

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ ИМЕНИ ПАТРИСА
ЛУМУМБЫ»

На правах рукописи

Иванова Ника Михайловна

**Исследование вероятностно-временных характеристик моделей
 k -из- n с приложением к анализу надёжности привязного
мультироторного летательного модуля**

Специальность 1.2.3. Теоретическая информатика, кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Рыков Владимир Васильевич

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Аналитическое исследование характеристик надёжности моделей k-из-n	
k -из- n	12
1.1 Постановка задачи	14
1.2 Метод введения дополнительных переменных	15
1.3 Нестационарные вероятности	18
1.3.1 Сценарий частичного ремонта системы	18
1.3.2 Сценарий полного ремонта системы	28
1.4 Функция надёжности и среднее в.б.р. системы	34
1.5 Стационарные вероятности	37
1.5.1 Сценарий частичного ремонта системы	37
1.5.2 Сценарий полного ремонта системы	42
1.6 Заключение	46
Глава 2. Исследование моделей k-из-6 и анализ надёжности БПЛА на базе гексакоптера	48
2.1 Описание системы и объекта исследования	48
2.2 Характеристики надёжности гексакоптера, зависящие от времени его функционирования	51
2.2.1 Нестационарные вероятности состояний модели 2-из-6 для сценария частичного ремонта	52
2.2.2 Нестационарные вероятности состояний модели 2-из-6 для сценария полного ремонта	56
2.2.3 Функция надёжности и среднее в.б.р. системы	59
2.3 Стационарные характеристики надёжности гексакоптера	68
2.3.1 Стационарные вероятности состояний модели 3-из-6 для сценария частичного ремонта	69
2.3.2 Стационарные вероятности состояний модели 3-из-6 для сценария полного ремонта	74
2.4 Заключение	78
Глава 3. Имитационная модель системы k-из-n с произвольными исходными распределениями и её приложение к анализу надёжности гексакоптера	80
3.1 Имитационное моделирование системы $\langle GI_{k < n} GI 1 \rangle$	80
3.1.1 Общая процедура моделирования	80

3.1.2	Исходные данные	83
3.2	Функция надёжности и квантили модели $\langle GI_{2<6} GI 1 \rangle$	84
3.2.1	Верификация имитационной модели на примере системы $\langle M_{2<6} GI 1 \rangle$.	84
3.2.2	Чувствительность функции надёжности модели $\langle M_{2<6} GI 1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта	85
3.2.3	Чувствительность функции надёжности модели $\langle GI_{2<6} M 1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р.	87
3.2.4	Чувствительность функции надёжности модели $\langle GI_{2<6} GI 1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта	89
3.3	Стационарные вероятности	94
3.3.1	Верификация имитационной модели на примере системы $\langle M_{3<6} GI 1 \rangle$.	94
3.3.2	Чувствительность стационарного коэффициента готовности модели $\langle GI_{3<6} M 1 \rangle$	96
3.3.3	Чувствительность стационарного коэффициента готовности модели $\langle GI_{3<6} GI 1 \rangle$	97
3.4	Заключение	98
	Заключение	101
	Список сокращений и условных обозначений	102
	Словарь терминов	103
	Список литературы	104
	Список рисунков	112
	Список таблиц	113
	Приложение А. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ	114

Введение

Моделирование информационных процессов (сбор, передача, обработка и хранение данных и информации) и управление ими являются актуальными задачами в связи с широким внедрением цифровизации в разнообразные области человеческой деятельности (телекоммуникации, транспорт, менеджмент, медицина, сельское хозяйство). Важность задачи повышения надёжности технических систем, в том числе информационных, обусловлена тем, что неудовлетворительная надёжность зачастую порождает крупные расходы на обслуживание этих процессов, а в некоторых случаях может привести к серьёзным последствиям, вплоть до отказа в выполнении своих функций [1].

В начале 20-го века исследование математических моделей процессов передачи информации, в том числе в телефонных сетях, привело к созданию теории массового обслуживания (ТМО) и теории надёжности в рамках математической теории исследования операций [2]. Появление классических моделей систем массового обслуживания (СМО) – Эрланга, Энгсета и других вызвано последующим развитием ТМО. Совершенствование современных технологий, отвечающих за информационные процессы, ставит перед исследователями и проектировщиками новые задачи. При этом требования к надёжности таких системы довольно высоки.

Одной из широко распространённых методик повышения надёжности технических систем является техника резервирования [3]. Модель k -из- n является одним из примеров резервированной системы. Кроме того, её также можно рассматривать в качестве некоторого обобщения системы Эрланга на случай, когда $n-k$ каналов резервируются для обслуживания экстренных (критических) вызовов, а потеря «обычного» вызова наступает при занятости k линий.

Модель k -из- n ($1 \leq k \leq n$) – это модель системы, состоящей из n компонентов. Её можно описать двумя способами в зависимости от того, какой смысл имеет параметр k . Если параметр k представляет собой количество компонентов в системе, которые должны быть работоспособны, чтобы вся система работала, то такая модель обозначается k -из- $n : G$. Если же k представляет собой количество компонентов в системе, при отказе которых наступает отказ всей системы, то она называется k -из- $n : F$ [4]. Оба описания тесно связаны и каждое из них двойственно другому. На основе этих определений модель k -из- $n : G$ эквивалентна модели $(n - k + 1)$ -из- $n : F$. Аналогично модель k -из- $n : F$ эквивалентна модели $(n - k + 1)$ -из- $n : G$. Заметим также, что при $k = 1$ модель выглядит как модель системы последовательного соединения, а при $k = n$ – модель системы параллельного соединения. В настоящей диссертационной работе используется второй тип описания системы, при этом символ F опускается.

Исследование надёжности моделей k -из- n представляет интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. С теоретической точки зрения это даёт широкие возможности для создания и применения новых математических методов и алгоритмов. В настоящее

время имеется обширная библиография по изучению различных типов моделей k -из- n (см., например, работы К. Триведи [5], Ш. Чакраварти [6] и приведённую там библиографию). Среди них особо выделяются последовательные, взвешенные, бинарные и другие модели k -из- n . Эти модели рассматриваются при различных предположениях о зависимости компонентов, виде и доступности ремонта, расположении компонентов и перераспределении нагрузки от вышедших из строя компонентов на уцелевшие. В [7] исследована надёжность модели k -из- n с отказами общего типа с использованием многомерного экспоненциального распределения. В [8] рассмотрена доступность и надёжность модели 2-из- $(m + n)$ с двумя типами отказов. В [9] И. Б. Герцбах и И. Шпунгин исследовали неоднородную модель, состоящую из m -компонентов a -типа и n -компонентов b -типа. В работе [10] авторы проанализировали проблему ремонта системы с ненадёжными ремонтными устройствами. Проблема ремонта системы с тёплым резервированием, отказы которой возникли из-за сбоя балансировки, повторного включения и переключения в режим ожидания, рассмотрены в [11]. Также продолжают исследования моделей k -из- n с несколькими типами отказов [12], перераспределении нагрузки отказавших компонентов на работающие [13] и другие, особенно значимые для систем передачи и обработки информации. Такие модели также рассматривались в рамках различных политик ремонта [14–16].

Другим интересным направлением исследования надёжности информационных процессов является оценка надёжности взвешенных моделей k -из- n , то есть систем, компоненты которых вносят неравномерный вклад в срок службы системы. Такого рода системы функционируют при условии, что общий вклад компонентов выше указанного уровня производительности. При этом простая модель k -из- n является частным случаем взвешенной модели k -из- n , у которой все компоненты вносят одинаковый вклад в срок службы системы, равный единице. За последние несколько десятилетий проведено множество исследований по различным аспектам взвешенных моделей k -из- n , в том числе исследования этих систем с несколькими состояниями или случайными весами [17] (см. также [18; 19]).

С практической точки зрения модели k -из- n находят применение во многих явлениях реального мира, включая телекоммуникационную отрасль [20], инженерное дело [21], производство [22] и сервисные приложения. В информационных процессах модель k -из- n применяется для моделирования кластеров высокой доступности (High Availability cluster), где все узлы, имеющие однородную конфигурацию программного обеспечения, выполняют одинаковые запросы, а в случае отказа одного из узлов нагрузка перераспределяется между оставшимися. Модели k -из- n могут успешно применяться в рамках исследования мультисервисных сетей, технологии многоадресной рассылки и в других беспроводных сетях передачи данных [23–27].

В рамках исследования технических систем модели k -из- n также применяются для решения проблемы «последней мили» в системах передачи данных на базе мультироторного беспилотного модуля (мультикоптер) привязной высотной платформы [28]. Такие платформы активно используются в гражданских и оборонных отраслях для выполнения длительных полётов и бесперывных заданий, таких как задачи наблюдения, радиоэлектронной борьбы,

обеспечения широкополосной беспроводной связи, развёртывания телекоммуникационной инфраструктуры в чрезвычайных ситуациях и другие [29–31]. При этом с одной стороны, модель k -из- n может обозначать сеть, состоящую из n привязных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), обеспечивающих телекоммуникационное покрытие, остановка которой является следствием неисправности и прекращения функционирования k аппаратов. С другой стороны, эта же модель может описывать один привязной БПЛА, построенный по схеме мультикоптера с n двигателями, функционирование которого прекращается при неисправности k двигателей.

Исследования в области надёжности информационных процессов и технических систем охватывают широкий спектр задач и направлений, одними из которых является исследование и анализ чувствительности их характеристик к виду распределения времени безотказной работы (в.б.р.) и ремонта её компонентов [32].

Понятие «чувствительность» имеет разные толкования в зависимости от области, в которой используется этот термин. Это свидетельствует о том, что так называемая теория чувствительности является мультидисциплинарной (см., например, [33–36]). Несмотря на это, общий смысл этого термина таков. Под чувствительностью понимается некоторое свойство системы или модели, отвечающее за изменчивость выходных данных при изменении исходных параметров модели.

Как упоминалось ранее моделирование систем передачи информации привело к развитию ТМО. Анализ чувствительности в свою очередь берёт своё начало из изучения моделей ТМО. Один из первых результатов о нечувствительности характеристик СМО к виду распределения времени обслуживания был получен в 1957 г. Б. А. Севастьяновым. В [37] он доказал нечувствительность распределения Эрланга к виду распределения времени обслуживания с фиксированным средним значением для СМО с потерями и пуассоновским входным потоком. Предложенная и доказанная Севастьяновым теорема послужила отправной точкой создания теории чувствительности в рамках ТМО (см., например, обзорные статьи [38–40]).

В 1976 г. И. Н. Коваленко [41] нашёл необходимые и достаточные условия нечувствительности стационарных характеристик надёжности резервированной восстанавливаемой системы с показательным распределением в.б.р. и общим распределением времени ремонта её компонентов. Эти условия сводятся к достаточному количеству ремонтных единиц, то есть к возможности немедленно приступить к ремонту любого неисправного компонента. Достаточность этих условий для случая общих распределений как в.б.р., так и ремонта была получена в 2013 г. В. В. Рыковым [42] с помощью теории многомерных процессов рождения и гибели.

Существенный вклад в изучение нечувствительности стационарных вероятностей состояний различных СМО и сетей массового обслуживания (СМО) внес В. А. Ивницкий (см., например, [43; 44]). Разработка таких моделей привела к изучению систем и сетей, в том числе передачи данных, с несколькими типами заявок [45; 46], временно неактивными заявками [47].

С другой стороны, развитие теории Б. А. Севастьянова привело к изучению некоторых обобщённых полумарковских процессов и нечувствительности их стационарных вероятностей [48; 49].

Кроме того, имеется ряд исследований, посвящённых анализу чувствительности вероятностно-временных характеристик различных СМО к виду распределения времени обслуживания, например, мультисерверной системы обслуживания $M|G|c$ [50]; модели $GI|G|m|0$ [51]; некоторых моделей холодного резервирования [52; 53], неоднородной дублированной системы горячего резервирования с моделью отказа Маршалла-Олкина [54]; некоторых СМО с неоднородными заявками [55].

В рамках исследования чувствительности характеристик надёжности стохастических систем их поведение часто рассматривается в сценариях редких отказов или быстрого восстановления. Ряд исследований на эту тему посвящен асимптотической нечувствительности характеристик СМО к виду распределения времени ремонта при редких отказах или быстром восстановлении [54; 56—59].

Исследование надёжности информационных процессов и технических систем является первостепенной задачей во всех областях, где они внедрены. В описанном выше понимании целью анализа чувствительности моделей, которые соответствуют этим процессам и системам, является выявление влияния исходных данных на поведение всей модели и, как следствие, поддержание высоконадёжной работоспособности системы. Практическая значимость данной проблемы обусловлена и другим фактором. На практике длительности безотказной работы и ремонта компонентов зачастую либо известны из технических характеристик системы, либо оцениваются на основе имеющихся статистических данных с точностью до двух моментов. Однако для проведения вероятностного анализа надёжности системы этой информации недостаточно, необходимо знать вид распределения соответствующего времени. В этом случае анализ чувствительности не только восполнит пробел отсутствия информации, но и послужит в качестве набора рекомендаций для инженеров, разработчиков и проектировщиков в контексте повышения надёжности технических систем и работоспособности информационных процессов.

Таким образом диссертационная работа посвящена исследованию технических систем и информационных процессов на основе резервированных моделей k -из- n и анализу чувствительности показателей надёжности этих моделей к виду распределения исходной информации, что определяет её актуальность, новизну, а также тесную связь с современным уровнем развития этого направления. В качестве примера модели будет рассматриваться мультиротный беспилотный модуль привязной высотной телекоммуникационной платформы.

Стоит отметить, что предложенные в диссертационной работе математические модели и методы анализа надёжности являются в некотором смысле универсальными и могут быть распространены на исследования технических систем в других областях.

Степень разработанности темы. В настоящее время в России и за рубежом исследованию моделей k -из- n и их приложениям посвящено много работ, обзор некоторых из них представлен выше.

Исследованием моделей k -из- n , в том числе в рамках анализа надёжности мультироторного летательного модуля, занимались отечественные и зарубежные ученые, В. В. Рыков, В. М. Вишневский, И. Б. Герцбах, И. Шпунгин, К. Trivedi, W. Kuo, M. Zuo, A. Krishnamoorthy, S. Chakravarthy, M. Xie, S. Amari, R. Bergman, Y. Zhang и другие. Задачам анализа систем передачи данных, осуществляемых с помощью БПЛА, посвящено значительное количество работ. Вклад в развитие теоретических основ этих исследований внесли российские ученые К. Е. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака, В. М. Вишневский, Р. В. Киричек, А. Е. Кучерявый, Д. А. Молчанов и другие.

Важной частью исследования надёжности стохастических систем является анализ чувствительности характеристик этих систем к виду исходной информации. Значительный вклад в развитие этой области внесли многие ученые, Б. А. Севастьянов, Б. В. Гнеденко, А. Д. Соловьёв, Ю. К. Беляев, И. Н. Коваленко, И. А. Ушаков, В. А. Ивницкий, В. В. Калашников, Д. Кёниг, В. В. Рыков и другие.

Объектом исследования является модели k -из- n и их применение к анализу надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы.

Предметом исследования являются методы анализа и алгоритмы вычисления вероятностно-временных характеристик математических моделей k -из- n и их применение к исследованию БПЛА привязной высотной телекоммуникационной платформы, исследование и анализ чувствительности характеристик надёжности этой системы к виду распределения исходной информации.

