

На правах рукописи



Кройтор Олег Константинович

**Символьно-численное исследование поляризованного
электромагнитного излучения в волноведущих
системах**

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена на кафедре прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель: доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», доктор физико-математических наук
Малых Михаил Дмитриевич

Официальные оппоненты: **Боголюбов Александр Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, заведующий отделением прикладной математики

Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования

Айриян Александр Сержикович, кандидат физико-математических наук, Объединённый институт ядерных исследований, начальник сектора № 2 научного отдела вычислительной физики ЛИТ

Защита состоится 23 июня 2023 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Автореферат разослан «___» апреля 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.006,
канд. физ.-мат. наук



Демидова А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Ряд прикладных задач, среди которых первой следует назвать передачу информации по оптическому волокну, требуют развития методов исследования все более детальных математических моделей, описывающих распространение монохроматических волн в направляющих структурах. В рамках линейной скалярной модели исследование спектральных свойств электромагнитных волн приводит к исследованию спектра самосопряженного оператора, методы исследования которого хорошо развиты. Напротив, при учете векторного характера электромагнитного излучения в рассматриваемых диэлектриках, возникают сложные задачи, не принадлежащие к какому либо известному типу. При введении анизотропии появляются весьма необычные решения, напр., волны Дьяконова, которые дали повод говорить о структуре света. Поэтому исследование моделей распространения волн в направляющих структурах в полной электромагнитной постановке представляет собой актуальную задачу, требующую или развития новых методов решения ранее неисследованных математических задач, или новых форм записи задач, подпадающих под известные методы.

Степень разработанности темы. Распространение поляризованного электромагнитного излучения описывается математической моделью, состоящей из уравнений Максвелла и оснащения, включающего коэффициенты $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$, граничные условия и условия сопряжения на разрывах коэффициентов. Направляющие структуры формируют каналы распространения электромагнитного излучения в теории без потерь за счет особым образом сформированных направляющих структур, описываемых выбором коэффициентов $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$ и граничных условий («стенок»).

В случае изотропного заполнения (когда ϵ и μ — скаляры) в качестве направляющих структур выступают волноводы, открытые и закрытые. Наиболее разработанной является модель закрытого волновода, заполненного оптически однородным веществом, заключенным в цилиндр с идеально проводящими стенками. В такой идеальной системе электромагнитная энергия распространяется вдоль оси без потерь. В классических работах Тихонова и Самарского [1—5] было показано, что монохроматическое электромагнитное излучение в таких системах представляет собой суперпозицию нормальных мод ТЕ и ТМ типов, представляющих собой волны, бегущие вдоль оси с различными показателями фазового замедления [6].

В 1980-х годах вошли во всеобщее употребление закрытые волноводы, имеющие диэлектрические сердечники или жилы. Простейшей моделью открытых волноводов являются закрытые волноводы с фиктивными стенками [7; 8]. Исследование нормальных мод закрытого волновода, заполненного, оптически неоднородным, но изотропным веществом, может

быть сведено к спектральной задаче для несамосопряженного операторного пучка, указанной в работах Ю.Г. Смирнова [9–11], С.Б. Раевского [12; 13], А.Г. Свешникова, А.Н. Боголюбова и А.Л. Делицына [14–16], М.Д. Малых [17–20]. Одни авторы используют потенциалы, другие те или иные тройки компонент электромагнитного поля, это приводит к различным формам записи спектральной задачи. Форма, предложенная А.Л. Делицыным [14; 21], удобна тем, что она сводит исследование нормальных мод к исследованию спектра квадратичного несамосопряженного пучка, подпадающего под условия теоремы М.В. Келдыша о полноте системы корневых векторов операторных пучков [22]. Это позволило доказать полноту системы нормальных мод волновода и перенести ряд результатов Тихонова и Самарского на волноводы с сердечниками и жилами.

Применение метода усечения к исследованию модели волновода, записанной в такой форме, приводит к исследованию спектра несамосопряженной матрицы. В компьютерных экспериментах (С.Б.Раевский [12], А.Л. Делицын [23], М.Д. Малых, Д.В. Диваков, А.А. Тютюнник [24]) можно наблюдать появление всех явлений, характерных для несамосопряженных спектральных задач, в т.ч. появление комплексных собственных значений и присоединенных векторов. В теории колебаний и квантовой механике появление несамосопряженных матриц и комплексных собственных значений связано с введением диссипации. Однако в рассматриваемой модели волновода диссипации нет и физический смысл этих явлений не вполне ясен и может быть связан с дефектами приближенных методов отыскания собственных значений несамосопряженных матриц. Это подталкивает искать иные постановки спектральной задачи теории волноводов, стремясь как можно ближе подойти к самосопряженной спектральной задаче для полого волновода, указанной Тихоновым и Самарским.

