

УТВЕРЖДАЮ



И.о. проректора по науке, инновациям
и цифровизации ФГБОУ ВО «ВГУ»

Д.Ф. - М.Н., доцент

Д.В. Костин 2025 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет» на диссертационную работу Максимовой Ирины Сергеевны «Управляемость дифференциальных систем с переменной структурой и задача восстановления», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы

В диссертации рассматривается проблема управляемости и наблюдаемости дифференциальных систем. Рассмотрена задача управляемости для динамических систем со сменой фазового пространства. При этом фазовые пространства могут иметь разные размерности, зависящие от практического смысла исследуемой задачи. Рассмотрена задача восстановления решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой в рамках проблемы наблюдаемости дифференциальной системы.

Теория управляемости динамических систем, в том числе дифференциальных систем, сформировалась как самостоятельное, причем, наиболее важное, направление теории управления во второй половине XX века. Типичные теоремы существования оптимального управления дифференциальными системами предполагают существование хотя бы одного допустимого управления, порождающего траекторию, удовлетворяющую заданным краевым условиям, например, управления, переводящего траекторию из одного заданного положения в другое. Уменьшение или увеличение размерности фазовых пространств в задачах с переменной размерностью тесно связано с понятиями агрегирования и декомпозиции, востребованными при моделировании управления в экономических, информационных, физических системах. С понятием управляемости дифференциальных систем тесно связано понятие наблюдаемости, которое также является одним из фундаментальных понятий теории управления и наблюдения. Наблюдаемость является свойством системы, показывающим, можно ли по выходу полностью восстановить информацию о состояниях системы. Задачи наблюдения динамических систем имеют важные теоретическое и практическое значения. Например, для реализации управления по принципу обратной связи необходимо знать фазовое состояние системы в каждый момент времени. Поскольку не все

фазовые координаты системы доступны измерению, необходимо рассмотреть вопрос о возможности полного восстановления фазовых координат системы по результатам неполного наблюдения (измерения). В связи с этим следует отметить, что из потребности восстановления состояний систем возникло самостоятельное направление оптимального восстановления по неполным и неточным данным, которое развивалось в работах таких исследователей как Donoho D. L., Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.

Диссертационное исследование Максимовой И. С. выполнено в рамках вышеуказанных направлений. Тема диссертации является актуальной.

Характеристика структуры диссертации и наиболее существенных научных результатов, полученных лично соискателем

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 103 страницы. Список литературы содержит 83 наименования.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводится краткий обзор исследований по теории управляемости и теории восстановления, дано обоснование теоретической и практической ценности полученных результатов. Описаны цели диссертационного исследования, общая методика исследования и новизна полученных результатов.

В первой главе рассматривается движение управляемого объекта, описываемое следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, u), x = (x_1, \dots, x_n) \in X = R^n, t \in [0, \tau]; \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \frac{dy_k}{dt} = g_k(y_1, \dots, y_{k+1}), k = 1, \dots, m-1, \\ \frac{dy_m}{dt} = g_m(y_1, \dots, y_m, v), y = (y_1, \dots, y_m) \in Y = R^m, t \in [\tau, T]. \end{cases} \quad (1.12)$$

В пространстве X задано начальное множество M_0 и гиперплоскость перехода $\Gamma = \Gamma(x, c)$. Стыковка траекторий осуществляется с помощью заданного отображения $q: X \rightarrow Y, y(\tau) = q(x(\tau))$. С помощью этого отображения реализуется переход из одного пространства в другое. В пространстве Y задано конечное множество M_1 . На отрезке времени $[0, \tau]$ объект движется из начального множества M_0 по решениям первой системы, в момент времени τ объект попадает на Γ и происходит переход в пространство Y под действием отображения q . Полученная точка $y(\tau)$ является начальной для движения объекта в пространстве Y . Дальнейшее движение на отрезке времени $[\tau, T]$ объект осуществляет из точки $y(\tau)$ на множество M_1 по решениям второй системы. Причем $y(\tau) \notin M_1$ (в противном случае задача решена). Основным результатом первой главы является следующая теорема.

Теорема 1.4.1. Пусть функции $f_i(x_1, \dots, x_{i+1}), i = 1, \dots, n-1$, и $g_k(y_1, \dots, y_{k+1}), k = 1, \dots, m-1$, имеют непрерывные частные производные до $(n-i+1)$ -го и $(m-k+1)$ -го порядков включительно и пусть для всех x и для всех y

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \left| \frac{\partial g_k}{\partial y_{k+1}} \right| \geq b > 0, \quad k = 1, \dots, m-1,$$

где a и b – постоянные, не зависящие от x и y соответственно. И пусть выполнены условия стыковки траекторий $y(\tau) = q(x(\tau))$. Тогда объект, описанный системами

(1.11) и (1.12) является управляемым из начального множества M_0 пространства X на конечное множество M_1 пространства Y .