Целью данной работы является анализ математических моделей k -из- n и их применение для исследования надёжности и чувствительности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы к виду функции распределения (ф.р.) в.б.р. и ремонта компонентов. Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Исследование математических моделей k -из- n с показательным распределением в.б.р. и произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы для двух сценариев восстановления системы после полного отказа.
2. Разработка методов, алгоритмов и программных средств вычисления основных вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k -из- n на основе метода марковизации.
3. Применение теоретических результатов для вычисления основных вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k -из- n с помощью численных методов, а также исследование чувствительности этих характеристик к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта.
4. Разработка имитационных моделей систем k -из- n с произвольными распределениями в.б.р. и ремонта компонентов и всей системы, исследование чувствительности характеристик надёжности к виду ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта компонентов и всей системы.

Научная новизна:

1. В отличие от известных исследований, изучены модели восстанавливаемой системы k -из- n с произвольными распределениями как в.б.р., так и времени восстановления её компонентов и всей системы. При этом рассмотрены два сценария для восстановления всей системы.
2. Для распределения вероятностей состояний двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний, который описывает математические модели k -из- n с произвольным распределением времени восстановления её компонентов и системы в целом, впервые выведены системы дифференциальных уравнений Колмогорова, получено их аналитическое решение в терминах преобразования Лапласа, предложен и реализован в частных случаях алгоритм его численного исследования.
3. Наряду с аналитическим исследованием чувствительности характеристик надёжности моделей k -из- n к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта, впервые проведён анализ чувствительности моделей k -из- n к виду распределения времени безотказной работы их компонентов с помощью имитационной модели.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую значимость представляют разработанные в диссертации математические методы и вычислительные алгоритмы анализа вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k -из- n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы. Созданные на основе полученных теоретических результатов программы численного исследования и имитационного моделирования представляют практическую значимость, поскольку позволяют производить расчёты характеристик надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы на основе восстанавливаемых моделей k -из- n с произвольными распределениями и в.б.р., и ремонта компонентов и системы. Более того, предложенные алгоритмы и программы позволяют находить оценку скорости сходимости ф.р. в.б.р. системы к показательному распределению при быстром восстановлении её компонентов. Полученные теоретические результаты и разработанные программные средства были использованы для оценки надёжности БПЛА, а также проведения анализа чувствительности характеристик надёжности беспилотного модуля к виду исходной информации.

Результаты работы также были использованы в исследованиях, проводимых по следующим конкурсам и грантам:

- Конкурс на выполнение НИР/НИОКР аспирантами РУДН Системы грантовой поддержки научных проектов РУДН в 2022 году, НИР № 021930-2-000 «Исследование и анализ чувствительности систем k -из- n с произвольными исходными распределениями» (руководитель Иванова Н.М.).
- Грант Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 20-01-00575А «Эргодичность классических и конечно-аддитивных марковских процессов и ее применение в прикладных стохастических моделях» (руководитель Веретенников А.Ю.).

- Грант Российского научного фонда (РНФ) № 22-49-02023 «Разработка и исследование методов повышения надёжности привязных высотных беспилотных телекоммуникационных платформ нового поколения» (руководитель Вишневецкий В.М.).

Кроме того, результаты диссертации были внедрены в учебный процесс в рамках учебной дисциплины «Прикладные стохастические модели», читаемой студентам магистратуры 1-го курса направления «Прикладная математика и информатика» РУДН.

Методы исследования. Диссертационное исследование опирается на методы теории вероятностей, случайных процессов, надёжности, численные методы решения дифференциальных уравнений. В диссертационной работе на основе метода введения дополнительных переменных разработана методика составления и решения прямых дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний. Эти уравнения приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных гиперболического типа с кратными корнями характеристических уравнений. На основе метода характеристик предложен алгоритм решения систем соответствующих уравнений. Для исследования вероятностных характеристик надёжности системы, работающей в стационарном режиме, применён метод вариации постоянных. Более того, для анализа систем с произвольными распределениями как в.б.р. компонентов системы, так и их ремонта разработаны программные средства имитационного моделирования, которые использованы для анализа чувствительности характеристик надёжности этих систем к виду ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта их компонентов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Двумерный марковский процесс с дискретно-непрерывным множеством состояний, который позволяет вычислять характеристики надёжности математических моделей k -из- n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и системы для двух сценариев восстановления системы после отказа.
2. Аналитическое решение дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных для вероятностей состояний марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний, которое позволяет вычислять нестационарные вероятности состояний системы (вероятности переходного режима) и функцию надёжности системы, алгоритм их численного исследования, а также решение и численное исследование уравнений баланса для стационарного режима.
3. Анализ надёжности моделей k -из- n и исследование чувствительности их характеристик к виду функции распределения и значению коэффициента вариации времени ремонта, который осуществляется как аналитическими методами (для показательно распределённых длительностей безотказной работы компонентов модели), так и с помощью имитационного моделирования в случае произвольного распределения в.б.р. компонентов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается их строгими доказательствами, а также подтверждается численными расчётами и вычислительными экспериментами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях: 9-я конференция с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» (ИТТММ 2019; Москва, РФ), 23-я и 25-я Международные конференции «Распределённые компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN 2020, DCCN 2022; Москва, РФ), the 30th European Safety and Reliability Conference and 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference (ESREL 2020 PSAM15; Venice, Italy), 17-я Всероссийская школа-конференция молодых учёных «Управление большими системами» (УВС 2021, Москва, РФ), 21-я Международная конференция им. А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ 2022; Карши, Узбекистан), the 20th Conference of the Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society (ASMDA 2023; Heraklion, Crete, Greece).

Соответствие паспорту специальности. Диссертационное исследование соответствует следующим разделам паспорта специальности 1.2.3 Теоретическая информатика, кибернетика, а именно **п. 9** «Математическая теория исследования операций», **п. 12** «Модели информационных процессов и структур», **п. 26** «Теория надёжности и безопасности использования информационных технологий».

Личный вклад. Основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно. В монографии [60] автором получены аналитические и численные результаты, содержащиеся в главах 2, 3. В работе [61] автору принадлежит участие в разработке и реализации алгоритма вычисления функции надёжности модели k -из- n . В работах [62–64] – аналитические результаты и численные эксперименты. В [65; 66] – разработка имитационной модели для оценки вероятностных характеристик надёжности модели k -из- n . Работы [57; 67–72] выполнены без соавторов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, включая 1 монографию, 1 публикацию в журнале, рекомендованном ВАК, 6 — в изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 114 страниц с 24 рисунками и 20 таблицами. Список литературы содержит 96 наименований.

Глава 1. Аналитическое исследование характеристик надёжности моделей k -из- n

В настоящей главе представлено аналитическое исследование основных вероятностно-временных характеристик моделей k -из- n для последующего анализа надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы. Полагаем, что параметры модели k и n – произвольные целочисленные значения, так как рассматриваемые БПЛА на практике могут иметь различную архитектуру (квадро-, гекса-, октокоптер и другие).

Для аналитического исследования характеристик надёжности моделей k -из- n применяются следующие методы:

- метод введения дополнительных переменных,
- вывод уравнений Колмогорова,
- их решение с помощью метода характеристик для вычисления нестационарных вероятностей состояний (вероятностей переходного режима) и функции надёжности (вероятности безотказной работы во времени) моделей k -из- n ,
- а также метод вариации постоянных для вычисления стационарных характеристик надёжности моделей k -из- n .

Приводятся алгоритмы вычисления нестационарных вероятностей состояний системы, её функции надёжности, а также стационарное распределение вероятностей состояний системы в терминах преобразования Лапласа (ПЛ) плотности распределения (п. р.) времени восстановления компонентов.

Рассматривается модель восстанавливаемой системы горячего резервирования k -из- n ($k < n$) с показательным распределением в.б.р. и произвольным распределением времени восстановления как промежуточных (частичных), так и полных отказов компонентов и системы. Отказ системы происходит из-за отказа k компонентов, после чего она восстанавливается. Пусть для ремонта имеется одно устройство. Предполагается, что порядок, в котором происходит ремонт отказавших компонентов, отвечает модели FCFS (first come first service), т.е. первый отказавший компонент восстанавливается первым.

Для изучения стационарных и нестационарных характеристик надёжности системы необходимо определить её поведение после отказа как отдельных её компонентов, так и всей системы в целом, что определено практической постановкой задачи. В настоящей диссертации будут рассматриваться следующие сценарии.

- 1) Любой i -ый компонент системы, $i = \overline{1, n}$, может отказать, после чего он восстанавливается, при этом не отказавшие компоненты продолжают функционировать в прежнем режиме; по завершению восстановления отремонтированный компонент заново функционирует, и начинается ремонт следующего отказавшего ранее компонента (если таков есть);

2) Отказ любых k компонентов приводит к отказу системы и её восстановлению, для которого возможны как минимум два сценария:

- при *частичном восстановлении* системы восстанавливается лишь один отказавший компонент, после завершения его ремонта система функционирует в прежнем режиме, а остальные $k - 1$ отказавшие компоненты восстанавливаются поочерёдно в соответствии с определённым выше сценарием покомпонентного ремонта;
- *полное восстановление* системы подразумевает восстановление всех отказавших компонентов одновременно в течение некоторого случайного времени, по истечении которого система функционирует как новая, все её n компоненты работоспособны.

Таким образом, два сценария восстановления системы после её полного отказа определяют две независимые друг от друга модели k -из- n , рассматриваемые в данном диссертационном исследовании, для которых постановка задачи одинаковая и отличается лишь в типе восстановления всей системы.

Описанные процедуры восстановления компонентов и системы допускают множество различных предположений о распределении времени ремонта. В настоящей работе будут рассмотрены следующие:

1. Длительности покомпонентного и частичного восстановления системы имеют одинаковую ф.р. (разделы 1.3.1 и 1.5.1).
2. Ф.р. длительностей полного ремонта системы отлична от ф.р. времени покомпонентного восстановления (разделы 1.3.2 и 1.5.2).

Во всех случаях предполагается, что ф.р. длительностей ремонта как компонентов, так и всей системы произвольные, но обладающие свойствами, описанными далее в разделе 1.1. Экспоненциальное распределение времени ремонта приводит в простом процессе рождения и гибели, что также рассматривается для каждого случая в качестве подтверждения корректности полученных результатов.

Обобщая символику Кендалла-Башарина [73], обозначим рассматриваемую модель $\langle GI_{k < n} | GI | 1 \rangle$, где угловые скобки $\langle \rangle$ означают, что рассматривается замкнутая система обслуживания с ограниченным числом источников заявок [74]. Символ GI (General Independent) используется для обозначения рекуррентного потока (или обслуживания) с произвольным (абсолютно непрерывным) законом распределения для в.б.р. компонентов системы, в которой $k < n$, и времени ремонта этих компонентов для первого и второго места в обозначении соответственно. Последний символ указывает на число ремонтных единиц. В настоящей главе рассматривается модель $\langle M_{k < n} | GI | 1 \rangle$, что означает показательное распределение в.б.р. компонентов системы и произвольное распределение времени их ремонта.

1.1 Постановка задачи

Обозначим через A_i , $i = 1, 2, \dots$, в.б.р. компонентов системы, через B_i , $i = 1, 2, \dots$, длительности покомпонентного и частичного восстановления системы, а через F_i , $i = 1, 2, \dots$, длительности полного ремонта системы. Предположим, что все эти величины случайны, взаимно независимы и одинаково распределены для в.б.р. и каждого типа восстановления. При этом для описания ф.р. каждого типа случайной величины (с.в.) будем использовать соответствующую букву, опуская индекс. Таким образом, их общие ф.р. обозначим как $A(x) = \mathbb{P}\{A_i \leq x\}$, $B(x) = \mathbb{P}\{B_i \leq x\}$ и $F(x) = \mathbb{P}\{F_i \leq x\}$ соответственно. Будем считать, что ф.р. имеют соответствующие п.р. $a(x)$, $b(x)$, и $f(x)$ соответственно.

Пусть в.б.р. A имеет показательное распределение с интенсивностью α , $A \sim Exp(\alpha)$, тогда $a = \alpha^{-1}$ – среднее в.б.р. компонентов.

Предполагаем, что средние длительности ремонта существуют и конечны. Среднее время и ПЛ п.р. покомпонентного и частичного, а также полного восстановления системы соответственно обозначим как,

$$b = \int_0^{\infty} (1 - B(x))dx < \infty, \quad \tilde{b}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} b(x)dx, \quad (1.1)$$

$$f = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx < \infty, \quad \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx. \quad (1.2)$$

Более того, предположим, что мгновенный ремонт невозможен,

$$B(0) = F(0) = 0,$$

и с.в. времени ремонта компонентов и системы имеют как минимум два начальных момента.

Пространство состояний исследуемой системы обозначим через $\mathbf{E} = \{0, 1, 2, \dots, k-1, k\}$, где

- 0 означает, что все компоненты системы функционируют исправно,
- i означает, что i компонентов из n ($1 \leq i \leq k-1$) вышли из строя, один из них ремонтируется, другие отказавшие ждут восстановления, а остальные $(n-i)$ работают,
- k означает, что k компонентов вышли из строя, то есть вся система вышла из строя и ремонтируется (согласно сценарию частичного или полного восстановления системы).

Множество состояний \mathbf{E} можно разделить на два подмножества состояний системы: $\mathbf{E}_0 = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ представляет собой её рабочие состояния, а подмножество $\mathbf{E}_1 = \{k\}$ представляет собой отказ системы.

Введем случайный процесс $J = \{J(t), t \geq 0\}$, где

$$J(t) = j, \quad j \in \mathbf{E},$$

если в момент времени t система находится в состоянии j , и обозначим в.б.р. системы через $T = \{\inf t : J(t) = \mathbf{E}_1\}$. При этом предполагаем, что $J(0) = 0$.

В данной главе диссертационной работы изучено поведение модели как в нестационарном (переходном), так и стационарном режимах и получены аналитические выражения следующих характеристик процесса $J(t)$:

1. нестационарные вероятности (вероятности переходного режима)

$$\pi_j(t) = \mathbb{P}\{J(t) = j\}, \quad j \in \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

2. функция надёжности системы (вероятность безотказной работы во времени)

$$R(t) = \mathbb{P}\{T > t\} = 1 - \pi_k(t), \quad (1.4)$$

3. стационарные (предельные) вероятности

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{J(t) = j\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t), \quad j \in \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

4. коэффициент готовности

$$K_{av} = \sum_{0 \leq i \leq k-1} \pi_i = 1 - \pi_k, \quad (1.6)$$

5. среднее в.б.р. системы

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (1.7)$$

1.2 Метод введения дополнительных переменных

Система массового обслуживания, у которой распределение интервалов во входном рекуррентном потоке или (и) распределение времени обслуживания требований отличны от показательного, является немарковской. Для исследования такой системы прибегают к построению некоторого марковского процесса, по распределению которого можно судить о распределении интересующего нас немарковского процесса, найти его характеристики, а затем и характеристики исходного немарковского процесса [74; 75].

