ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе К.Н. Жуйкова «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов», представленной на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы диссертации

Теория индекса берет свое начало с теоремы Атьи-Зингера об индексе эллиптических операторов на гладком замкнутом многообразии, доказанной в 1963 году и являющейся одним из крупнейших достижений математики XX-го века. Впоследствии результаты и методы теории индекса были распространены на разнообразные классы многообразий, наделенных дополнительными структурами, а также на более общие геометрические объекты. Развитие теории индекса тесно связано с появлением и становлением K-теории операторных алгебр и некоммутативной геометрии.

Одним из направлений теории индекса, активно развивающимся в недавнее время, является теория индекса нелокальных эллиптических операторов со сдвигами аргументов на гладких многообразиях. Обычно сдвиги задаются некоторой группой Ли G диффеоморфизмов многообразия, а соответствующие операторы называются G-операторами. Исследование теории индекса G-операторов было начато А.Б. Антоневичем в случае конечных групп и продолжено для бесконечных групп в работах А. Конна, В. Е. Назайкинского, А. Ю. Савина, Б. Ю. Стернина и др. В настоящее время достаточно хорошо разработана теория индекса G-операторов на гладких замкнутых многообразиях.

Значительно менее исследована теория индекса G-операторов на некомпактных и сингулярных многообразиях и многообразиях с краем. Хорошо известно, что формулы индекса для псевдодифференциальных операторов на таких геометрических объектах помимо стандартного вклада внутренней (или гладкой) части многообразия, имеющего такой же вид, как в случае гладкого компактного многообразия, содержат также члены, описывающие вклады бесконечности, границы или сингулярностей. Впервые они появились в работах Атьи, Патоди и Зингера по теории индекса операторов Дирака на многообразиях с краем, которая, как хорошо известно, эквивалентна теории индекса на некомпактных многообразиях с цилиндрическими концами. Вклад границы (или цилиндрического конца) в этом случае описывается некоторым спектральным инвариантом граничного оператора, называемым η-инвариантом. Поэтому естественно ожидать, что исследование задачи об индексе для G-операторов на некомпактных и сингулярных многообразиях и многообразиях с краем также должно сопровождаться исследованием соответствующих η-инвариантов. Другим актуальным направлением в теории индекса G-операторов является исследование задачи об индексе в случае, когда сдвиги задаются линейным представлением группы G в пространстве функций на многообразии посредством квантованных канонических преобразований, являющихся квантованиями однородных канонических преобразований кокасательного расслоения.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи об индексе и соответствующих η-инвариантов в двух важных частных случаях: для эллиптических $\mathbb{Z}$-операторов на многообразиях с периодическими концами и для эллиптических $\mathbb{Z}$-операторов в евклидовом пространстве в случае, когда группа $\mathbb{Z}$ действует метаплектическими преобразованиями в пространстве функций.

Краткая характеристика содержания диссертации

Результаты представлены в диссертации следующим образом. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели научных исследований, аргументирована их научная новизна, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассматриваются семейства псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии X вида

$$D(p) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(p)e^{2\pi ikp} : C^\infty(X) \to C^\infty(X), \quad p \in \mathbb{R},$$

где для любого $k \in \mathbb{Z}$ семейство $\{D_k(p), p \in \mathbb{R}\}$ является псевдодифференциальным оператором (ПДО) с параметром на многообразии X и последовательность $\{D_k(p), k \in \mathbb{Z}\}$ таких семейств быстро убывает в пространстве ПДО с параметром. В диссертации такие семейства называются операторами с параметром и периодическими коэффициентами. Используя подходящие регуляризации операторного следа и интеграла по параметру, автор определяет след на пространстве всех операторов с параметром и периодическими коэффициентами и с его помощью η-инвариант обратимого элемента этого пространства. Доказаны основные свойства η-инварианта, в частности, формула производной по параметру для гладких гомотопий.