Во второй главе для исследования управляемости дифференциальных систем в задаче со сменой фазового пространства применяется аппарат теории выпуклого анализа и многозначных отображений. Пусть $\Omega(R^n)$, $\Omega(R^m)$ - совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространств R^n и R^m , соответственно. Пусть заданы множества $U \in \Omega(R^n)$, $V \in \Omega(R^m)$. Движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0, \tau]; \quad (2.1)$$

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \quad (2.2)$$

Естественным образом осуществляется переход от системы (2.1)-(2.2) к системе дифференциальных включений

$$x \in F(t, x) = f(t, x, U), \quad t \in [0, \tau], \quad (2.5)$$

$$y \in G(t, y) = g(t, y, V), \quad t \in [\tau, T]. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1.1. Пусть отображение $F(t, x)$ вогнуто по x на множестве достижимости $K(\tau)$ при всех $t \in [0, \tau]$ и пусть $G(t, y)$ вогнуто по y на множестве $K_3(T)$ при всех $t \in [\tau, T]$. $K_3(T)$ - множество достижимости системы (2.2) из $K_2(\tau)$ в момент времени T , где $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$. Тогда для управляемости объекта, описываемого системами (2.1) и (2.2), на отрезке времени $[0, T]$ достаточно, чтобы было выполнено соотношение $c(K_3(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$, для любого $\psi \in R^m$.

Здесь

$$c(F(t, x), \psi) = \max_{f \in F(t, x)} (f, \psi)$$

- опорная функция.

Отдельно рассмотрен случай управляемости линейных систем

$$\dot{x} = Ax + u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in X, \quad t \in [0, \tau]; \quad (2.7)$$

$$\dot{y} = By + v, \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in Y, \quad t \in [\tau, T]. \quad (2.8)$$

Теорема 2.2.1. Пусть заданы начальное множество $M_0 \in \Omega(R^n)$ и не пересекающаяся с ним выпуклая гиперповерхность перехода Γ , линейное отображение $q: X \rightarrow Y$, конечное множество $M_1 \in \Omega(R^m)$. Для управляемости объекта, описываемого системами (2.7) и (2.8) на отрезке $[0, T]$ достаточно, чтобы функция управляемости

$$\varphi(\psi) = c(K_2(\tau), e^{(T-\tau)B^*} \psi) + c(M_1, -\psi) + \int_0^{T-\tau} c(V, e^{sB^*} \psi) ds$$

была неотрицательна для любых $\psi \in S$, здесь $K_2(\tau) = q(K_1(\tau))$.

В третьей главе исследуется возможность исследования локальной управляемости для решения задачи управляемости со сменой фазового пространства, сформулированной в главе 1. Движение объекта описывается нелинейными управляемыми системами дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; v), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $t \in [0, \tau]$, $x(t) \in X$;

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \quad (3.2)$$

где $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0$, $u(t) \in U$, $t \in [\tau, T]$, $y(t) \in Y$,

$B(t)$ - матрица размерности $m \times r$ специального вида: $B(t) = B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t)$. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ -го порядка включительно по крайней мере в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение.

Теорема 3.2.1. Пусть функции $g_i(x_1, \dots, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$, имеют непрерывные частные производные до $(n - i + 1)$ -го порядка включительно и при всех x

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq b > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

где b - постоянная, не зависящая от x . Пусть $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0, \quad u(t) \in U, \quad B(t) = B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t).$$

Пусть функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. Также на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^* , в которой ранг матрицы

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \dots,$$

$$C_{m-1}^0 A^{m-1} B(t) - C_{m-1}^1 A^{m-2} B'(t) + \dots + (-1)^{m+1} C_{m-1}^{m-1} A^0 B^{(m-1)}(t))$$

равен m . Тогда объект, описываемый системами (3.1) и (3.2), является управляемым из множества M_0 пространства X в множество M_1 пространства Y на отрезке времени $[0, T]$.

Для управляемой системы вида

$$\dot{y} = f(y) + B(t)u, \quad (3.5)$$

получены достаточные условия локальной нуль-управляемости.

Теорема 3.2.2. Пусть $f(y) \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $f(0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) \neq 0, \quad u(t) \in U, \quad B(t) = B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t).$$

Пусть функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(m-1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t = t^* \in [\tau, T]$, также $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ допускают четное продолжение. Также на отрезке $[\tau, T]$ существует точка t^* , в которой ранг матрицы

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \dots,$$

$$C_{m-1}^0 A^{m-1} B(t) - C_{m-1}^1 A^{m-2} B'(t) + \dots + (-1)^{m+1} C_{m-1}^{m-1} A^0 B^{(m-1)}(t))$$

равен m . Тогда система (3.5) и (3.2), локально нуль-управляема на отрезке $[\tau, T]$.