Для вычисления нестационарных (зависимых от времени) характеристик надёжности модели $\langle M_{k < n} | GI | 1 \rangle$ воспользуемся одним из методов марковизации, а именно методом введения дополнительных переменных [76], который заключается в следующем. Основной случайный процесс, являющийся вначале немарковским, путём введения в описание состояний

процесса дополнительных переменных превращается в марковский процесс, т.е. он «марковизуется». В качестве дополнительной компоненты рассматривают непрерывную величину, например, остаточную длительность ремонта. С помощью введения такой компоненты получаемый процесс становится двумерным марковским с расширенным пространством состояний. После марковизации исходного процесса допустимо применение различных методов исследования марковских процессов, в частности расчёт искомых характеристик путём решения дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса.

Для того чтобы описать поведение процесса $J(t)$ с помощью марковского процесса в случае произвольно распределенного времени восстановления компонентов, применим описанный выше подход. Для рассматриваемой модели в качестве дополнительной переменной выберем $X(t) \in \mathbb{R}_+$ – время, затраченное к моменту t на ремонт отказавшего компонента. В результате получим двумерный марковский процесс $Z(t)$,

$$Z(t) = \{J(t), X(t)\}, \quad t \geq 0,$$

где $J(t)$ – макросостояние системы в момент времени t (число компонентов в состоянии отказа) и $X(t)$ – прошедшее время ремонта отказавшего компонента. Тогда $\bar{\mathbf{E}} = \{0, (i, x) \mid i = \overline{1, k}, x \in \mathbb{R}_+\}$ – фазовое пространство состояний процесса $Z(t)$, где

- 0 означает, что ни один компонент не отказал;
- (i, x) означает, что $i, i = \overline{1, k}$, компонентов системы отказали, а прошедшее время ремонта одного из отказавших компонентов равно x ;
- $(1, 0)$ означает, что один из компонентов системы отказал и его ремонт начался; или один из двух отказавших компонентов был восстановлен (истекшее время его ремонта равно нулю), после чего сразу начинается ремонт второго отказавшего компонента;
- $(i, 0)$ означает, что один из $i, i = \overline{2, k-1}$, отказавших компонентов системы был отремонтирован, начинается ремонт другого отказавшего компонента; в случае сценария полного ремонта системы такой ситуации не возникает;
- $(k, 0)$ означает, что отказало k компонентов, после чего в случае сценария полного ремонта системы происходит восстановление всех отказавших компонентов одновременно; в случае сценария частичного ремонта системы такой ситуации не возникает.

Обозначим

- $\pi_0(t) = \mathbb{P}\{J(t) = 0\}$ – вероятность работоспособного состояния всех n компонентов в момент времени t ;
- $\pi_i(t, x)dx = \mathbb{P}\{J(t) = i, x < X(t) \leq x + dx\}$ ($i = \overline{1, k}$) – п.р. (по непрерывной компоненте) вероятностей микросостояний того, что в момент времени t имеется i неисправных компонентов, один из них ремонтируется с истёкшим временем ремонта между x и $x + dx, i = \overline{1, k}$.

Предположим, что плотности $\pi_i(t, x)dx$ существуют и они позволяют вычислить нестационарные вероятности макросостояний системы,

$$\pi_i(t) = \int_0^\infty \pi_i(t, x)dx, \quad i = \overline{1, k}.$$

Далее в разделах 1.3.1 и 1.3.2 вычисление этих вероятностей будет представлено в терминах ПЛ,

$$\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^\infty \pi_i(t, x)dxdt, \quad i = \overline{1, k}. \quad (1.8)$$

Дальнейшие вычисления будут опираться на следующие события и соответствующие вероятности.

1. Вероятность того, что за время Δ один из компонентов системы сломается, при условии, что он отработал x единиц времени, равна

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{x \leq A < x + \Delta \mid A \geq x\} &= \frac{\mathbb{P}\{x \leq A < x + \Delta\}}{\mathbb{P}\{A \geq x\}} = \\ &= \frac{A(x + \Delta) - A(x)}{1 - \mathbb{P}\{x < A\}} = \frac{a(x)\Delta + o(\Delta)}{1 - A(x)} = \frac{\alpha e^{-\alpha x} \Delta + o(\Delta)}{e^{-\alpha x}} = \\ &= \alpha \Delta + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.9)$$

2. Вероятность того, что начиная с рассматриваемого момента времени за время Δ один компонент (и вся система в случае сценария частичного восстановления) будет отремонтирован, при условии, что он находился в ремонте x единиц времени,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{x \leq B < x + \Delta \mid B \geq x\} &= \frac{\mathbb{P}\{x \leq B < x + \Delta\}}{\mathbb{P}\{B \geq x\}} = \\ &= \frac{B(x + \Delta) - B(x)}{1 - \mathbb{P}\{x < B\}} = \frac{b(x)\Delta + o(\Delta)}{1 - B(x)} = \\ &= \beta(x)\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.10)$$

3. Вероятность того, что начиная с рассматриваемого момента времени за время Δ система (после полного отказа в случае сценария полного восстановления) будет отремонтирована, при условии, что один из отказавших компонентов находился в ремонте x единиц времени,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{x \leq F < x + \Delta \mid F \geq x\} &= \frac{\mathbb{P}\{x \leq F < x + \Delta\}}{\mathbb{P}\{F \geq x\}} = \\ &= \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{1 - \mathbb{P}\{x < F\}} = \frac{f(x)\Delta + o(\Delta)}{1 - F(x)} = \\ &= \phi(x)\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Замечание 1.1. Поскольку процесс $Z(t)$ описывает поведение модели k -из- n , то вычисленные для процесса $Z(t)$ характеристики будут тождественны характеристикам модели k -из- n .

В дальнейшем эти характеристики можно использовать в прикладных задачах, а также для анализа чувствительности модели к её входным параметрам. В главах 2 и 3 характеристики моделей k -из- n и их частных случаев будут рассмотрены в контексте анализа надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы.

1.3 Нестационарные вероятности

Рассмотрим нестационарные вероятности состояний моделей k -из- n согласно определению из формулы (1.3). Для дальнейшего исследования перейдём непосредственно к типу восстановления системы после отказа.

1.3.1 Сценарий частичного ремонта системы

Обозначим $\lambda_i = (n - i)\alpha$ ($i = \overline{0, k - 1}$) – интенсивность отказа компонента системы, находящейся в состоянии i , а $\beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}$ – интенсивность восстановления отказавшего компонента с учётом времени x , затраченного на его ремонт. Граф интенсивностей переходов исследуемого процесса $Z(t)$ на множестве состояний \bar{E} для сценария частичного восстановления после отказа всей системы представлен на рис. 1.1.

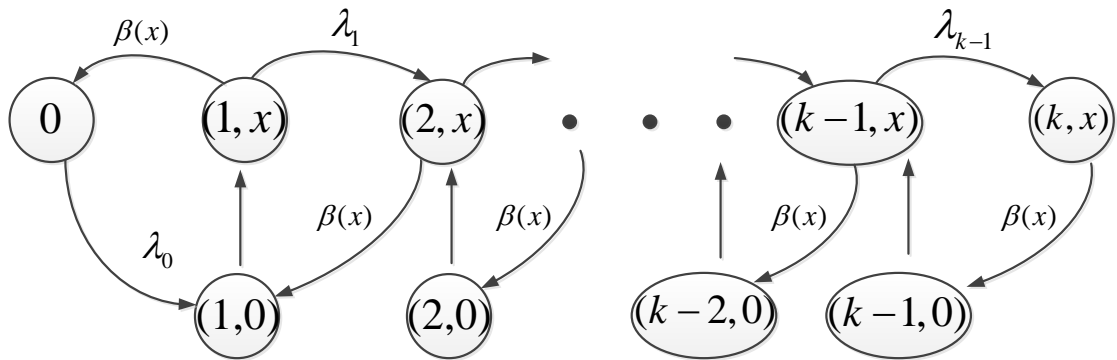


Рисунок 1.1 — Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n для сценария частичного ремонта

По представленному графу переходов, используя описание вероятностей (1.9), (1.10), можно составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных, которая позволит вычислить нестационарные вероятности состояний процесса.

Теорема 1.1. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний модели k -из- n в случае частичного ремонта, где k – любое

значение в интервале $\overline{2, n}$, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) &= -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_k(t,x) &= -\beta(x)\pi_k(t,x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t,x), \end{aligned} \tag{1.12}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad \forall x \geq 0, \tag{1.13}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_1(t, 0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx, \\ \pi_i(t, 0) &= \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \pi_k(t, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Доказательство. С помощью графа переходов процесса $Z(t)$ построим систему конечно-разностных уравнений методом сравнения соответствующих вероятностей состояний процесса в близкие моменты времени t и $t + \Delta$. Определим соответствующие вероятности на множестве \mathbf{E} . Положим, что все возможные, но не представленные ниже, вероятности состояний по времени имеют порядок $o(\Delta)$.

1. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в нулевом состоянии, $i = 0$, есть вероятность того, что в момент времени t он находился в этом же состоянии, и между t и $t + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$(1 - \lambda_0\Delta)\pi_0(t) + o(\Delta),$$

или вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $(1, x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние $i = 0$,

$$\int_0^t \beta(x)dx \pi_1(t,x)\Delta + o(\Delta),$$

тогда

$$\begin{aligned}\pi_0(t + \Delta) &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = 0\} = \\ &= (1 - \lambda_0\Delta)\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)dx \pi_1(t, x)\Delta + o(\Delta).\end{aligned}\quad (1.15)$$

2. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $(1, x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным $x + \Delta$, есть вероятность того, что в момент времени t процесс также находился в состоянии $(1, x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между t и $t + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$\begin{aligned}\pi_1(t + \Delta, x + \Delta)dx &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = 1, x + \Delta < X(t + \Delta) < x + \Delta + dx\} = \\ &= (1 - \lambda_1\Delta)(1 - \beta(x)\Delta)\pi_1(t, x) + o(\Delta).\end{aligned}\quad (1.16)$$

3. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии (i, x) , $i = \overline{2, k-1}$, со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным $x + \Delta$, есть вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии i со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между t и $t + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$(1 - \lambda_i\Delta)(1 - \beta(x)\Delta)\pi_i(t, x) + o(\Delta),$$

или вероятность того, что к моменту времени t процесс находился в состоянии $(i-1, x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между t и $t + \Delta$ происходит переход в состояние (i, x) ,

$$\lambda_{i-1}\Delta\pi_{i-1}(t, x) + o(\Delta),$$

тогда

$$\begin{aligned}\pi_i(t + \Delta, x + \Delta)dx &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = i, x + \Delta < X(t + \Delta) < x + \Delta + dx\} = \\ &= (1 - \lambda_i\Delta)(1 - \beta(x)\Delta)\pi_i(t, x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t, x)\Delta + o(\Delta),\end{aligned}\quad (1.17)$$

для всех $i = \overline{2, k-1}$.

4. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии (k, x) со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным $x + \Delta$, есть вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $(k-1, x)$ со временем, затраченным в момент t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между

t и $t + \Delta$ происходит переход в состояние (k, x) ,

$$\lambda_{k-1}\Delta\pi_{k-1}(t, x) + o(\Delta),$$

или вероятность того, что к моменту времени t процесс находился в состоянии (k, x) со временем, затраченным в момент t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и за время между x и $x + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$(1 - \beta(x)\Delta)\pi_k(t, x) + o(\Delta),$$

тогда

$$\begin{aligned} \pi_k(t + \Delta, x + \Delta)dx &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = k, x + \Delta < X(t + \Delta) < x + \Delta + dx\} = \\ &= \lambda_{k-1}\Delta\pi_{k-1}(t, x) + (1 - \beta(x)\Delta)\pi_k(t, x) + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Преобразовав выписанные уравнения (1.15), (1.16), (1.17), (1.18), получаем следующую систему,

$$\begin{aligned} \frac{\pi_0(t + \Delta) - \pi_0(t)}{\Delta} &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t, x)dx + o(\Delta), \\ \frac{\pi_1(t + \Delta, x + \Delta) - \pi_1(t, x + \Delta)}{\Delta} + \frac{\pi_1(t, x + \Delta) - \pi_1(t, x)}{\Delta} &= (\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t, x) + o(\Delta), \\ \frac{\pi_i(t + \Delta, x + \Delta) - \pi_i(t, x + \Delta)}{\Delta} + \frac{\pi_i(t, x + \Delta) - \pi_i(t, x)}{\Delta} &= \\ &= -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t, x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t, x) + o(\Delta), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \frac{\pi_k(t + \Delta, x + \Delta) - \pi_k(t, x + \Delta)}{\Delta} + \frac{\pi_k(t, x + \Delta) - \pi_k(t, x)}{\Delta} &= \\ &= -\beta(x)\pi_k(t, x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t, x)dx + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ в системе разностных уравнений (1.19), получим систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (1.12), которые имеют место в области $0 < x < t$. Однако по непрерывности они также справедливы на интервале $0 \leq x \leq t$.

Также рассмотрим начальные и граничные условия. Начальные условия (1.13) вытекают из предположения, что в начале работы системы все её компоненты работоспособны.

Первые два граничных условия из (1.14) вытекают из аналогичных рассуждений путём сравнения вероятностей состояний процесса между t и $t + \Delta$, когда дополнительная переменная принимает значения, близкие к нулю.

1. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $(1, 0)$, а время, затраченное к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равно Δ , есть вероятность того, что к моменту времени t процесс находился в состоянии $i = 0$, и за время Δ

происходит переход в состояние $(1,0)$,

$$\lambda_0 \Delta \pi_0(t) + o(\Delta),$$

или вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $(2,x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние $(1,x)$,

$$\int_0^t \beta(x) dx \pi_2(t,x) \Delta + o(\Delta),$$

тогда

$$\pi_1(t + \Delta, \Delta) dx = \lambda_0 \pi_0(t) \Delta + \int_0^t \beta(x) dx \pi_2(t,x) \Delta + o(\Delta).$$

2. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $(i,0)$, $i = \overline{2, k-1}$, а время, затраченное к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равно Δ , есть вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $(i+1,x)$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние (i,x) .

$$\pi_i(t + \Delta, \Delta) dx = \int_0^t \beta(x) dx \pi_{i+1}(t,x) \Delta, \quad i = \overline{2, k-1}.$$

Последнее граничное условие следует из того, что для процесса $Z(t)$ переход в состояние (k,x) с истёкшим временем восстановления, равным нулю, никогда не возникает (см. рис. 1.1). Ч.т.д. ■

Для аналитического решения системы уравнений (1.12) с начальными (1.13) и граничными условиями (1.14) используем метод характеристик [61; 77].

Метод характеристик заключается в приведении уравнения в частных производных к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого требуется найти кривые (именуемые характеристиками), вдоль которых уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. Как только получены обыкновенные дифференциальные уравнения, их можно решить вдоль характеристик, а найденное решение распространить на всю область существования решения исходных уравнений в частных производных с помощью граничных условий [78; 79].

В общем случае решение дифференциального уравнения в частных производных

$$k_1 \frac{\partial \pi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \pi}{\partial t} = f(x,t)$$

состоит в том, чтобы путём замены

$$\frac{dx}{du} = k_1, \quad \frac{dt}{du} = k_2 \tag{1.20}$$

превратить дифференциальное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение,

$$\frac{d\pi}{du} = \frac{\partial\pi}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial\pi}{\partial t} \frac{dt}{du} = f(x,t),$$

вдоль кривой, определяемой уравнениями (1.20) и называемой характеристикой исходного дифференциального уравнения в частных производных.