В докторской диссертации М.Д. Малых [25] была предложена самосопряженная модель распространения электромагнитных волн в волноводе, учитывающая их векторный характер, но не учитывающая гибридизацию нормальных мод: здесь был опущен член, который мешает расщеплению задачи на две, описывающие поля ТЕ и ТМ типов. Этот член тождественно равен нулю для случая оптически однородного заполнения. Однако, напр., в прямоугольном слоистом волноводе можно построить аналитически два семейства нормальных мод (гибридных мод), не являющихся полями ни ТЕ, ни ТМ типов. Эти семейства получили название мод SLE и SLH типа [26–29]. Можно развить теорию возмущения, понимая этот член как малую добавку [1], однако это не снимает главного вопроса: допускает ли задача о нормальных модах в волноводе без диссипации самосопряженную постановку?

В случае анизотропного заполнения (когда ε и μ — тензоры), в том числе кристаллического [30] и жидко-кристаллического [31], простор для

устройства направляющих структур оказывается еще шире, а результаты уходят еще дальше от скалярного случая.

Одной из самых неожиданных находок этого рода стало открытие волн Дьяконова, сделанное сначала в теории [30], а потом и экспериментально [32; 33]. Эти волны распространяются вдоль плоской границы раздела изотропного вещества с постоянной диэлектрической проницаемостью, и анизотропного кристалла, тензор диэлектрической проницаемости которого имеет ось симметрии, направленную вдоль границы раздела. Эти волны — монохроматические, коэффициент фазового замедления не зависит от частоты, а возможные направления распространения вдоль плоскости раздела лежат в небольшом угле, ось и раствор которого зависят от выбора сред. Исследование волн Дьяконова сводится к исследованию некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств [34–36].

До настоящего момента эта система исследовалась только численно. Трудности с потерей корней и обретением новых при применении численных методов решения систем алгебраических уравнений хорошо известны [37]. Однако в современных системах компьютерной алгебры (СКА), таких как Sage и GInv, имеется богатый инструментарий для аналитического исследования систем алгебраических уравнений, основанный на технике базисов Грёбнера [38]. Можно предположить, что исследование системы, описывающей волны Дьяконова, в СКА позволит выписать решения в конечном виде, что в будущем существенно упростит и ускорит проектирование устройств, использующих волны Дьяконова с заданными свойствами.

Таким образом, как в изотропном, так и в анизотропном случаях имеются хорошо разработанные непрерывные математические модели, описывающие распространение монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах. Однако при исследовании этих моделей численными методами теряются важные свойства этих моделей, что приводит к появлению разного рода артефактов. Устранение этих затруднений можно достигнуть путем разработки новых методов, в которых значительная часть вычислений производится символично или, во всяком случае, с сохранением важнейших алгебраических свойств исходной модели.

Целью настоящей диссертации является разработка и реализация в системе компьютерной алгебры Sage символично-численных методов исследования распространения монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах.

Для достижения поставленной цели были рассмотрены две модели — модель закрытого волновода с оптически неоднородным заполнением, и

модель, описывающая возникновение волны Дьяконова, и необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать метод сведения исследования нормальных мод закрытого волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации к исследованию спектра самосопряженной матрицы.
2. На основе этого метода разработать численный метод решения построения дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации и реализовать его в виде комплекса программ в СКА Sage.
3. Верифицировать разработанную программу на примерах, в которых возникают гибридные моды.
4. Разработать символично-аналитические методы исследования алгебраической модели поверхностных волн Дьяконова и реализовать его в виде комплекса программ в СКА Sage.

Научная новизна:

1. В рамках полной электромагнитной модели закрытого волновода, заполненного оптически неоднородным веществом, разработан метод исследования нормальных мод, который сводит исследование нормальных мод волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы с учетом гибридизации мод. Ход дисперсионной кривой, вычисленной по этому методу, соответствует теоретическим предсказаниям и лишен артефактов (ухода в комплексную область).
2. Решение системы алгебраических уравнений, описывающих поверхностные волны Дьяконова, и исследованной ранее численно [34—36], описано аналитически в радикалах.

