад Х.*, *Альхалиль Н. Х.* Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 «XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь, 04.2020. — С. 7—8.

69. *Альхалиль Х. Н.* Оценки равномерных модулей непрерывности в пространстве потенциалов // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020.

70. *Альхалиль Х. Н.* Оценка равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя на весовых пространствах Лоренца // Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021». — М. : Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2021.