В рассматриваемой задаче, коэффициенты при частных производных уравнений (1.12) равны $k_1 = k_2 = 1$. С точки зрения рассматриваемой задачи это объясняется тем, что в переходном режиме наблюдаемое время t и накопленное время ремонта x растут одновременно, отсюда $dt = dx$. Тогда для построения общего решения этой системы уравнений метод характеристик будет заключаться в построении семейства кривых по параметру u в области определения $0 \leq x \leq t < \infty$ системы (1.12), удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt}{du} = 1, \quad \frac{dx}{du} = 1. \quad (1.21)$$

В рассматриваемом случае в качестве параметра u удобно выбрать переменную x . Затем, подставляя коэффициенты перед каждым уравнением в частных производных системы (1.12) для их представления (1.21) по параметру x , можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих функции $\pi_i(x)$, $i = \overline{1, k-1}$, по характеристикам,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \pi_1(x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(x), \\ \frac{d}{dx} \pi_i(x) &= -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \frac{d}{dx} \pi_k(x) &= -\beta(x)\pi_k(x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(x). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Начальные (1.13) и граничные условия (1.14) следует использовать для распространения решения данных уравнений с характеристик на всю область определения системы уравнений в частных производных.

На основе этой идеи в работе [61] предложен следующий алгоритм решения системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Алгоритм 1.1. *Начало.* Определить целые числа n, k .

Шаг 1. Чтобы решить второе из уравнений (1.12), перепишем уравнения для характеристик (1.21) и первое из уравнений (1.22) в симметричной форме как

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = -\frac{d\pi_1}{(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1}. \quad (1.23)$$

Первые интегралы уравнения (1.23) принимают вид

$$\begin{aligned} dt = dx &\Rightarrow t - x = C, \\ d\pi_1 = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1 dx &\Rightarrow \pi_1(x) = D_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)). \end{aligned}$$

Общее решение уравнения в частных производных можно представить в виде гладкой функции его первых интегралов [79]. Таким образом, согласно этому правилу, общее решение уравнения (1.23) вдоль характеристики $C = t - x$ имеет вид

$$D_1 = h_1(C) \quad \Rightarrow \quad \pi_1(t, x) = h_1(C)e^{-\lambda_1 x}(1 - B(x)), \quad (1.24)$$

где $h_1(C)$ – произвольная гладкая функция, которая должна быть найдена из граничных условий.

Шаг 2. Уравнения для характеристик (1.21) и для других функций $\pi_j(x)$ (1.22), $i = \overline{2, k-1}$, в симметричной форме принимают вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = -\frac{d\pi_i}{(\lambda_i + \beta(x))\pi_i + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}}, \quad i = \overline{2, k-1}. \quad (1.25)$$

Шаг 2.1. ($i = 2$) Один из первых интегралов этих уравнений при $i = 2$ тот же, что и раньше,

$$dt = dx \quad \Rightarrow \quad t - x = C.$$

Другой первый интеграл уравнений (1.25) при $i = 2$ вдоль характеристики $t - x = C$ с учётом выражения для $\pi_1(t, x)$ из (1.24), следует найти из уравнения ниже,

$$\frac{d\pi_2}{dx} = -(\lambda_2 + \beta(x))\pi_2 + \lambda_1 h_1(C)e^{-\lambda_1 x}(1 - B(x)). \quad (1.26)$$

Для его решения воспользуемся методом вариации постоянной. Общим решением однородной части этого уравнения

$$\frac{d\tilde{\pi}_2}{dx} = -(\lambda_2 + \beta(x))\tilde{\pi}_2$$

является следующее выражение,

$$\tilde{\pi}_2(x) = D_2 e^{-\lambda_2 x}(1 - B(x)).$$

Заменив константу D_2 на функцию $D_2(x)$, метод вариации постоянной неизвестной функции $D_2(x)$ даёт следующее уравнение,

$$D_2'(x) = \lambda_1 h_1(C)e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x},$$

решение которого представимо как

$$D_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} h_1(C)e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (1.26) имеет вид

$$\begin{aligned}\pi_2(x) &= \left(D_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} h_1(C) e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x} \right) e^{-\lambda_2 x} (1 - B(x)) = \\ &= \left(D_2 e^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} h_1(C) e^{-\lambda_1 x} \right) (1 - B(x)).\end{aligned}$$

Полагая $D_2(x) = h_2(C)$, где $h_2(C)$ – произвольная гладкая функция, можно получить общее решение вдоль характеристики соответствующего уравнения в частных производных в виде

$$\pi_2(t, x) = \left(h_2(t - x) e^{-\lambda_2 x} - h_1(t - x) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} \right) (1 - B(x)).$$

Шаг 2.2. ($i > 2$) Тот же подход следует использовать для других уравнений. Один из первых интегралов для любого i уравнений (1.25) такой же, как и раньше,

$$dt = dx \quad \Rightarrow \quad t - x = C.$$

Построение общего решения уравнения

$$\frac{d\pi_i}{dx} = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(x), \quad i = \overline{3, k-1},$$

даёт следующий результат

$$\pi_j(t, x) = \left(h_j(t - x) e^{-\lambda_j x} + H_{j-1}(t - x; x) \right) (1 - B(x)),$$

где $h_1(t - x), \dots, h_j(t - x)$ – произвольные гладкие функции и

$$H_j(t - x; x) = \sum_{i=1}^j (-1)^i \frac{\lambda_{j-1} \cdots \lambda_{j-i}}{(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_j)} h_i(t - x) e^{-\lambda_i x}. \quad (1.27)$$

Шаг 3. Уравнения для характеристик (1.21) и функции $\pi_k(x)$ (1.22) в симметричной форме принимают вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = -\frac{d\pi_k}{\beta(x)\pi_k + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}}.$$

Для этого уравнения первый интеграл аналогичен предыдущим случаям,

$$dt = dx \quad \Rightarrow \quad t - x = C.$$

Шаг 3.1. ($k = 2$)

Далее общее решение последнего уравнения системы (1.12) при $k = 2$ с учётом выражения для $\pi_1(t, x)$ из (1.24) принимает вид

$$\frac{d\pi_2}{dx} = -\beta(x)\pi_2 + \lambda_1 h_1(C) e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)). \quad (1.28)$$

Общим решением однородной части уравнения с помощью метода вариации постоянной является выражение

$$\tilde{\pi}_2(x) = D_2(1 - B(x)).$$

Далее аналогично Шагу 2.1. находим общее решение неоднородного уравнения (1.28)

$$\pi_2(t, x) = [h_2(t - x) - h_1(t - x)e^{-\lambda_1 x}] (1 - B(x)).$$

Шаг 3.2. ($k > 2$) Последнее уравнение исходной системы для $k > 2$ вычисляется аналогично Шагу 2.2. В результате получаем следующее выражение для $\pi_k(t, x)$,

$$\pi_k(t, x) = \left(h_k(t - x) - h_{k-1}(t - x)e^{-\lambda_{k-1}x} - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}} H_{k-1}(t - x, x) \right) (1 - B(x)),$$

где $H_{k-1}(t - x, x)$ определяется из (1.27).

Шаг 4. Подставив решение (1.24) для вероятности $\pi_1(t, x)$ и первое начальное условие из (1.13), а также переходя к ПЛ соответствующих функций по формуле (1.8), принимая во внимание ПЛ п.р. времени ремонта по определению (1.1), получаем

$$\begin{aligned} s\tilde{\pi}_0(s) - 1 &= -\lambda_0\tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s + \lambda_1), \\ \tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1 + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_0}. \end{aligned}$$

Шаг 5. С помощью граничных условий (1.14) вычисляем ПЛ $\tilde{h}_i(s)$ всех функций $h_i(t)$, $i = \overline{1, k}$.

Шаг 6. Подстановка полученного решения в выражения для функций $\tilde{h}_i(s)$, а затем переход к ПЛ функций $\pi_j(t)$, $j = \overline{1, k}$, завершает решение системы.

Конец.

С помощью приведённого Алгоритма 1.1 легко вычислить ПЛ $\tilde{\pi}_j(s)$ вероятностей $\pi_j(t)$, $j = \overline{0, k}$. Отметим следующее.

Замечание 1.2. Вычисление обратного ПЛ $\tilde{\pi}_j(s)$ для произвольного распределения времени покомпонентного ремонта $B(t)$ является отдельной задачей и остается за рамками данной диссертационной работы, поэтому будет рассмотрено в Главе 2 только численно.

Представленный алгоритм верен для любых $k = \overline{2, n}$. Для $k = 1$ (т.е. модель системы последовательного соединения 1-из- n) имеет место следующее следствие.

Следствие 1.1. Нестационарные вероятности состояний модели 1-из- n в терминах ПЛ с произвольным распределением времени ремонта её компонентов принимают следующий вид,

$$\tilde{\pi}_0(s) = \left(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)) \right)^{-1}, \quad \tilde{\pi}_1(s) = \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s))}{s(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)))}.$$

Доказательство. Рассмотрим модель 1-из- n . Тогда согласно Теореме 1.1 система дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных принимает вид,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -\beta(x)\pi_1(t,x), \end{aligned} \quad (1.29)$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_1(0; x) = 0 \quad \forall x \geq 0, \quad (1.30)$$

и граничным условиями

$$\pi_1(t, 0) = \lambda_0\pi_0(t). \quad (1.31)$$

Функцию $\pi_1(t, x)$ вычисляем из второго уравнения системы (1.29) как

$$\pi_1(t, x) = h_1(t - x)(1 - B(x)),$$

тогда подставив это выражение в граничное условие (1.31) получаем

$$h_1(t) = \lambda_0\pi_0(t). \quad (1.32)$$

Переход к ПЛ даёт следующее выражение,

$$\tilde{\pi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \pi_1(t; x) dx dt = \frac{1 - \tilde{b}(s)}{s} \lambda_0 \tilde{\pi}_0(s). \quad (1.33)$$

Подставим начальное условие (1.30) и полученное выражение (1.32) в первое уравнение исходной системы и перейдём к ПЛ,

$$s\tilde{\pi}_0(s) - 1 = -\lambda_0\tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s).$$

Тогда

$$\tilde{\pi}_0(s) = \left(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s))\right)^{-1},$$

что при подстановке в (1.33) даёт следующее выражение,

$$\tilde{\pi}_1(s) = \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s))}{s(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)))}.$$

При этом, если $B(t) \sim \text{Exp}(b^{-1})$ и $\tilde{b}(s) = \frac{b^{-1}}{s + b^{-1}}$, то нестационарные вероятности состояний модели 1-из- n принимают следующий вид,

$$\tilde{\pi}_0(s) = \frac{1 + bs}{s(1 + b(s + \lambda_0))}, \quad \tilde{\pi}_1(s) = \frac{b\lambda_0}{s(1 + b(s + \lambda_0))}.$$

И этот результат совпадает с тем, который можно получить при исследовании простого процесса рождения и гибели, описываемого следующей системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + b^{-1}\pi_1(t), \\ \frac{d}{dt}\pi_1(t) &= -b^{-1}\pi_1(t) + \lambda_0\pi_0(t). \end{aligned}$$

■

Возможности Алгоритма 1.1 демонстрируются в разделе 2.2.1 главы 2 путём вычисления нестационарных вероятностей состояний процесса для частного случая модели восстанавливаемой системы 2-из-6, которая является математической моделью БПЛА привязной высотной платформы.

1.3.2 Сценарий полного ремонта системы

Аналогично случаю частичного ремонта рассмотрим полное восстановление системы после её отказа с учётом выписанных вероятностей (1.9), (1.10), (1.11). Граф переходов процесса $Z(t)$ в этом случае представлен на рис. 1.2. Здесь $\phi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$ – интенсивность восстановления системы с учётом времени x , затраченного на её ремонт в случае полного восстановления.

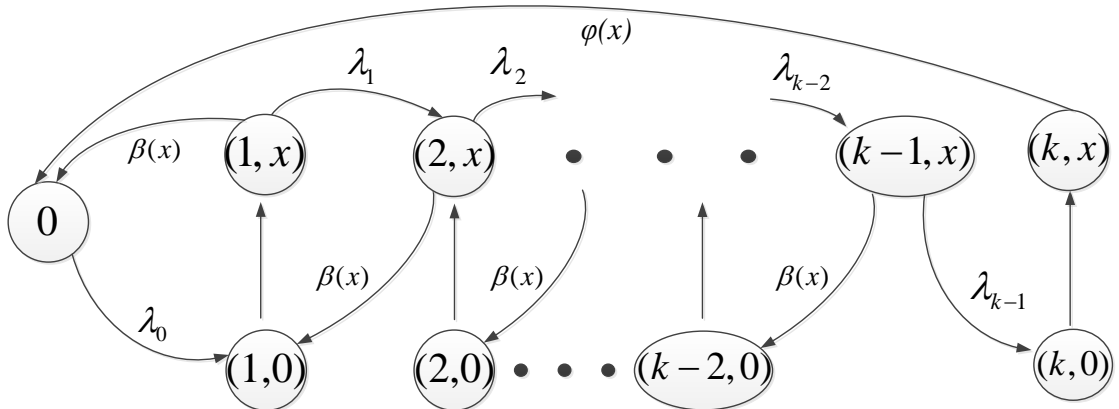


Рисунок 1.2 — Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n для сценария полного ремонта

Теорема 1.2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний модели k -из- n в случае полного ремонта, где k – любое значение в интервале $\overline{3, n}$, принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx + \int_0^t \phi(x)\pi_k(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) &= -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_k(t,x) &= -\phi(x)\pi_k(t,x), \end{aligned} \tag{1.34}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad \forall x \geq 0, \tag{1.35}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_1(t, 0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx, \\ \pi_i(t, 0) &= \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i = \overline{2, k-2}, \\ \pi_{k-1}(t, 0) &= 0, \\ \pi_k(t, 0) &= \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1. Представим описание тех вероятностей состояний процесса $Z(t)$, которые отличаются от описания из случая частичного ремонта, а именно вероятности начального и конечного состояний. Итак, с помощью формул полной вероятности выпишем систему конечно-разностных уравнений и определим следующие вероятности.

1. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $i = 0$, есть вероятность того, что в момент времени t он находился в этом же состоянии, и между t и $t + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$(1 - \lambda_0\Delta)\pi_0(t) + o(\Delta),$$

или вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $i = 1$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние $i = 0$,

$$\int_0^t \beta(x)dx \pi_1(t,x)\Delta + o(\Delta),$$

или вероятность того, что в момент времени t процесс находился в состоянии $i = k$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние $i = 0$,

$$\int_0^t \phi(x) dx \pi_k(t, x) \Delta + o(\Delta),$$

тогда

$$\begin{aligned} \pi_0(t + \Delta) &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = 0\} = \\ &= (1 - \lambda_0 \Delta) \pi_0(t) + \int_0^t \beta(x) dx \pi_1(t, x) \Delta + \int_0^t \phi(x) dx \pi_k(t, x) \Delta + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.37)$$

2. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $i = k$, есть вероятность того, что в момент времени t он находился в этом же состоянии, и между t и $t + \Delta$ не происходит никаких изменений,

$$\begin{aligned} \pi_k(t + \Delta, x + \Delta) dx &= \mathbb{P}\{J(t + \Delta) = k, x + \Delta < x(t + \Delta) < x + \Delta + dx\} = \\ &= (1 - \phi(x) \Delta) \pi_k(t, x) + o(\Delta). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Преобразовав выписанные уравнения (1.37), (1.38), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\pi_0(t + \Delta) - \pi_0(t)}{\Delta} &= -\lambda_0 \pi_0(t) + \int_0^t \beta(x) \pi_1(t, x) dx + \int_0^t \phi(x) \pi_k(t, x) dx + o(\Delta), \\ \frac{\pi_k(t + \Delta, x + \Delta) - \pi_k(t, x + \Delta)}{\Delta} + \frac{\pi_k(t, x + \Delta) - \pi_k(t, x)}{\Delta} &= -\phi(x) \pi_k(t, x) + o(\Delta). \end{aligned}$$

Объединяя полученные результаты и переходя к пределу $\Delta \rightarrow 0$, получим систему (1.34).