Теоретическая и практическая значимость

1. Решение системы уравнений, описывающей поверхностные волны Дьяконова, в символическом виде будет полезно в дальнейших теоретических исследованиях поверхностных волн. Эти результаты также используются в курсе «Компьютерная алгебра» как удачный пример, демонстрирующий сильную сторону техники базисов Гребнера.
2. Отыскание самосопряженной постановки спектральной задачи теории волноводов существенно упрощает расчеты характеристик волноводов, заполненных оптически неоднородным веществом. Эта постановка открывает новые возможности для исследования задачи о волноводной дифракции, которые еще предстоит исследовать.

Методология и методы исследования. Для исследования моделей распространения монохроматических поляризованных волн в направляющих структурах используются два надежных метода — метод

сопряжения и метод Галеркина, хорошо зарекомендовавших себя на скалярных моделях теории волноводов. Эти исследования подразумевают использование современных вычислительных средств и проводятся в системе компьютерной алгебры Sage. Применение метода Галеркина к исследованию спектральных задач подразумевает выполнение двух операций:

1. вычисления матричных элементов,
2. вычисления спектра матричного пучка.

Первый шаг очень удобно делать в системах компьютерной алгебры, однако второй выполняется стандартными решателями надежно, то есть без появления вычислительных артефактов, только для самосопряженного случая. Поэтому для успешного достижения цели важно найти решение первой из сформулированных выше задач диссертации — свести исследование нормальных мод закрытого волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы. Для этого используется повышение размерности задачи по методу, предложенному М.Д. Малых. Вслед за работами [34–36] для исследования волн Дьяконова используется метод сопряжения полей. Для решения систем возникающих при этом нелинейных уравнений используется техника базисов Грёбнера, позволяющая свести решение системы нелинейных уравнений к одному уравнению относительно одной неизвестной. В современной компьютерной алгебре эта техника является общепринятой [38].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан, реализован в виде комплекса программ и верифицирован новый метод решения задачи построения дисперсионной кривой закрытого волновода, заполненного оптически неоднородным, но изотропным веществом. Этот метод сводит исследование задачи к задаче на собственные значения самосопряженной матрицы и в то же время учитывает гибридизацию нормальных мод.
2. В серии компьютерных экспериментов показано, что предложенный метод верно описывает гибридные моды прямоугольного слоистого волновода.
3. Выписана и решена в радикалах система уравнений, описывающих волны Дьяконова, бегущие вдоль поверхности раздела анизотропного и изотропного вещества.
4. На основе этого решения разработан и реализован в СКА Sage символично-численный метод исследования волн Дьяконова. Результаты компьютерных экспериментов согласуются с полученными ранее численными методами.

Обоснованность и достоверность полученных результатов.

Обоснованность результатов диссертации опирается на теоретические

исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в рецензируемых профильных журналах.

Символьно-численные и численные вычисления интегралов, определителей и решений систем дифференциальных уравнений, проведенные в работе, выполнялись с помощью методов и функций, встроенных в СКА Sage. Величина погрешности полученных численных значений для матричных элементов обеспечивается программным обеспечением, встроенным в СКА Sage, и находится на уровне ошибки округления.

Достоверность полученных результатов исследования обеспечивается и подтверждается их соответствием с результатами вычислений в тестовых примерах, полученными другими авторами:

- Область существования волн Дьяконова, найденная на основе оригинального выражения для решения в радикалах, совпадает с найденной ранее.
- Среди вычисленных по оригинальному алгоритму мод волновода прямоугольного сечения, заполненного слоями, идентифицированы SLE моды. Сами SLE моды вычислены методом сопряжения по указаниям из монографии В.Т. Чоу [26]. Показано, что часть точек дисперсионной кривой, вычисленных по предложенному в диссертации символьно-численному алгоритму, ложатся на дуги дисперсионной кривой для SLE мод, построенной аналитически по методу сопряжения. Сам пример SLE мод представителен, поскольку эти моды — гибридные. Совпадение результатов означает, что оригинальный алгоритм правильно описывает явление гибридизации мод.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

1. VI Международная конференция и молодежная школа ИТНТ-2020, Самара, СамГУ, Россия, 26 – 29 мая 2020 г.
2. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука – общество – технологии – 2020», Москва, Московский политех, Россия, 20 февраля 2020 г.
3. Polynomial Computer Algebra '2020, Санкт-Петербург, Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Россия, 12–17 октября 2020 г.
4. Всероссийская научно-практическая конференция «Наука – общество – технологии – 2021», Москва, Московский политех, Россия, 26 марта 2021 г.
5. VII Международная конференция «Лазерные, плазменные исследования и технологии ЛаПлаз-2021», Москва, МИФИ, Россия, 23 – 26 марта 2021 г.

6. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», Москва, МГУ, Россия, 12 – 23 апреля 2021 г.
7. SFM'21 – международный симпозиум “Оптика и биофотоника IX”, Саратов, СГУ, Россия, 27 сентября – 1 октября 2021 г.
8. 22nd Workshop on Computer Algebra in memory of Professor Vladimir Gerdt, Дубна, ЛИТ, ОИЯИ, Россия, 24–24 мая 2021 г.
9. Научный семинар «Математическое моделирование» под рук. проф. Л.А.Севастьянова (РУДН, 14 февраля 2023 г.).
10. Научный семинар «Математические методы в естественных науках» под рук. проф. А.Н.Боголюбова (МГУ, 22 февраля 2023 г.).

Личный вклад. Автор принимал активное участие в исследовании систем дифференциальных уравнений, определяющих математические модели и в подготовке и представлении статей и докладов по теме работы. Он внёс определяющий вклад в разработку и тестирование алгоритмов, в проведение расчетов и экспериментов, а также в обработке и анализе полученных результатов. Автором был написан код в СКА Sage и проведена серия численных экспериментов. Постановка задачи о волнах Дьяконова принадлежит проф. Л.А. Севастьянову, идея применения техники базисов Гребнера – М.Д. Малых. Задача о нормальных модах волновода со сложным заполнением была предметом исследования докторской диссертации М.Д. Малых. Ему принадлежит идея сведения этой задачи к самосопряженной, реализованная в настоящей диссертации. Основные результаты и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в периодических научных журналах, индексируемых Scopus, 9 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023611606).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и приложения. Полный объем диссертации 117 страниц текста с 64 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 97 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и задачи работы.

Первая глава посвящена методам исследования задач математической физики и их реализации в системах компьютерной алгебры.

Вторая глава посвящена исследованию поверхностных электромагнитных волн (волн Дьяконова), распространяющихся вдоль плоской границы раздела изотропного вещества с постоянной диэлектрической проницаемостью, и анизотропного кристалла, тензор диэлектрической проницаемости которого имеет ось симметрии, направленную вдоль границы раздела. Хорошо известно, что вопрос о существовании таких поверхностных волн сводится к вопросу о существовании решения некоторой системы алгебраических уравнений и неравенств.

В этой главе была получена система алгебраических уравнений, описывающая поверхностные волны Дьяконова следующего вида

$$\begin{cases} q_o^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon_o, \\ q_e^2 = \beta^2 + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_o} \gamma^2 - \varepsilon_e, \\ q^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon, \\ ((\gamma^2 - \varepsilon)q_o + (\gamma^2 - \varepsilon_o)q) ((\gamma^2 - \varepsilon)\varepsilon_o q_e + (\gamma^2 - \varepsilon_o)\varepsilon q) = \\ = (\varepsilon_o - \varepsilon)^2 \beta^2 \gamma^2. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система исследована в системе компьютерной алгебры Sage. Техника исключительных идеалов, встроенная в Sage, позволила описать решение системы алгебраических уравнений параметрически при помощи одного параметра. Все исходные величины выражаются через этот параметр при помощи радикалов.

Для полного исследования разрешимости системы уравнений (1) и неравенств был предложен и разработан в Sage символьно-численный алгоритм определения параметров волны Дьяконова. На его основе была проведена серия компьютерных экспериментов. Проведено сравнение результатов компьютерных экспериментов с результатами Бикеева О.Н., полученными численно.

Третья глава посвящена исследованию дисперсионной кривой волновода, заполненного неоднородным, но изотропным веществом.

Пусть S — регулярная область в \mathbb{R}^2 , цилиндр $S \times \mathbb{R}$ будем называть волноводом. Условимся, что ось Oz используемой декартовой системы координат направлена по оси этого цилиндра. Нетривиальное поле вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x,y)e^{i\omega t - i\gamma z},$$

удовлетворяющее системе однородных уравнений Максвелла и граничным условиям

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0,$$

называют *нормальной модой волновода*. Параметр $\beta = \gamma/c$ называют коэффициентом фазового замедления. Для его отыскания при фиксированной частоте требуется решить задачу на собственные значения

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -ik\mu \vec{H}, \quad \overline{\text{rot}} \vec{H} = ik\varepsilon \vec{E}$$

с граничными условиями $\vec{n} \times \vec{E} = 0$, $\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$. Здесь под $\overline{\text{rot}}$ подразумевается дифференциальный оператор, в котором дифференцирование по z заменено на умножение $-i\gamma$. Как и в скалярном случае, точки плоскости $k\gamma$, при которых эта задача имеет нетривиальное решение, образуют *дисперсионную кривую волновода*. Если заполнение волновода оптически однородно, то эта кривая образована счетным числом гипербол

$$\gamma^2 = k^2 - \alpha^2,$$

где α^2 — положительные собственные значения оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана.