Вторая глава посвящена теории индекса $\mathbb{Z}$-операторов на бесконечном цилиндре $M = S^1 \times \mathbb{R}$ с координатами (x,t), на котором группа $\mathbb{Z}$ действует сдвигами по переменной t. Точнее, рассматривается $\mathbb{Z}$-оператор вида

$$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_kT^k : H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N) \to H^{s-m,\gamma^-,\gamma^+}(M,\mathbb{C}^N),$$

где D_k — матричный дифференциальный оператор порядка m на M, T^k — оператор сдвига по переменной t: $T^ku(x,t) = u(x,t-2\pi k)$ для $(x,t) \in S^1\times\mathbb{R}$, и $H^{s,\gamma^-,\gamma^+}(S^1\times\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ — весовое пространство Соболева порядка s с весовой функцией, равной $e^{\gamma^\pm t}$ при $t \to \pm\infty$. Предполагается, что сумма, стоящая в правой части этого равенства, содержит только конечное число ненулевых слагаемых, а коэффициенты дифференциальных операторов D_k не зависят от t при больших t. Данное исследование можно рассматривать как простейший модельный пример теории индекса $\mathbb{Z}$-операторов на некомпактном гладком многообразии с цилиндрическими концами (а также на сингулярном многообразии с изолированными коническими точками).

Поскольку многообразие M некомпактно, определение эллиптичности и формула индекса даются в терминах двух символов оператора — стандартного в теории G-операторов внутреннего символа и конормального символа, описывающего поведение оператора на концах и представляющего собой пару операторов с параметром и периодическими коэффициентами типа тех, которые изучались в первой главе. Теорема конечности в рассматриваемом случае была доказана А. Ю. Савиным и Б. Ю. Стерниным в 2016 году. Основной результат данной главы — формула индекса для эллиптических операторов данного типа. Заметим, что полученная формула индекса, в частности, использует η-инвариант, введенный в первой главе.

Третья глава посвящена проблеме индекса дифференциальных операторов на прямой с коэффициентами, периодическими на бесконечности. Автор начинает с исследования периодического случая. Он рассматривает псевдодифференциальные операторы на вещественной прямой, инвариантные относительно сдвига на 2π. Такой оператор можно записать в виде

$$D = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k(-i\partial_t)e^{ikt} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

где $\{D_k(\xi) \in S^m, k \in \mathbb{Z}\}$ — быстро убывающая последовательность символов. На множестве Ψ^{-1}_{per} таких операторов порядка -1 определяется регуляризованный след и с помощью него η-инвариант обратимого оператора D указанного выше вида. Доказаны основные свойства η-инварианта. В случае, когда D является дифференциальным оператором, автор доказывает критерий его обратимости в терминах матриц монодромии.

Затем автор переходит к исследованию дифференциальных операторов с периодическими на бесконечности коэффициентами. Рассматривается оператор произвольного порядка n вида

$$D = \sum_{0\le k\le n} d_k(t)(-i\partial_t)^k : H^s(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \to H^{s-n}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N),$$

где коэффициенты d_k —2π-периодические функции при больших $|t|$. Для таких операторов доказана формула индекса в терминах матриц монодромии предельных периодических операторов. В качестве следствия доказана формула для η-инварианта обратимого периодического дифференциального оператора в терминах его матрицы монодромии.

Четвертая глава посвящена теории индекса эллиптических $\mathbb{Z}$-операторов в $\mathbb{R}^N$ в случае, когда группа $\mathbb{Z}$ действует метаплектическими преобразованиями. Здесь рассматриваются двучленные $\mathbb{Z}$-операторы вида

$$D = D_0 + D_1\Phi : \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N),$$

где D_0 и D_1 — псевдодифференциальные операторы порядка d на $\mathbb{R}^N$, Φ — метаплектический оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}^N)$, ассоциированный с линейным симплектическим отображением S фазового пространства $T^*\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{2N}$ и $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ — подходящая шкала пространств Соболева. Автор определяет символ таких операторов и понятие эллиптичности и доказывает фредгольмовость эллиптических операторов. Основной результат главы — критерий фредгольмовости рассматриваемых операторов в случае, когда действие группы $\mathbb{Z}$ на единичной сфере S^{2N-1}, индуцированное преобразованием S, топологически свободно.