Граничное условие для вероятности $\pi_k(t, 0)$ следует из утверждения ниже. Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии k , а время, затраченное к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равное Δ , есть вероятность того, что к моменту времени t процесс находился в состоянии $k - 1$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между x и $x + \Delta$ происходит переход в состояние k ,

$$\pi_k(t + \Delta, \Delta) dx = \lambda_{k-1} \int_0^\infty \pi_{k-1}(t, x) \Delta dx + o(\Delta).$$

Дополнительное граничное условие для вероятности $\pi_{k-1}(t, 0)$ из (1.36) следует из того, что процесс $Z(t)$ никогда не пребывает в состоянии $k - 1$ с истёкшим временем восстановления, равным нулю (см. рис. 1.2). Ч.т.д. ■

Для решения системы (1.34) также воспользуемся методом характеристик, описанным выше. Более того, так как системы дифференциальных уравнений Колмогорова для двух сценариев ремонта системы после отказа аналогичны, алгоритмы вычисления нестационарных вероятностей отличаются лишь в некоторых пунктах. Таким образом, ниже представлен

сокращённый алгоритм вычисления нестационарных вероятностей состояний процесса $Z(t)$ для сценария полного ремонта.

Алгоритм 1.2. *Начало.* Определить целые числа n, k .

Шаг 1. Повторить Шаг 1 – Шаг 2.2 из Алгоритма 1.1.

Шаг 2. Для последнего уравнения системы (1.34) один из первых интегралов такой же, как раньше,

$$dt = dx \quad \Rightarrow \quad t - x = C.$$

Построение общего решения для уравнения

$$\frac{d\pi_k(x)}{dx} = -\phi(x)\pi_k(x)$$

даёт следующий результат,

$$\pi_k(t, x) = h_k(t - x)(1 - F(x)),$$

где $h_k(t - x)$ – произвольная гладкая функция.

Шаг 3. Аналогично Шагу 4 из Алгоритма 1.1 переход к ПЛ вероятности $\pi_0(t)$ и подстановка соответствующих выражений, в том числе начальное условие (1.35) и определение (1.2) для ПЛ п. р. времени полного ремонта, даёт следующий результат,

$$\begin{aligned} s\tilde{\pi}_0(s) - 1 &= -\lambda_0\tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s + \lambda_1) + \tilde{h}_k(s)\tilde{f}(s), \\ \tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1 + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s + \lambda_1) + \tilde{h}_k(s)\tilde{f}(s)}{s + \lambda_0}. \end{aligned}$$

Шаг 4. Для завершения решения необходимо вычислить функции $h_i(t)$ с помощью граничных условий (1.36) в терминах ПЛ.

Шаг 4.1. С помощью первых трёх граничных условий из (1.36) и представления (1.27) выразить ПЛ $\tilde{h}_j(s)$ функции $h_j(t)$ ($j = \overline{1, k-1}$).

Шаг 4.2. Из последнего граничного условия следует

$$\pi_k(t; 0) = h_k(t) = \lambda_{k-1} \int_0^t \pi_{k-1}(t; x) dx.$$

Замена в выражении (1.27) даёт следующий результат,

$$\tilde{h}_k(s) = \lambda_{k-1} \sum_{1 \leq i \leq k-1} \left[\tilde{h}_i(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_i)}{s + \lambda_i} \right].$$

Шаг 5. Подстановка полученных решений в выражения для функций $\tilde{h}_j(s)$ и затем в ПЛ функций $\pi_j(t)$ завершает решение системы.

Конец.

Заметим также следующее.

Замечание 1.3. Если в системе с полным восстановлением $k = 1$, то модель совпадает с системой с частичным ремонтом, характеристики которой рассмотрены в Следствии 1.1.

Теорема 1.2 и Алгоритм 1.2 справедливы только в случае $k > 2$, поэтому рассмотрим следующее следствие.

Следствие 1.2. Нестационарные вероятности состояний модели 2-из- n в терминах ПЛ в случае полного ремонта и произвольных распределениях времени ремонта компонентов и всей системы принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{s + \lambda_1}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))}, \\ \tilde{\pi}_1(s) &= \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\lambda_0\lambda_1(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(1 - \tilde{f}(s))}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))}.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Доказательство. Рассмотрим модель 2-из- n в случае полного ремонта (рис. 1.3). Граф переходов для этого частного случая отличается от общего, поэтому система дифференци-

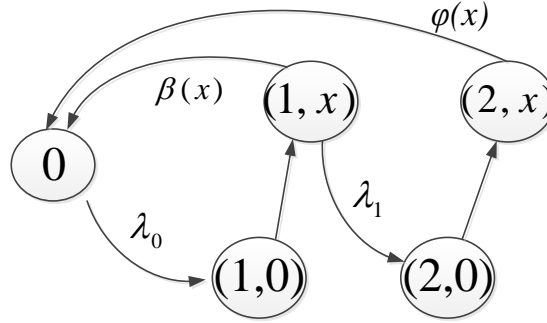


Рисунок 1.3 — Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы 2-из- n для сценария полного ремонта

альных уравнений Колмогорова в частных производных процесса $Z(t)$ выписывается следующим образом,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx + \int_0^t \phi(x)\pi_2(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_2(t,x) &= -\phi(x)\pi_2(t,x),\end{aligned}\tag{1.40}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_1(0; x) = 0, \quad \forall x \geq 0,\tag{1.41}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}\pi_1(t, 0) &= \lambda_0 \pi_0(t), \\ \pi_2(t, 0) &= \lambda_1 \pi_1(t).\end{aligned}\tag{1.42}$$

Решение второго и третьего уравнений системы (1.40) аналогично полученным ранее,

$$\begin{aligned}\pi_1(t, x) &= h_1(t - x)e^{-\lambda_1 x}(1 - B(x)), \\ \pi_2(t, x) &= h_2(t - x)(1 - F(x)).\end{aligned}$$

Граничные условия (1.42) позволяют сразу вычислить функции $h_i(t - x)$, $i = 1, 2$, следующим образом,

$$\begin{aligned}\pi_1(t; 0) &\equiv h_1(t) = \lambda_0 \pi_0(t), \\ \pi_2(t; 0) &\equiv h_2(t) = \lambda_1 \int_0^t h_1(t - x)e^{-\lambda_1 x}(1 - B(x)),\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}\tilde{h}_1(s) &= \lambda_0 \tilde{\pi}_0(s), \\ \tilde{h}_2(s) &= \lambda_1 \tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1} = \lambda_0 \lambda_1 \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1} \tilde{\pi}_0(s).\end{aligned}$$

Первое уравнение исходной системы, начальное условие (1.41), а также подстановка функций, вычисленных выше, дают следующий результат в терминах ПЛ,

$$s\tilde{\pi}_0(s) - 1 = -\lambda_0 \tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_1(s)\tilde{b}(s + \lambda_1) + \tilde{h}_2(s)\tilde{f}(s),$$

откуда получаем $\tilde{\pi}_0(s)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_0(s) &= \left[s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)) \left(1 - \frac{\lambda_1 \tilde{f}(s)}{s + \lambda_1} \right) \right]^{-1} = \\ &= \left[s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)) \frac{s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s))}{s + \lambda_1} \right]^{-1} = \\ &= \frac{s + \lambda_1}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))}.\end{aligned}$$

Далее вычислим оставшиеся вероятности $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ в терминах ПЛ по определению,

$$\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} \pi_i(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \pi_i(t; x) dx dt \quad (i = 1, 2).$$

Подставив полученные результаты в терминах ПЛ, выражения принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1(s) &= \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{s + \lambda_1} \tilde{\pi}_0(s) = \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \lambda_0 \lambda_1 \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s} \cdot \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1} \tilde{\pi}_0(s) = \frac{1}{s} \frac{\lambda_0 \lambda_1 (1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(1 - \tilde{f}(s))}{s(s + \lambda_1) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))(s + \lambda_1(1 - \tilde{f}(s)))},\end{aligned}$$

что завершает доказательство. \blacksquare

Таким образом, получены нестационарные вероятности состояний процесса в терминах ПЛ, выраженные через ПЛ п. р. времени восстановления компонентов и системы, для сценария полного ремонта системы. В главе 2 для исследования надёжности гексакоптера ($n = 6$) на базе привязной беспилотной телекоммуникационной платформы будут рассмотрены численные эксперименты и проведён анализ чувствительности характеристик модели к виду распределений времени ремонта компонентов и системы, а также соответствующих значений коэффициента вариации.

1.4 Функция надёжности и среднее в.б.р. системы

Для вычисления функции надёжности рассматриваемой модели k -из- n необходимо исследовать процесс $Z(t)$ до отказа системы. Для этого рассмотрим процесс $Z(t)$ с поглощающим состоянием k , граф переходов которого приведён на рис. 1.4. Соответствующее пространство состояний обозначим как $\bar{\mathbf{E}}' = \{0, (i, x), k \mid i = \overline{1, k-1}\}$.

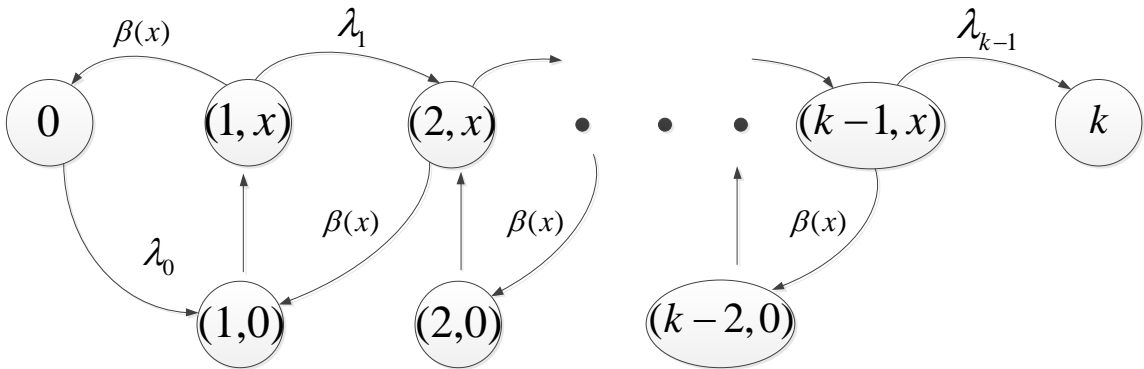


Рисунок 1.4 — Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n с поглощением

Описание пространства состояний $\bar{\mathbf{E}}'$ аналогично описанию $\bar{\mathbf{E}}$ за исключением граничного состояния. Здесь состояние k означает отказ k компонентов, что приводит к отказу всей системы. При этом вероятность того, что процесс $Z(t)$ с поглощением находится в состоянии k совпадает с распределением времени до первого отказа системы. Обозначим это

распределение через

$$W(t) = \mathbb{P}\{T \leq t\} = \mathbb{P}\{Z(t) = k\}.$$

При этом будем полагать, что существуют п.р. длительности до первого отказа системы $w(t)$ и соответствующее ПЛ $\tilde{w}(s) = \int_0^\infty e^{-st}w(t)dt$.

Опираясь на граф интенсивностей переходов, выводится и доказывается следующая Теорема.

Теорема 1.3. Система дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных для процесса $Z(t)$ с поглощением принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) &= -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \frac{d}{dt}\pi_k(t) &= \lambda_{k-1} \int_0^t \pi_{k-1}(t,x)dx, \end{aligned} \tag{1.43}$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad \forall x \geq 0, \tag{1.44}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_1(t,0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx, \\ \pi_i(t,0) &= \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i = \overline{2, k-2}, \\ \pi_{k-1}(t,0) &= \pi_k(t,0) = 0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Доказательство. Поскольку для вычисления функции надёжности модели k -из- n рассматривается всё тот же процесс $Z(t)$, но с поглощающим состоянием k , то вероятность пребывания в этом состоянии вычисляется иначе.

Вероятность того, что в момент времени $t + \Delta$ процесс находится в состоянии $i = k$, есть вероятность того, что в момент времени t он находился в состоянии $i = k - 1$ со временем, затраченным к моменту t на ремонт отказавшего компонента, равным x , и между t и $t + \Delta$ происходит переход в состояние $i = k$,

$$\pi_k(t + \Delta) = \int_0^t \lambda_{k-1}\Delta \pi_{k-1}(t,x)dx + o(\Delta).$$

Остальные вероятности состояний процесса аналогичны тем, что были рассмотрены ранее. Поэтому продолжение доказательства данной теоремы приводится аналогично доказательству теорем 1.1 и 1.2. Ч.т.д. ■

Функция надёжности исследуемого процесса по определению (1.4) связана с вероятностью поглощающего состояния выражением

$$R(t) = \mathbb{P}\{T > t\} = 1 - \mathbb{P}\{T \leq t\} = 1 - W(t), \quad (1.46)$$

что является её представлением в замкнутой форме. Для вычисления функции надёжности также воспользуемся методом характеристик, откуда получаем следующий (сокращённый) алгоритм.

Алгоритм 1.3. *Начало.* Определить целые числа n, k .

Шаг 1. Повторить Шаг 1 – Шаг 2.2. Алгоритма 1.1.

Шаг 2. Найти ПЛ $\tilde{h}_i(s)$ всех функций $h_i(t)$ ($i = \overline{1, k-1}$) через ПЛ $\tilde{\pi}_0(s)$, используя представление функций π_j в виде

$$\pi_j(t, x) = \left(h_j(t-x)e^{-\lambda_j x} + H_{j-1}(t-x; x) \right) (1 - B(x)),$$

с учётом (1.27) для $H_j(t-x; x)$ и принимая во внимание связь функций $\hat{h}_1, \dots, \hat{h}_{k-1}$,

$$\sum_{j=1}^{k-1} \hat{h}_j(t) = 0,$$

и граничные условия (1.45).

Шаг 4. Найти ПЛ $\tilde{\pi}_0(s)$ из первого уравнения (1.43).

Шаг 5. Найти ПЛ п.р. длительности до первого отказа системы $\tilde{w}(s) = \tilde{\pi}_k(s)$ и функции надёжности $\tilde{R}(s)$

$$\tilde{R}(s) = \int_0^\infty R(t) dt = \frac{1}{s} (1 - \tilde{w}(s)) = \frac{1}{s} (1 - \lambda_{k-1} \tilde{\pi}_{k-1}(s)) \quad (1.47)$$

с использованием её представления (1.46). Далее аналитическими или численными методами, применяя обратное преобразование Лапласа, найти функцию надёжности $R(t)$.