Чтобы построить дисперсионную кривую, нужно решить самосопряженную задачу о собственных колебаниях цилиндрического резонатора G по методу Галеркина.

Теорема 1. Точки пересечения дисперсионной кривой волновода $S \times \mathbb{R}$ с прямой $\gamma = \text{const}$ образуют счетное множество точек, множество абсцисс которых совпадает со множеством собственных частот резонатора $S \times [0, \pi/\gamma]$.

При численном решении такой задачи самым трудным моментом является построение базиса пространства $\mathfrak{H}(G)$. Выбор базиса осложнен тем обстоятельством, что элементы пространства $\mathfrak{H}(G)$ должны удовлетворять условию $\text{div } \vec{F} = 0$. Мы используем базис полей ТМ и ТЕ типа, построенный на основе собственных функций оператора Лапласа.

По методу Галеркина задача об отыскании волновых чисел сведена к алгебраической задаче на собственные значения

$$\hat{A}\vec{H} = k^2 \hat{B}\vec{H}. \quad (2)$$

Условимся сначала писать первые N ТМ волн, а потом первые N ТЕ волн, тогда матрицы этой системы будут иметь блочный вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица B диагональная, переходя от стандартного базиса к ортонормированному, задачу (2) удаётся свести к стандартной задаче на собственные значения

$$\hat{D}\vec{H} = k^2 \vec{H}.$$

Этот метод, как и в докт. дисс. М.Д. Малых, сводит исследование нормальных мод волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы, но в отличие от метода, предложенного в докт. дисс. М.Д. Малых, учитывает гибридизацию мод.

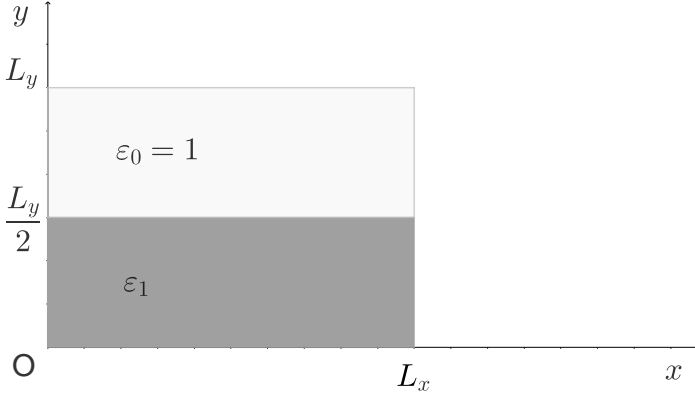


Рис. 1 — Сечение волновода

Наш подход отыскания точек дисперсионной кривой волновода состоит в следующем: для построения дисперсионной кривой в 1-ой четверти плоскости $k\gamma$ приближенно, мы делим рассматриваемый отрезок оси ординат на отрезки с некоторым шагом $\Delta\gamma$ и для каждого $\gamma = n\Delta\gamma$ вычисляем первые m собственных частот резонатора $S \times [0, \pi/\gamma]$, которым отвечают моды вида

$$\begin{aligned} E_{x,y} &= E_{x,y}(x,y) \sin \gamma z e^{i\omega t}, & E_z &= E_z(x,y) \cos \gamma z e^{i\omega t}, \\ H_{x,y} &= H_{x,y}(x,y) \cos \gamma z e^{i\omega t}, & H_z &= H_z(x,y) \sin \gamma z e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вычисление этих мод сводится к исследованию с.з. матрицы \hat{D} , искомые значения k^2 . Элементы матрицы \hat{D} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{n,m} &= \frac{\gamma^2}{\alpha_n \alpha_m} \iint_S (\nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_m) \frac{dx dy}{\varepsilon \mu} + \alpha_n \alpha_m \iint_S \varphi_n \varphi_m \frac{dx dy}{\varepsilon \mu}, \quad n, m = 1, \dots, N_1, \\ d_{n,m} &= d_{m,n} = \frac{\gamma}{\alpha_n \beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \iint_S \frac{\partial \psi_m \varphi_n}{\partial xy} \frac{dx dy}{\varepsilon \mu}, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad m = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2, \\ d_{n,m} &= \frac{1}{\beta_n \beta_m} \sqrt{\beta_m^2 + \gamma^2} \sqrt{\beta_n^2 + \gamma^2} \iint_S (\nabla \psi_n \cdot \nabla \psi_m) \frac{dx dy}{\varepsilon \mu}, \quad n, m = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2. \end{aligned}$$

В системе компьютерной алгебры Sage мы составили программу (<https://github.com/malykhmd>), которая вычисляет эти интегралы в символьном виде, составляет матрицу \hat{D} для любого заданного числового значения γ и вычисляет ее собственные значения при помощи стандартной функции библиотеки `linalg`.