Диссертация написана грамотно и аккуратно оформлена. Изложение материала четкое. Доказательства основных результатов приведены полно и подробно, со многими техническими деталями.

Достоверность и новизна результатов диссертации

Результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими математическими доказательствами. Достоверность и новизна научных результатов диссертации подтверждается также их публикацией в ведущих российских и международных математических журналах и апробацией на международных и всероссийских конференциях и научных семинарах.

Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

Все научные положения, выводы и заключения, полученные в диссертации, полностью обоснованы. Это подтверждается строгостью приведенных математических доказательств и корректным использованием современных методов теории дифференциальных уравнений в частных производных, микролокального анализа, дифференциальной геометрии и функционального анализа.

Ценность для науки и практики результатов работы

Работа носит теоретический характер. Научная значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в развитии теории индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов аргументов. Полученные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории индекса и некоммутативной геометрии.

Подтверждение опубликования основных результатов диссертации в научной печати

Результаты диссертации своквременно и надлежащим образом опубликованы в 14 работах, из них 4 статьи в научных журналах и 10 — в тезисах докладов на международных конференциях.

Соответствие содержания автореферата основным положениям диссертации

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания по работе

По диссертации имеются следующие замечания:

- С. 27: Говоря о ядре Шварца сглаживающего оператора, автор подразумевает выбор гладкой положительной плотности на многообразии, что следовало указать явно. Аналогично на с. 28, говоря о функции расстояния, автор подразумевает неявно выбор римановой метрики на многообразии.

- С. 37: В формулировке леммы 1.8 следовало указать, что $n = \dim X$. Кажется, что это нигде не сказано, но везде неявно предполагается.
- С. 54, 13 стр.: Правильно сказать, что Tr — стандартный след на идеале ядерных операторов в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}, \mu) \otimes \mathbb{C}^N$.
- С. 56, -3 стр.: Следует объяснить, почему можно предположить, что операторы D_k в (2.1) при $t < -1$ не зависят от ε.
- С. 63, -1 стр.: В формуле (2.33) $\overline{\sigma}_\varepsilon$ зависит от N. (Отметим, что только внизу на этой странице обозначение N используется в трех разных смыслах). Следует объяснить, как выбирается N в этой формуле и тем самым в формуле (2.34).
- С. 70, лемма 3.4: В формулировке леммы приведена конкретная формула для постоянной c_1. Однако на следующей странице сначала утверждается, что $c_1 = 0$, а в формуле (3.12) приводится еще одна формула для c_1. Похоже, что автор понимает c_1 как некоторый функционал от оператора, стоящей в левой части равенства, что следовало бы пояснить более аккуратно.
- С. 79, -8 стр.: Следует объяснить, почему без потери общности можно считать, что $\gamma_+ = \gamma_- = 0$.
- С. 95, теорема 4.6: Имеется некоторая путаница в обозначениях d и $2N$. Заметим, что d обозначает также порядок оператора.

В тексте диссертации обнаружено некоторое число мелких опечаток, которые следовало бы исправить.

Высказанные замечания не носят принципиального характера и не оказывают влияния на общую положительную оценку работы.

Заключение

Диссертационное исследование К.Н. Жуйкова «Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов» является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение ряда актуальных задач, имеющих важное значение в теории индекса нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных с группами сдвигов. Работа соответствует требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, согласно п.2.2 раздела II Положения о присуждении ученых степеней в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов», утвержденного Ученым советом РУДН протокол № 12 от 23.09.2019г., а ее автор, Жуйков Константин Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:
доктор физ.-мат. наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, доцент,
главный научный сотрудник, Институт математики с вычислительным центром — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук Кордюков Юрий Аркадьевич

«7» октября 2022 г.

450008, Уфа, ул. Чернышевского, д. 112
yurikor@matem.anrb.ru, тел.: +7 (919) 610-45-74

Подпись Кордюкова Ю.А. заверяю

Директор ИМВЦ УФИЦ РАН
доктор. физ.-мат. наук Мусин Ильдар Хамитович