Конец.

С помощью функции надёжности легко вычислить среднее в.б.р. системы.

Следствие 1.3. Среднее в.б.р. модели k -из- n вычисляется как

$$\mathbb{E}[T] = \tilde{R}(s)|_{s=0}.$$

Доказательство. Следствие вытекает из определения среднего в.б.р. системы (1.4) и вычисляется с помощью ПЛ функции $\tilde{R}(s)$ из (1.47). ■

Возможности приведённого алгоритма рассмотрены в главе 2, где представлено исследование функции надёжности модели 2-из-6, описывающей поведение БПЛА привязной телекоммуникационной платформы, а также проанализирована чувствительность функции надёжности к виду распределения и значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов системы.

1.5 Стационарные вероятности

Рассмотрим далее стационарные характеристики надёжности модели k -из- n согласно определениям из формул (1.5), (1.6). Для исследования стационарных вероятностей состояний модели воспользуемся соответствующими им уравнениями баланса (для стационарного режима).

1.5.1 Сценарий частичного ремонта системы

Предположим, что вероятности состояний процесса $Z(t)$ не зависят от времени t и что для этого процесса существуют предельные вероятности,

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t), \quad i = \overline{1, k},$$

которые совпадают со стационарными вероятностями состояний. Тогда для сценария частичного ремонта системы уравнения баланса вытекают из уравнений (1.12) Теоремы 1.1 при $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0 &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_1(x) dx, \\ \dot{\pi}_1(x) &= -(\lambda_1 + \beta(x)) \pi_1(x), \\ \dot{\pi}_i(x) &= -(\lambda_i + \beta(x)) \pi_i(x) + \lambda_{i-1} \pi_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \dot{\pi}_k(x) &= -\beta(x) \pi_k(x) + \lambda_{k-1} \pi_{k-1}(x), \end{aligned} \tag{1.48}$$

где $\dot{\pi}_i(x) = \frac{d}{dx} \pi_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, совместно с граничными условиями из (1.14)

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= \lambda_0 \pi_0 + \int_0^\infty \beta(x) \pi_2(x) dx, \\ \pi_i(0) &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_{i+1}(x) dx, \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \pi_k(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Решение этой системы уравнений для вычисления предельных вероятностей представлено в следующей теореме.

Теорема 1.4. Стационарные вероятности состояний модели $\langle M_{k < n} | GI | 1 \rangle$ в случае частичного восстановления системы для любых $k > 2$ в терминах ПЛ п. р. времени восстановления компонентов $\tilde{b}(\lambda_i)$ в точке λ_i , $i = \overline{1, k-1}$, имеют вид:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0} C_1 \tilde{b}(\lambda_1), \\ \pi_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_i &= C_i \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + S(i-1) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{i-1})}{\lambda_{i-1}}, \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \pi_k &= C_k \cdot b - C_{k-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-1})}{\lambda_{k-1}} - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}} S(k-2) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-2})}{\lambda_{k-2}}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

где компоненты C_i , $i = \overline{1, k}$, вычисляются рекуррентно,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_2 \tilde{b}(\lambda_2)}{1 - \tilde{b}(\lambda_1) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)}, \\ C_i &= C_{i+1} \tilde{b}(\lambda_{i+1}) + S(i) \tilde{b}(\lambda_i) - S(i-1), \quad i = \overline{2, k-2}, \\ C_k &= C_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}} S(k-2), \\ S(i) &= \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j, \end{aligned} \tag{1.51}$$

а константа C_{k-1} вычисляется из условия нормировки $\sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i = 1$.

Доказательство. Для решения системы уравнений (1.48) вместе с граничными условиями (1.49) воспользуемся методом вариации постоянных. Решение второго из уравнений системы (1.48) даёт вероятность $\pi_1(x)$ в виде

$$\pi_1(x) = C_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)).$$

С помощью подстановки этого выражения находим решение первого уравнения системы (1.48) для вероятности π_0 ,

$$\pi_0 = \frac{1}{\lambda_0} C_1 \tilde{b}(\lambda_1).$$

Решение следующих двух уравнений системы (1.48) вычисляется методом вариации постоянных,

$$\begin{aligned}\pi_i(x) &= C_i(x)e^{-\lambda_i x}(1 - B(x)), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \pi_k(x) &= C_k(x)(1 - B(x)),\end{aligned}$$

где функции $C_i(x)$ ($i = \overline{2, k}$) вычисляются рекуррентно

$$\begin{aligned}C_i(x) &= C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j e^{-(\lambda_{i-1} - \lambda_i)x}, \\ C_k(x) &= C_k - C_{k-1} e^{-\lambda_{k-1}x} - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}} \sum_{j=1}^{k-2} (-1)^{k-1-j} \left(\prod_{m=j}^{k-2} \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j e^{-\lambda_{k-2}x}.\end{aligned}$$

Граничные условия (1.49) позволяют найти константы C_i ($i = \overline{1, k}$). Первое граничное условие даёт представление C_1 через C_2 в терминах ПЛ п. р. времени ремонта,

$$C_1 = C_1 \tilde{b}(\lambda_1) + C_2 \tilde{b}(\lambda_2) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} C_1 \tilde{b}(\lambda_1).$$

Второе граничное условие даёт рекуррентное выражение для C_i через C_{i+1} , $i = \overline{2, k-2}$,

$$C_i = C_{i+1} \tilde{b}(\lambda_{i+1}) + S(i) \tilde{b}(\lambda_i) - S(i-1),$$

где компоненты C_i , $i = \overline{1, k}$, вычисляются рекуррентно,

$$S(i) = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j.$$

Последнее граничное условие даёт представление C_k через C_{k-1} ,

$$C_k = C_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-2}} S(k-2).$$

Константа C_{k-1} вычисляется из уравнения нормировки,

$$\sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i = 1.$$

Простое вычисление $\pi_i = \int_0^\infty \pi_i(x) dx$, $i = \overline{1, k}$, и замена на $S(i)$, где это возможно, завершают доказательство теоремы. Ч.т.д. ■

Выражения для вычисления стационарных вероятностей (1.50)-(1.51) представлены через ПЛ п. р. времени ремонта компонентов системы. Отсюда наблюдается очевидная зависимость этих характеристик от вида ф.р. времени ремонта. С другой стороны, в работах [57–59] показано, что при фиксированном среднем времени ремонта b компонентов при сценарии

редких отказов вид распределения времени ремонта не влияет на показатели надёжности системы, что говорит об их нечувствительности к виду ф.р.

Для рассматриваемой модели под редкими отказами следует понимать низкую интенсивность отказов по отношению к фиксированному времени ремонта. Поскольку выражения стационарных вероятностей состояний модели k -из- n принимают достаточно громоздкий вид, асимптотические выражения этих характеристик в случае редких отказов компонентов будут представлены для частного случая параметров k и n в главе 2.

Теорема 1.4 справедлива для всех $k = \overline{3, n}$, поэтому рассмотрим дополнительно следующие Следствия.

Следствие 1.4. Выражения стационарных вероятностей состояний модели 1-из- n не зависят от вида ф.р. времени ремонта и принимают вид

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + b\lambda_0}, \quad \pi_1 = \frac{b\lambda_0}{1 + b\lambda_0}.$$

Доказательство. Пусть $k = 1$. Тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова примет вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0 &= \int_0^\infty \pi_1(x) \beta(x) dx, \\ \dot{\pi}_1(x) &= -\beta(x) \pi_1(x), \end{aligned} \tag{1.52}$$

вместе с граничным условием

$$\pi_1(0) = \lambda_0 \pi_0. \tag{1.53}$$

Для решения представленных уравнений воспользуемся, как и раньше, методом вариации постоянных. Из второго уравнения системы (1.52) получаем

$$\pi_1(x) = C_1(1 - B(x)),$$

а также стационарную вероятность

$$\pi_1 = \int_0^\infty \pi_1(x) dx = C_1 \cdot b.$$

Подстановка вероятности $\pi_1(x)$ в первое уравнение системы (1.52) даёт стационарную вероятность π_0 ,

$$\pi_0 = C_1 \cdot \lambda_0^{-1}.$$

Заменяя граничное условие (1.53) на условие нормировки, $\pi_0 + \pi_1 = 1$, вычислим константу C_1 ,

$$C_1 \cdot \lambda_0^{-1} + C_1 \cdot b = 1, \quad C_1 = \frac{\lambda_0}{1 + b\lambda_0},$$

подстановка которой в вычисленные ранее выражения даёт стационарное распределение вероятностей состояний процесса,

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + b\lambda_0}, \quad \pi_1 = \frac{b\lambda_0}{1 + b\lambda_0}.$$

Полученные выражения не зависят от ф.р. времени ремонта компонентов системы. Более того, они совпадают с вероятностями, вычисленными с помощью простого процесса рождения и гибели, в котором время ремонта $B(t) \sim \text{Exp}(b^{-1})$. С другой стороны, аналогичный результат можно получить с помощью предельного перехода $\pi_j = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \tilde{\pi}_j(s)$, $j = 0, 1$, подставив разложение $\tilde{b}(s) = b(0) + \tilde{b}'(0) \cdot s = 1 - b \cdot s$ в нестационарные вероятности состояний модели 1-из- n (Следствие 1.1). ■

Следствие 1.5. Стационарные вероятности состояний модели 2-из- n в случае частичного ремонта и произвольного распределения времени восстановления компонентов принимают вид,

$$\pi_0 = \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0 b + \tilde{b}(\lambda_1)}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1(\lambda_0 b + \tilde{b}(\lambda_1))}, \quad \pi_2 = \frac{\lambda_0(\lambda_1 b + \tilde{b}(\lambda_1) - 1)}{\lambda_1(\lambda_0 b + \tilde{b}(\lambda_1))}.$$

Доказательство. Стационарные вероятности состояний модели 2-из- n вытекают из общего случая путем замены второго граничного условия системы (1.49) на выражение

$$\pi_{k-1}(0) = 0.$$

Выражения стационарных вероятностей состояний из формулы (1.50) принимают вид,

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0} C_1 \tilde{b}(\lambda_1), \\ \pi_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_2 &= C_2 \cdot b - C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \end{aligned} \tag{1.54}$$

где константы C_1 и C_2 вычисляются из граничного условия и условия нормировки соответственно. С помощью нового граничного условия получаем

$$C_2 = C_1,$$

тогда подставив эту константу с учетом замены $C_1 = C$ в условие нормировки, получаем

$$C = \left(\frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0} + \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} + b - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} \right)^{-1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 b + \tilde{b}(\lambda_1)}.$$

Доказательство завершается путём подстановки полученной константы C в выражение (1.54).

Полученные выражения демонстрируют очевидную зависимость стационарных вероятностей от распределения времени ремонта компонентов и системы в случае частичного ремонта. При подстановке $B(t) \sim \text{Exp}(b^{-1})$ представленные выражения также совпадают с результатами, полученными с помощью процесса рождения и гибели. ■

В разделе 2.3.1 главы 2 на примере модели 3-из-6 результаты Теоремы 1.4 будут использованы для исследования надёжности гексакоптера, проведения численных экспериментов и анализа чувствительности к виду распределения и значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов системы.

1.5.2 Сценарий полного ремонта системы

Аналогично рассмотрим сценарий полного восстановления системы после отказа. В предположении существования стационарного режима уравнения (1.34) из Теоремы 1.2 при $t \rightarrow \infty$ примут следующий вид,

$$\begin{aligned} \lambda_0 \pi_0 &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_1(x) dx + \int_0^\infty \phi(x) \pi_k(x) dx, \\ \dot{\pi}_1(x) &= -(\lambda_1 + \beta(x)) \pi_1(x), \\ \dot{\pi}_i(x) &= -(\lambda_i + \beta(x)) \pi_i(x) + \lambda_{i-1} \pi_{i-1}(x), \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \dot{\pi}_k(x) &= -\phi(x) \pi_k(x), \end{aligned} \tag{1.55}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= \lambda_0 \pi_0 + \int_0^\infty \beta(x) \pi_2(x) dx, \\ \pi_i(0) &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_{i+1}(x) dx, \quad i = \overline{2, k-2}, \\ \pi_{k-1}(0) &= 0, \\ \pi_k(0) &= \lambda_{k-1} \int_0^\infty \pi_{k-1}(x) dx. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Здесь также используется обозначение $\dot{\pi}_i(x) = \frac{d}{dx} \pi_i(x)$, $i = \overline{1, k}$. Решение систем уравнений (1.55)-(1.56) приводит к следующей Теореме.

Теорема 1.5. Стационарные вероятности состояний модели $\langle M_{k < n} | GI | 1 \rangle$, в случае полного восстановления системы в терминах ПЛ п. р. времени ремонта компонентов $\tilde{b}(\lambda_i)$ в точке

λ_i , $i = \overline{1, k-1}$, для любых $k > 2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \lambda_0^{-1} \left[C_1 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{b}(\lambda_1) \right) - C_2 \tilde{b}(\lambda_2) \right], \\ \pi_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_i &= C_i \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + S(i-1) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{i-1})}{\lambda_{i-1}}, \quad i = \overline{2, k-1}, \\ \pi_k &= C_k \cdot f,\end{aligned}\tag{1.57}$$

где компоненты C_i , $i = \overline{1, k}$, вычисляются рекуррентно,

$$\begin{aligned}C_i &= C_{i+1} \tilde{b}(\lambda_{i+1}) + S(i) \tilde{b}(\lambda_i) - S(i-1), \quad i = \overline{2, k-2}, \\ C_{k-1} &= -S(k-2), \\ C_k &= \lambda_{k-1} C_{k-1} \left(\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-1})}{\lambda_{k-1}} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-2})}{\lambda_{k-2}} \right), \\ S(i) &= \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j,\end{aligned}\tag{1.58}$$

с учётом условия нормировки $\sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i = 1$.

Доказательство. Доказательство Теоремы 1.5 аналогично доказательству предыдущей Теоремы. Решение второго и последнего уравнений системы (1.55) даёт вероятности $\pi_1(x)$ и $\pi_k(x)$ в виде

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= C_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)), \\ \pi_k(x) &= C_k (1 - F(x)).\end{aligned}$$

Решение третьего уравнения получается с помощью метода вариации постоянных аналогично случаю частичного ремонта,

$$\pi_i(x) = C_i(x) e^{-\lambda_i x} (1 - B(x)), \quad i = \overline{2, k-1},$$

где

$$C_i(x) = C_i + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j e^{-(\lambda_{i-1} - \lambda_i)x}.$$

Граничные условия (1.56) позволяют найти константы C_i ($i = \overline{1, k}$). Первое граничное условие даёт представление вероятности π_0 через C_1 и C_2 ,

$$\begin{aligned} C_1 &= \lambda_0 \pi_0 + C_2 \tilde{b}(\lambda_2) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} C_1 \tilde{b}(\lambda_1), \\ \lambda_0 \pi_0 &= C_1 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{b}(\lambda_1) \right) - C_2 \tilde{b}(\lambda_2). \end{aligned}$$

Второе граничное условие даёт рекуррентное выражение для C_i через C_{i+1} для $i = \overline{2, k-2}$,

$$C_i = C_{i+1} \tilde{b}(\lambda_{i+1}) + S(i) \tilde{b}(\lambda_i) - S(i-1),$$

где

$$S(i) = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j+1} \left(\prod_{m=j}^i \frac{\lambda_m}{\lambda_j - \lambda_{m+1}} \right) C_j.$$

С помощью дополнительного условия для вероятности $\pi_{k-1}(0)$ получаем константу C_{k-1} ,

$$C_{k-1} = -S(k-2).$$

Константа C_k вычисляется из последнего уравнения системы (1.56) через константу C_{k-1} ,

$$\begin{aligned} C_k &= \lambda_{k-1} \pi_{k-1}, \\ C_k &= \lambda_{k-1} C_{k-1} \left(\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-1})}{\lambda_{k-1}} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{k-2})}{\lambda_{k-2}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, все вероятности выражаются в терминах констант C_i ($i = \overline{1, k}$), которые вычисляются рекуррентно. Оставшаяся константа C_1 вычисляется из условия нормировки,

$$\sum_{0 \leq i \leq k} \int_0^\infty \pi_i(x) dx = 1.$$

Простое вычисление $\pi_i = \int_0^\infty \pi_i(x) dx$, $i = \overline{1, k}$, и замена на $S(i)$ там, где это возможно, завершает доказательство Теоремы. Ч.т.д. ■

Рассмотрим также в качестве Следствия случай, когда $k = 2$.