Наш подход к построению дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением отличается от предложенных ранее

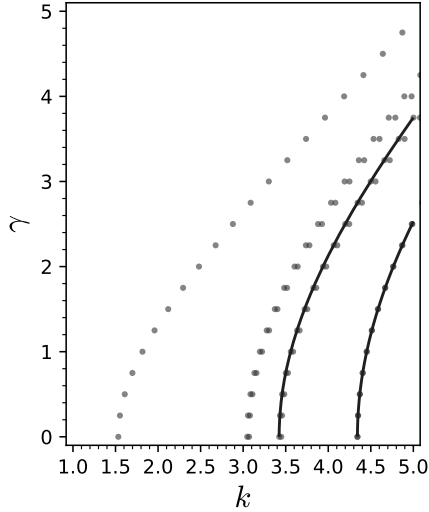


Рис. 2 — Дисперсионная кривая (ДК) волновода со вставкой при $L_x = 1$, $L_y = 2$, $\varepsilon_1 = 1.1$. Точками указаны точки ДК, найденные численно (взято 3 моды по каждому из направлений), сплошными линиями — дуги ДК, соответствующие SLE модам.

тем, что сводит эту задачу к вычислению собственных значений самосопряженной матрицы, то есть задаче хорошо изученной. Использование самосопряженной матрицы исключает возникновение артефактов, связанных с появлением малой мнимой добавки у собственных значений.

Мы реализовали этот подход для волновода прямоугольного сечения с прямоугольными вставками в системе компьютерной алгебры Sage и протестировали на SLE модах.

В качестве тестового примера рассмотрен волновод прямоугольного сечения $S = L_x \times L_y$ с постоянным заполнением $\varepsilon_0 = 1$ и $\mu = 1$ (см. рис. 1) и внутрь него помещена прямоугольная вставка S_1 с постоянным заполнением ε_1 и $\mu = 1$.

При этом было показано (см. рис. 2), что наша программа справляется с вычислением точек дисперсионной кривой, отвечающих гибридным модам волновода и найденные точки с графической точностью ложатся на аналитическую кривую даже при небольшом числе учитываемых базисных элементов.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

В настоящей диссертации были разработаны и реализованы в системе компьютерной алгебры Sage символьно-численные методы исследования распространения монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах. Были рассмотрены характерные

задачи, возникающие в теории оптически изотропных и анизотропных сред, а именно:

1. Разработан метод сведения исследования нормальных мод в закрытом волноводе с оптически неоднородным заполнением без диссипации к исследованию спектра самосопряженной матрицы. Этот метод, как и в докт. дисс. М.Д. Малых [25], сводит исследование нормальных мод волновода к исследованию спектра самосопряженной матрицы, но в отличие от метода, предложенного в докт. дисс. М.Д. Малых [25], учитывает гибридизацию мод. Это важно, поскольку появление несамосопряженных матриц и комплексных собственных значений обычно связано с введением диссипации и ведет к экспоненциально убывающим полям. В рассматриваемой в диссертации модели волновода диссипации нет и физический смысл этих явлений не вполне ясен и связан с дефектами приближенных методов отыскания собственных значений несамосопряженных матриц.
2. На основе этого метода разработан численный метод построения дисперсионной кривой волновода с оптически неоднородным заполнением без диссипации и реализован в виде комплекса программ в СКА Sage.
3. Разработанная программа была верифицирована на примерах, в которых возникают гибридные моды.
4. Разработан символично-численный метод исследования алгебраической модели поверхностных волн Дьяконова, он был реализован в виде комплекса программ в СКА Sage. При этом решение системы алгебраических уравнений, описывающих поверхностные волны Дьяконова, и исследованной ранее численно [35; 36], описано аналитически в радикалах.

При разработке приближенных методов исследования задач теории направляющих систем впервые был сохранен ряд алгебраических свойств решения точно, ряд вычислений был выполнен аналитически. Можно надеяться, что со временем все больше задач математической физики обретут приближенные методы решения, наследующие алгебраические свойства исходной задачи и допускающие ясную физическую интерпретацию.