Четвертая глава посвящена построению оптимальных методов восстановления решения системы линейных дифференциальных однородных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой. Рассматривается задача Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ и A – самосопряженная матрица с собственными числами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, $\{e_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих этим собственным значениям,

$$x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Тогда решение задачи (4.1) записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Рассматривается два варианта исходных данных, заданных со случайной ошибкой. Предполагается, что либо координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой и требуется восстановить решение в момент $\tau > 0$, либо решение известно со случайной ошибкой в некоторый момент $T_1 > 0$ и требуется восстановить решение в момент $\tau \in (0, T_1)$. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0 . Требуется восстановить решение в момент τ , $\tau > 0$. Для исследования этой задачи предварительно доказана теорема общего характера об оптимальном восстановлении значения линейного оператора $T: X \rightarrow Z$ на некотором множестве (классе) $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданным со случайной ошибкой. На основании этой теоремы в указанных случаях построены оптимальные методы восстановления и найдены ошибки оптимальных методов. В заключительной части четвертой главы рассмотрена задача восстановления тригонометрического полинома и его производных до некоторого порядка по заданным со случайной ошибкой коэффициентам. Построен оптимальный метод восстановления и найдена его ошибка.

Достоверность и новизна результатов диссертации

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

- 1) получен ряд условий управляемости для систем с переменной структурой, рассмотрены различные классы дифференциальных систем в различной комбинации;
- 2) получены достаточные условия управляемости для нелинейных дифференциальных систем со сменой фазовых пространств в случае, когда правые части дифференциальных включений являются вогнутыми отображениями;
- 3) рассмотрен вопрос применимости локальной управляемости нелинейных дифференциальных систем для задач с переменной структурой;
- 4) получен оптимальный метод восстановления решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по исходной информации, заданной со случайной ошибкой.

Все утверждения строго доказаны с помощью стандартных логических математических конструкций, что подтверждает их достоверность. Их можно сопоставить с известными ранее результатами, которым они не противоречат. Кроме того, результаты диссертации были опубликованы в рецензируемых изданиях, докладывались на ведущих научных семинарах и международных и всероссийских конференциях.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Результаты диссертационной работы ясно сформулированы. В диссертационном исследовании для обоснования сформулированных научных положений, выводов и рекомендаций использованы классические и современные методы качественной теории дифференциальных уравнений, математического анализа, теории управления. При использовании работ и результатов других авторов даны необходимые ссылки в согласии с принятыми нормами.

Ценность для науки и практики результатов работы

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теории управляемости при исследовании различных динамических систем. Также полученные результаты могут найти широкое практическое применение в различных задачах математической физики, экономики и эконометрики. Особо следует отметить, что полученные в диссертации результаты важны для дальнейшего развития качественной теории дифференциальных уравнений. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях дифференциальных уравнений, ведущихся в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Воронежском государственном университете, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша, Московском физико-техническом институте, а также при чтении специальных курсов студентам и магистрантам математических и естественно-научных направлений подготовки.

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 5 — статьи в научных журналах, индексируемых в международных базах данных и 4 — в тезисах докладов на международных конференциях.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации

Содержание автореферата соответствует содержанию диссертации, автореферат полно и правильно отражает все основные положения диссертации.

Замечания по работе

Имеется ряд опечаток, грамматических и стилистических неточностей.

Заключение

Диссертационное исследование Максимовой Ирины Сергеевны «Управляемость дифференциальных систем с переменной структурой и задача восстановления», представленное на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится новое решение научной задачи управляемости

дифференциальных систем и восстановления их состояний по данным измерений со случайными ошибками, имеющей важное значение для дальнейшего развития теории управления дифференциальными системами. Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно и правильно отражает все основные положения диссертации. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п. 2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», утвержденного ученым советом РУДН протокол № УС-1 от 22.01.2024 г., а её автор, Максимова Ирина Сергеевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Отзыв подготовил доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»), доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики, Половинкин Игорь Петрович.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный университет», протокол № 4 от «05» ноября 2025 г.

Заведующий кафедрой математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики ФГБОУ ВО «ВГУ»,
доктор физико-математических наук, профессор,
Шашкин Александр Иванович

Профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики ФГБОУ ВО «ВГУ»,
доктор физико-математических наук, доцент,
Половинкин Игорь Петрович



Сведения о ведущей организации.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Почтовый адрес: 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

Адрес официального сайта в сети «Интернет»: www.vsu.ru

Телефон: (473) 220-75-21

Адрес электронной почты: office@main.vsu.ru

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)	
Подпись <i>Зарудная Т.В.</i>	начальник отдела кадров
заверяю	должность,
<i>Зарудная Т.В.</i>	Т.В. Зарудная 05.11.2025
подпись, расшифровка подписи	