Следствие 1.6. Стационарные вероятности состояний модели 2-из- n в случае полного ремонта и произвольного распределения времени восстановления компонентов принимают вид,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}, \\ \pi_1 &= \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 f(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}.\end{aligned}$$

Доказательство. Для $k = 2$ система дифференциальных уравнений Колмогорова принимает вид

$$\begin{aligned}\lambda_0 \pi_0 &= \int_0^\infty \beta(x) \pi_1(x) dx + \int_0^\infty \phi(x) \pi_2(x) dx, \\ \dot{\pi}_1(x) &= -(\lambda_1 + \beta(x)) \pi_1(x), \\ \dot{\pi}_2(x) &= -\phi(x) \pi_2(x),\end{aligned}\tag{1.59}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\pi_1(0) &= \lambda_0 \pi_0, \\ \pi_2(0) &= \lambda_1 \pi_1.\end{aligned}\tag{1.60}$$

Второе и третье уравнение системы (1.59) дают следующее решение,

$$\begin{aligned}\pi_1(x) &= C_1 e^{-\lambda_1 x} (1 - B(x)), \\ \pi_2(x) &= C_2 (1 - F(x)),\end{aligned}$$

откуда можно вычислить стационарные вероятности $\pi_i = \int_0^\infty \pi_i(x) dx$, $i = 1, 2$,

$$\pi_1 = C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \quad \pi_2 = C_2 f.$$

С помощью первого граничного условия системы (1.60) получаем следующее выражение,

$$\pi_1(0) = \lambda_0 \pi_0 = C_1,$$

откуда стационарная вероятность π_0 равна

$$\pi_0 = \lambda_0^{-1} C_1.$$

Подставив вероятность π_1 во второе граничное условие системы (1.60), получаем

$$C_2 = C_1 (1 - \tilde{b}(\lambda_1)).$$

Константа C_1 вычисляется с помощью условия нормировки, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$,

$$C_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)},$$

тогда стационарное распределение вероятностей состояний процесса принимает вид,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}, \\ \pi_1 &= \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 f(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1 + \lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))(1 + \lambda_1 f)}.\end{aligned}$$

При этом, при подстановке $B(x) = 1 - e^{-xb^{-1}}$ и соответствующего ПЛ $\tilde{b}(\lambda_1) = (1 + \lambda_1 b)^{-1}$ стационарные вероятности состояний принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1 + \lambda_1 b}{1 + b(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_1 f)}, \\ \pi_1 &= \frac{\lambda_0 b}{1 + b(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_1 f)}, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 b f}{1 + b(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_1 f)}.\end{aligned}$$

Этот результат совпадает с выражениями, полученными путём решения уравнений баланса, которые выписываются из простого процесса рождения и гибели с тремя состояниями. ■

В разделе 2.3.2 главы 2 на примере модели 3-из-6 результаты Теоремы 1.5 будут использованы для исследования надёжности гексакоптера, проведения численных экспериментов и анализа чувствительности к виду распределения времени ремонта компонентов системы и его значения коэффициента вариации.

1.6 Заключение

В настоящей главе исследованы основные вероятностно-временные характеристики математических моделей k -из- n мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы. Представлены аналитические результаты и алгоритмы вычисления этих характеристик для произвольных k и n , а также произвольного распределения времени ремонта компонентов и всей системы. С помощью метода введения дополнительных переменных построен двумерный марковский процесс, который позволяет исследовать систему с непоказательным распределением времени ремонта её компонентов известными аналитическими методами, применяемыми к марковским процессам.

Для моделей восстанавливаемой системы k -из- n представлено аналитическое исследование основных вероятностных характеристик для нестационарного и стационарного режимов в случае двух сценариев восстановления системы после её отказа. На основе метода характеристик предложены алгоритмы вычисления нестационарных вероятностей состояний системы и её функции надёжности. Стационарные характеристики вычисляются из уравнений баланса, полученных с помощью предельного перехода из системы дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных. Для решения таких уравнений использован метод вариации постоянных. Таким образом, стационарное распределение вероятностей получено в замкнутой форме в терминах ПЛ п. р. времени ремонта компонентов.

Результаты исследования, представленные в этой главе, были опубликованы в работах [57; 60–64; 67; 69; 72].

В следующей главе рассматриваемые характеристики будут применяться для исследования надёжности БПЛА с помощью численных методов.

Глава 2. Исследование моделей k -из- 6 и анализ надёжности БПЛА на базе гексакоптера

В настоящей главе представлено численное исследование математической модели мультироторного беспилотного модуля (гексакоптера) привязной высотной телекоммуникационной платформы с использованием моделей восстанавливаемых систем 2-из-6 и 3-из-6. Приводятся выражения основных вероятностно-временных характеристик надёжности рассматриваемых моделей, полученные с помощью применения алгоритмов и теорем из Главы 1. Каждый результат сопровождается вычислением соответствующих характеристик и сравнением с марковским случаем. Приводятся асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний в случае редких отказов компонентов для частных случаев модели k -из- n . С помощью численного исследования проводится анализ чувствительности рассматриваемых характеристик к виду ф.р. времени ремонта и значению коэффициента вариации.

2.1 Описание системы и объекта исследования

Для начала представим описание объекта исследования. Рассматриваемая система представляет собой телекоммуникационную высотную платформу на базе привязного БПЛА (см. рис. 2.1).

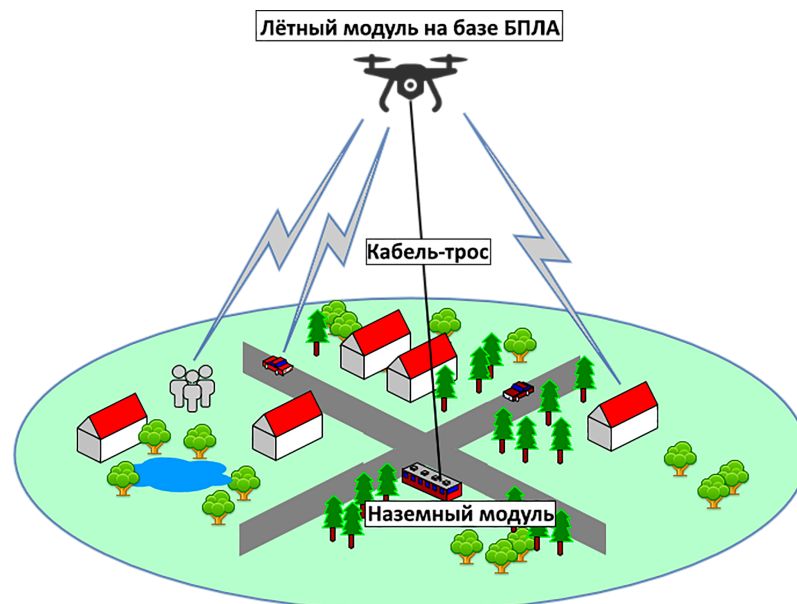


Рисунок 2.1 — Структура привязной высотной платформы

Привязные БПЛА находят широкое практическое применение в гражданской и военной областях. Они предназначены для выполнения длительных полётов и непрерывных заданий, таких как задачи рекогносцировки, наблюдения, радиоэлектронной борьбы, пожаротушения,

обеспечения дальней широкополосной беспроводной связи, развертывания современной телекоммуникационной инфраструктуры в чрезвычайных ситуациях, мониторинга инфраструктуры и охраны критически важных объектов (атомных станций, аэродромов, протяжённых мостов и т.д.) и участков государственных границ [80; 81].

Архитектура привязной высотной платформы включает в себя следующие основные компоненты:

1. беспилотный мультироторный модуль (см. рис. 2.2);
2. наземный модуль, в состав которого входит преобразователь напряжения постоянного или переменного тока, система диагностики параметров высотной платформы и интеллектуальная лебёдка для управления натяжением кабель-троса;
3. система передачи энергии земля – борт большой мощности;
4. система управления и стабилизации высотной платформы;
5. бортовая аппаратура полезной нагрузки, включая базовую станцию сотовой сети поколения 4G/LTE, радиолокационное и радиорелейное оборудование, аппаратуру для видеонаблюдения и мониторинга окружающей среды и т.д.;
6. кабель-трос на кевларовой основе, включающий медные провода для передачи высоковольтных сигналов и оптическое волокно для передачи цифровых данных [82; 83].

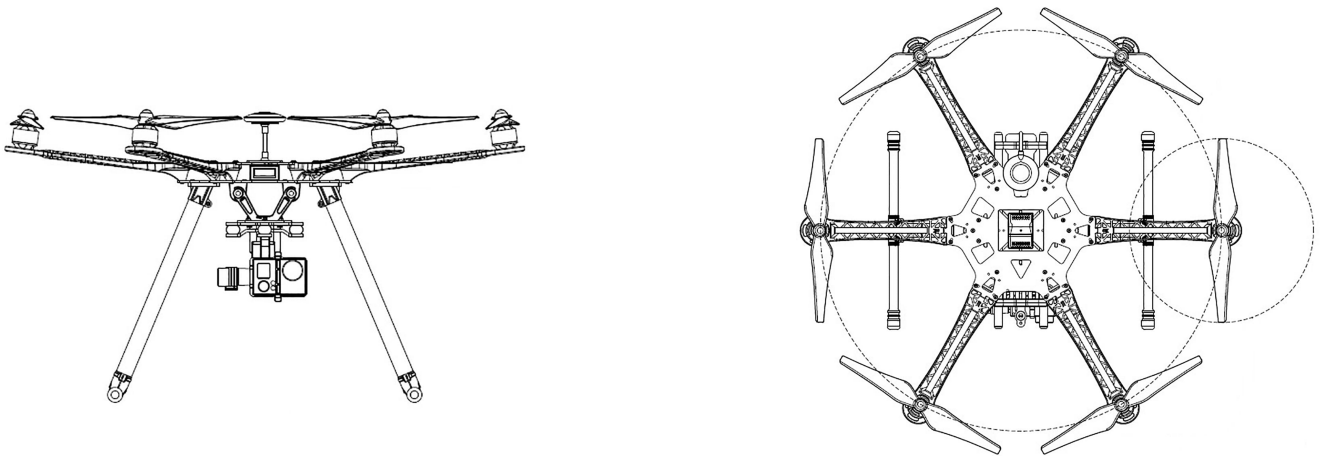


Рисунок 2.2 — Беспилотный шестироторный модуль

В рамках выполнения уже названных задач могут использоваться и автономные БПЛА, исследование которых представляет особый интерес и может быть проведено, в том числе с помощью математической модели k -из- n [84; 85].

Основное преимущество привязных БПЛА по сравнению с автономными заключается в длительном функционировании беспилотного модуля без опускания на землю за счёт передачи энергии по кабель-тросу. Возможность питания модуля прямо от наземной станции теоретически делает время полёта достаточно долгим. Поэтому исходные показатели надёжности самого модуля, а также его архитектура имеют первостепенное значение.

Выбор математической модели, её параметров и набора исходных данных зависит от конкретного сценария использования платформы. В настоящей работе рассматривается следующий сценарий применения: использование привязной высотной телекоммуникационной платформы для обеспечения беспроводной широкополосной связи в течение длительного времени в отдаленных сельских районах в условиях отсутствия инфраструктуры наземной сети доступа. Базовая станция сотовой связи стандарта Long Term Evolution (LTE) на борту БПЛА должна предоставлять услуги связи мобильным пользователям. Длительная работа всей системы обеспечивается непрерывным электропитанием двигательных установок беспилотного модуля и бортовой телекоммуникационной аппаратуры от наземных источников энергии по кабель-тросу.

Привязная высотная беспилотная платформа имеет мультироторную архитектуру. В качестве примера летательного аппарата рассматривается гексакоптер, т.е. шестироторный БПЛА, который может выйти из строя из-за отказа двигателей.

Причины отказа двигательных установок могут быть разные, например перегрев или скачки напряжения. Кроме того возможен и вынужденный вывод из строя двигателей для профилактики, например, перегрева, при котором возобновление функционирования регулируется автоматически или пультом управления. В настоящем исследовании будут рассмотрены два сценария функционирования системы которые отвечают математическим моделям k -из-6 с частичным и полным восстановлением.

1. Профилактика перегрева двигателя при приближении к критическим показателям. При этом окончание профилактики не означает полное возвращение показателя, отвечающего за перегрев, к норме, но отвечает за охлаждение двигателя для поддержания непрерывного функционирования всей платформы. Таким образом, если количество двигателей, находящихся на профилактике, достигает заданного значения k , за счёт имеющейся резервной батареи гексакоптер удерживается в воздухе без опускания на землю до завершения или вынужденного прекращения профилактики одного из вышедших из строя двигателей. Исследование этой ситуации проводится с помощью восстанавливаемой модели k -из-6 с частичным восстановлением.
2. Отказ двигателей возникает из-за перегрева, на полное охлаждение которого требуется некоторое время. Если количество перегретых двигателей достигло заданного значения k , а охлаждение одного из перегретых двигателей не завершено, то наступает отказ всего модуля, что вызывает его посадку на землю за счёт имеющейся резервной батареи. Исследование этой ситуации проводится с помощью восстанавливаемой модели k -из-6 с полным восстановлением.

В рамках исследования надёжности мультироторного БПЛА необходимо учитывать особенности его функционирования. Так, выход из строя рядом расположенных двигателей может привести к накрениванию вбок всего модуля и, как следствие, к более быстрому выходу из строя работающих двигателей. Более того, отказ в работе двигателей может быть причиной увеличения нагрузки на работающие двигатели, что также может привести к более быстрому прекращению функционирования всего модуля. Различные ситуации влияния

расположения отказавших компонентов на работающие и на всю систему, а также сценарии перераспределения нагрузки в рамках исследования надёжности моделей k -из- n рассматривались ранее, в том числе автором диссертационного исследования, в работах [60; 86–89]. Однако в настоящей работе представлен простейший случай, когда отказ системы зависит только от количества отказавших компонентов, но не от их расположения. При этом, в случае сценария полного восстановления время ремонта всей системы не зависит от количества отказавших компонентов.