Публикации автора по теме диссертации

1. Кройтор, О. О нормальных модах волновода [Текст] / О. Кройтор, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 403–420.

2. *Kroytor, O.* Investigation of the existence domain for Dyakonov surface waves in the Sage computer algebra system [Текст] / O. Kroytor // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2021. — Vol. 29, no. 2. — P. 114–125.
3. *Kroytor, O.* On involutive division on monoids [Текст] / O. Kroytor, M. Malykh // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2021. — Vol. 29, no. 4. — P. 387–398.
4. *Кройтор, О.* О дисперсионной кривой волновода, заполненного неоднородным веществом [Текст] / О. Кройтор, М. Малых // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2022. — Т. 30, № 4. — С. 330–341.
5. *Kroytor, O.* Surface electromagnetic waves [Текст] / O. Kroytor, O. Biskeev, M. Malykh // International Conference Polynomial Computer Algebra ‘2020; St. Petersburg, October 12–17, 2020, Euler International Mathematical Institute. — 2020. — P. 92–94.
6. *Кройтор, О.* Поверхностные электромагнитные волны [Текст] / О. Кройтор, М. Малых // Лазерные, плазменные исследования и технологии - ЛАПЛАЗ-2021, Москва, 23–26 марта 2021 года. — 2021. — С. 116–117.
7. *Кройтор, О.* Исследование поверхностных электромагнитных волн в CAS Sage [Текст] / О. Кройтор // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021». — 2021.
8. *Кройтор, О.* Исследование волн Дьяконова в Sage [Текст] / О. Кройтор // Новые технологии высшей школы. Наука, техника, педагогика. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. — 2021. — С. 45–50.

Список литературы

1. *Самарский, А. А.* О возбуждении радиоволноводов. I [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17, № 11. — С. 1283–1296.
2. *Самарский, А. А.* О возбуждении радиоволноводов. II [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17, № 12. — С. 1431–1440.
3. *Самарский, А. А.* О возбуждении радиоволноводов. III [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 971–983.
4. *Самарский, А. А.* О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.

5. Самарский, А. А. К теории возбуждения радиоволноводов [Текст] / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов // Избранные труды А. А. Самарского. — Москва : Макс Пресс, 2003. — Гл. 1. С. 28—57.
6. Могилевский, И. Е. Математические задачи теории дифракции [Текст] / И. Е. Могилевский, А. Г. Свешников. — Москва : МГУ, 2010.
7. Диваков, Д. В. Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / Д. В. Диваков. — М., 2017. — 124 с.
8. Тютюнник, А. А. Символьно-численное исследование векторной модели волноводного распространения электромагнитного излучения: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / А. А. Тютюнник. — М., 2018. — 100 с.
9. Смирнов, Ю. Г. О полноте системы собственных и присоединенных волн частично заполненного волновода с нерегулярной границей [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 297, № 4. — С. 829—832.
10. Смирнов, Ю. Г. Применения метода операторных пучков в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 312, № 3. — С. 597—599.
11. Смирнов, Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для эллиптических уравнений [Текст] / Ю. Г. Смирнов // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 140—147.
12. Новоселова, Н. А. Расчет характеристик распространения симметричных волн круглого волновода с радиально-неоднородным диэлектрическим заполнением [Текст] / Н. А. Новоселова, С. Б. Раевский, А. А. Титаренко // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексева. — 2010. — 2(81). — С. 30—38.
13. Агалаков, А. Н. О решении краевых задач для волноводов с анизотропным заполнением [Текст] / А. Н. Агалаков, С. Б. Раевский, А. А. Титаренко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1113—1123.
14. Боголюбов, А. Н. О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891—1899.

15. Делицын, А. Л. Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитоэлектрическим заполнением [Текст] / А. Л. Делицын // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 629—633.
16. Делицын, А. Л. О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов [Текст] / А. Л. Делицын // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2011. — Т. 51, № 10. — С. 1883—1888.
17. О базисности системы корневых векторов радиоволновода [Текст] / А. Н. Боголюбов [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2000. — № 6. — С. 17—20.
18. Боголюбов, А. Н. О корневых векторах цилиндрического волновода [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, М. Д. Малых // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126—129.
19. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца [Текст] / М. Д. Малых [и др.] // Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39—48.
20. Малых, М. Д. О представлении электромагнитных полей в закрытых волноводах с разрывным заполнением при помощи непрерывных потенциалов [Текст] / М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 2. — С. 342—354.
21. Боголюбов, А. Н. О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением [Текст] / А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869—1888.
22. Келдыш, М. В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов [Текст] / М. В. Келдыш // Избранные труды. Математика. — Москва : Наука, 1985. — Гл. 31. С. 305—332.
23. Делицын, А. Л. Смешанные конечные элементы для анализа вещественных и комплексных мод цилиндрических волноводов [Текст] / А. Л. Делицын, С. И. Круглов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2011. — № 6. — С. 53—58.
24. Тютюнник, А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением [Текст] / А. А. Тютюнник // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129—139.

25. *Малых, М. Д.* Разработка методов численного анализа закрытых электромагнитных волноводов: дис. ... докт. физ.-мат. наук : 05.13.18 [Текст] / М. Д. Малых. — М., 2019. — 214 с.
26. *Chew, W. C.* Lectures on theory of microwave and optical waveguides [Текст] / W. C. Chew. — 2012. — URL: wcchew.ece.illinois.edu.
27. *Егоров, Ю. В.* Частично заполненные прямоугольные волноводы [Текст] / Ю. В. Егоров. — Москва : Изд-во "Советское радио", 1967.
28. *Бергер, М. Н.* Прямоугольные волноводы с диэлектриками [Текст] / М. Н. Бергер, Б. Капилевич. — Москва : Изд-во "Советское радио", 1973.
29. *Нефёдов, Е. И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах [Текст] / Е. И. Нефёдов. — Москва : Изд-во "Наука", 1979.
30. *Dyakonov, M. I.* New type of electromagnetic wave propagating at an interface [Текст] / M. I. Dyakonov // Sov. Phys. JETP. — 1988. — Т. 67. — С. 714.
31. Properties of nematic LC planar and smoothly-irregular waveguide structures: research in the experiment and using computer modeling [Текст] / A. Egorov [et al.] // Computer Optics. — 2019. — Vol. 43, issue 6. — P. 976–982.
32. Observation of Dyakonov surface waves [Текст] / O. Takayama [и др.] // Physical Review Letters. — 2009. — Т. 102. — С. 043903.
33. *Takayama, O.* Lossless directional guiding of light in dielectric nanosheets using Dyakonov surface waves [Текст] / O. Takayama, D. Artigas, L. Torner // Nature Nanotech. — 2014. — Т. 9. — С. 419–424.
34. *Бикеев, О. Н.* Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред [Текст] / О. Н. Бикеев, Л. А. Севатьянов // Вестник РУДН. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 141–148.
35. Electromagnetic surface waves guided by a twist discontinuity in a uniaxial dielectric with optic axis lying in the discontinuity plane [Текст] / O. N. Bikeev [и др.] // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2017. — Т. 33, № 15. — С. 2009–2021.
36. Properties of Dyakonov waves propagating in an arbitrary direction in the plane of the boundary [Текст] / O. N. Bikeev [и др.] // TEWA. — 2021.
37. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing [Текст] / W. H. Press [et al.]. — 3rd ed. — Cambridge University Press, 2007. — P. 1256.
38. *Кокс, Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. [Текст] / Д. Кокс, Д. Литтл, Д. О'Ши. — 1-е изд. — Москва : Мир, 2000.

Кройтор Олег Константинович

Символьно-численное исследование поляризованного электромагнитного излучения в волноведущих системах

Предложены новые символьно-численные методы исследования распространения монохроматических поляризованных волн оптического диапазона в направляющих структурах.

Для анизотропного случая, разработан символьно-численный метод исследования поверхностных волн Дьяконова. Решение системы уравнений, описывающих волны Дьяконова, описано аналитически в радикалах.

Для изотропного случая, на основе векторной модели электромагнитного поля предложена новая самосопряженная постановка задачи построения дисперсионной кривой волновода, заполненного оптически неоднородным, но изотропным веществом.

Разработан численный метод построения дисперсионной кривой на основе этой постановки и реализован в системе Sage. Проведена верификация на точно решаемых примерах, в которых возникают гибридные моды.

Kroytor Oleg

Symbolic-numerical study of polarized electromagnetic radiation in waveguide systems

New symbolic-numerical methods for studying the propagation of monochromatic polarized optical waves in guiding structures are proposed.

For the anisotropic case, a symbolic-numerical method for studying Diakonov surface waves has been developed. The solution of the system of equations describing Diakonov waves is described analytically in radicals.

For the isotropic case, based on the vector model of the electromagnetic field, a new self-adjoint formulation of the problem of constructing the dispersion curve of a waveguide filled with an optically inhomogeneous but isotropic substance is proposed.

A numerical method for constructing a dispersion curve based on this formulation has been developed and implemented in the Sage system. Verification was carried out on precisely solved examples in which hybrid modes arise.