Поскольку модель k -из- 6 адекватно описывает поведение БПЛА в заданных условиях, то в этой главе термины, связанные с математической постановкой задачи, будут тождественны используемым формулировкам на практике. Таким образом, под в.б.р. компонентов будут пониматься время до достижения критического уровня у показателя температуры двигателя, то есть время до начала вынужденного отключения двигателя для осуществления профилактики (в случае частичного ремонта системы), и время до отказа двигателя из-за перегрева (в случае полного ремонта системы). В качестве времени ремонта рассматривается время, необходимое для охлаждения двигателя при профилактике или его перегреве.

Таким образом, в следующих разделах приведено численное исследование показателей надёжности гексакоптера с помощью восстанавливаемых моделей k -из- 6 для двух сценариев восстановления системы после отказа. Кроме того, проведён анализ чувствительности этих характеристик к виду исходной информации, а именно к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта. Поскольку на практике значение второго момента (дисперсии) времени ремонта неизвестно, исследование влияния этого параметра на надёжность всей системы является важной задачей.

В настоящей главе для проведения численного исследования взяты условные единицы измерения в.б.р. a и ремонта b двигателей модуля, не являющиеся абсолютными значениями. Значения коэффициента вариации v выбраны для иллюстрации чувствительности/нечувствительности показателей надёжности системы. Реализация численных примеров на реальных статистических данных не приводится.

2.2 Характеристики надёжности гексакоптера, зависящие от времени его функционирования

Рассмотрим сначала нестационарные (зависящие от времени) характеристики надёжности гексакоптера, а именно нестационарные вероятности состояний в случае двух сценариев восстановления всего модуля после отказа и функцию надёжности. Применим полученные в главе 1 теоретические результаты.

Для исследования нестационарных характеристик надёжности гексакоптера положим, что 2 бездействующих (находящихся на профилактике или неисправных из-за перегрева)

двигателя из 6 приводят к остановке функционирования модуля, таким образом рассмотрим модель 2-из-6.

2.2.1 Нестационарные вероятности состояний модели 2-из-6 для сценария частичного ремонта

Допустим, что в случае профилактики перегрева двигателей гексакоптера, исследуемого в нестационарном режиме, 2 бездействующих двигателя из 6 приводят к остановке функционирования модуля, но поддержанию привязного БПЛА в воздухе до начала работы одного из двух двигателей, находящихся на профилактике. При этом полагаем, что время завершения профилактики меньше времени, в течение которого резервная батарея способна удерживать платформу за счёт своей мощности.

Вычисление нестационарных вероятностей состояний модели 2-из-6 с произвольной ф.р. времени ремонта её компонентов. Рассмотрим пример вычисления нестационарных вероятностей процесса $Z(t)$ в случае частичного ремонта системы на основе Алгоритма 1.1. При $k = 2$ согласно Теореме 1.1 система дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных для вероятностей состояний имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_2(t,x) &= -\beta(x)\pi_2(t,x) + \lambda_1\pi_1(t,x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

вместе с начальными

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0,x) = 0, \quad i = 1,2, \quad \forall x \geq 0, \quad (2.2)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \pi_1(t,0) &= \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx, \\ \pi_2(t,0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Следуя алгоритму 1.1, общее решение последних двух уравнений системы (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \pi_1(t,x) &= h_1(t-x)e^{-\lambda_1 x}(1-B(x)), \\ \pi_2(t,x) &= (h_2(t-x) - h_1(t-x)e^{-\lambda_1 x})(1-B(x)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $h_i(x)$, $i = 1, 2$ – произвольные гладкие функции, которые будут вычислены из граничных условий.

Подставив решение для $\pi_2(t, x)$ в граничное условие (2.3) для $\pi_1(t, 0)$,

$$h_1(t) = \lambda_0 \pi_0(t) + \int_0^t (h_2(t-x) - h_1(t-x)e^{-\lambda_1 x}) b(x) dx,$$

и перейдя к ПЛ соответствующих функций, получим

$$\tilde{h}_1(s) = \lambda_0 \tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_2(s) \tilde{b}(s) - \tilde{h}_1(s) \tilde{b}(s + \lambda_1).$$

Из второго граничного условия следует, что

$$h_1(t) = h_2(t),$$

тогда получим зависимость $\tilde{h}_1(s)$ от ПЛ вероятности $\pi_0(t)$,

$$\tilde{h}_1(s) = \frac{\lambda_0 \tilde{\pi}_0(s)}{1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}(s + \lambda_1)}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1). Переход к ПЛ соответствующих функций и подстановка уже известного выражения для функции $\pi_1(t, x)$ из (2.4) и начального условия (2.2) даёт следующее,

$$s \tilde{\pi}_0(s) - 1 = -\lambda_0 \tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}_1(s) \tilde{b}(s + \lambda_1),$$

откуда, положив $h_1(t) \equiv h(t)$, получаем

$$\tilde{\pi}_0(s) = \frac{1 + \tilde{h}(s) \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_0}. \quad (2.6)$$

Вероятности $\pi_i(t)$, $i = 1, 2$, в терминах ПЛ по определению

$$\tilde{\pi}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \pi_i(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t \pi_i(t; x) dx dt$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(s) &= \tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \tilde{h}_2(s) \frac{1 - \tilde{b}(s)}{s} - \tilde{h}_1(s) \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подстановка (2.5) в (2.6), (2.7) завершает вычисление нестационарных вероятностей состояний процесса в терминах ПЛ п. р. времени ремонта компонентов и системы для модели 2-из- n ,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s(1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}(s + \lambda_1)) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s))}, \\
\tilde{\pi}_1(s) &= \frac{\lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{(s + \lambda_1) \left[s(1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}(s + \lambda_1)) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)) \right]}, \\
\tilde{\pi}_2(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\lambda_0 \left[\lambda_1(1 - \tilde{b}(s)) - s(\tilde{b}(s) - \tilde{b}(s + \lambda_1)) \right]}{(s + \lambda_1) \left[s(1 - \tilde{b}(s) + \tilde{b}(s + \lambda_1)) + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s)) \right]}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Для численного исследования представленных характеристик переход к обратному ПЛ в выражениях (2.7) будет реализован программно в Wolfram Mathematica.

Заметим, что если $B(t) \sim Exp(b^{-1})$ и $\tilde{b}(s) = \frac{b^{-1}}{s + b^{-1}}$, то нестационарные вероятности состояний модели 2-из- n для сценария частичного ремонта принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{1 + bs(2 + b(s + \lambda_1))}{s(1 + b(2s + \lambda_0) + b^2(s + \lambda_0)(s + \lambda_1))}, \\
\tilde{\pi}_1(s) &= \frac{b\lambda_0(1 + bs)}{s(1 + b(2s + \lambda_0) + b^2(s + \lambda_0)(s + \lambda_1))}, \\
\tilde{\pi}_2(s) &= \frac{b^2\lambda_0\lambda_1}{s(1 + b(2s + \lambda_0) + b^2(s + \lambda_0)(s + \lambda_1))}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить при построении простого процесса рождения и гибели, описываемого следующей системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + b^{-1}\pi_1(t), \\
\frac{d}{dt}\pi_1(t) &= -(\lambda_1 + b^{-1})\pi_1(t) + \lambda_0\pi_0(t) + b^{-1}\pi_2(t), \\
\frac{d}{dt}\pi_2(t) &= -b^{-1}\pi_2(t) + \lambda_1\pi_1(t).
\end{aligned}$$

Численные примеры. Пусть время ремонта имеет распределение Эрланга ($Erl = Erl(l, \theta)$) с п.р. $f(t) = \frac{\theta^l}{\Gamma(l)} t^{l-1} e^{-\theta t}$, $t > 0$. Такая модель в обозначениях Кендалла-Башарина определяется как $\langle M_{2<6} | Erl | 1 \rangle$. Соответствующие среднее значение, коэффициент вариации и ПЛ п. р. времени восстановления компонентов и системы в случае $B(t) \sim Erl$ равны

$$b = l \cdot \theta^{-1}, \quad v = \sqrt{l}/l, \quad \tilde{b}(s) = \left(\frac{\theta}{s + \theta} \right)^l.$$

Тогда подставив эти характеристики в (2.8), ПЛ нестационарных вероятностей модели $\langle M_{2<6} | Erl | 1 \rangle$ примут вид

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_0(s) &= (1 - \theta^l(s + \theta)^{-l} + \theta^l(5\alpha + s + \theta)^{-l}) \cdot \delta^{-1}, \\ \tilde{\pi}_1(s) &= 6\alpha(1 - \theta^l(5\alpha + s + \theta)^{-l}) \cdot ((5\alpha + s)\delta)^{-1}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= (6\alpha(5\alpha - (5\alpha + s)\theta^l(s + \theta)^{-l} + s\theta^l(5\alpha + s + \theta)^{-l}) \cdot (s(5\alpha + s)\delta)^{-1}, \\ \delta &= s + 6\alpha - s\theta^l(s + \theta)^{-l} - 6\alpha\theta^l(s + \theta)^{-l} + s\theta^l(5\alpha + s + \theta)^{-l}.\end{aligned}$$

Параметры распределения Эрланга могут быть выражены через b и v ,

$$l = v^{-2}, \quad \theta = (bv^2)^{-1}.$$

В примерах ниже мы будем использовать эту замену для того, чтобы исследовать чувствительность нестационарных вероятностей состояний системы к коэффициенту вариации v при фиксированном среднем b . Таким образом, в примерах этого раздела параметры a и b – фиксированные при меняющемся v .

Положим, что перегрев двигателя наступает достаточно редко относительно среднего времени его восстановления. Пусть интенсивность профилактического вывода из строя двигателя $\alpha = 0,1$, то есть среднее время работы каждого двигателя до наступления профилактики $a = 10$. При этом пусть среднее время, необходимое для профилактики перегрева винтового двигателя, $b = 1$, а соответствующий коэффициент вариации $v = 1; 0,7; 0,5$. Отметим, что при $v = 1$ распределение Эрланга становится экспоненциальным со средним b (см. формулы (2.9)). Здесь и далее единицы измерения времён условные и не являются абсолютными значениями.

На рисунке 2.3 приведены кривые нестационарных вероятностей состояний $\pi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ модели 2-из-6 с заданными выше значениями в масштабе среднего времени восстановления b .

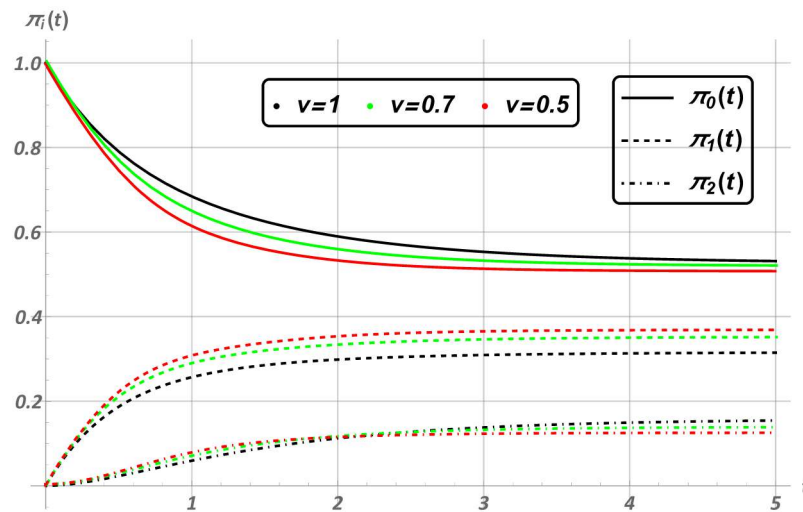


Рисунок 2.3 — Нестационарные вероятности состояний модели $\langle M_{2<6} | Erl | 1 \rangle$ с частичным восстановлением

Здесь легенда рисунка обозначает тип линий для различных вероятностей: простая линия соответствует вероятности $\pi_0(t)$, пунктирная линия соответствует вероятности $\pi_1(t)$, штрихпунктирная линия соответствует вероятности $\pi_2(t)$. Чёрный, зелёный и красный цвета соответствуют выбранному значению коэффициента вариации $v = 1, 0.7, 0.5$ времени ремонта компонентов соответственно.

Эксперимент показывает, что при условно заданных $a = 10$ и $b = 1$ модуль достаточно надёжен. Вероятность отказового состояния системы достаточно мала, $\pi_2(t) < 0,2$, на всем интервале t .

Можно отметить, что на рассматриваемом интервале $t = [0, 5]$ коэффициент вариации v времени ремонта компонентов по-разному влияет на нестационарные вероятности. Кривая вероятности $\pi_0(t)$ при наименьшем v лежит ниже относительно марковского случая $v = 1$, для вероятности $\pi_1(t)$ – наоборот. Для вероятности отказа системы $\pi_2(t)$ на интервале $t = [0, 2]$ наблюдается аналогичное кривой вероятности $\pi_0(t)$ поведение. При этом в точке $t = 2$ положение кривых при разных значениях коэффициента вариации меняется, наибольшее значение v приводит к наибольшему значению вероятности $\pi_2(t)$ по сравнению с $v = 0,5$. Тем не менее, к моменту $t = 5$, т.е. к моменту половины среднего в.б.р. компонентов системы, нестационарные вероятности состояний стабилизируются и принимают близкие значения относительно друг друга, несмотря на изменение параметра v .

Из графика также можно сделать вывод, что вероятность того, что ни один двигатель не выведен из строя для профилактики к половине среднего времени работы каждого двигателя до наступления профилактики ($t = \frac{1}{2}a = 5$) составляет более 50%, $\pi_0(t) > 0,5$ для всех значений коэффициента вариации v времени ремонта.

Таким образом, эксперимент демонстрирует низкую чувствительность нестационарных вероятностей $\pi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$ модели $\langle M_{2<6} | Erl | 1 \rangle$ к значению коэффициента вариации v времени ремонта при фиксированном среднем b . Результаты также продемонстрировали их очевидную сходимость к стационарному распределению при $t \rightarrow \infty$.

Так как нестационарные вероятности состояний системы демонстрируют предельное поведение при $t \rightarrow \infty$, то удобнее проводить исследование влияния коэффициента вариации времени ремонта, а также вида соответствующей ф.р. на стационарных характеристиках, что будет проделано в разделе 2.3 настоящей главы.

2.2.2 Нестационарные вероятности состояний модели 2-из-6 для сценария полного ремонта

Рассмотрим второй сценарий восстановления системы после отказа. Пусть отказ двигателей гексакоптера возникает из-за перегрева, при этом 2 неработающих двигателя из 6 приводят к остановке функционирования модуля, что ведет к его опусканию на землю. При этом полагаем, что время, необходимое на охлаждение одного перегретого двигателя, мень-

ше времени, необходимого для опускания платформы на землю за счёт резервной батареи, т.е. времени охлаждения всех перегретых двигателей одновременно.

Вычисление нестационарных вероятностей состояний модели 2-из- n с произвольной ф.р. времени ремонта её компонентов. Для численного исследования нестационарных вероятностей состояний системы в случае её полного восстановления после отказа также рассмотрим модель 2-из- n , для чего воспользуемся следствием 1.2, где были получены эти характеристики.

В случае показательного распределения времени ремонта компонентов и системы, то есть при $B(t) \sim Exp(b^{-1})$ и $\tilde{b}(s) = \frac{b^{-1}}{s + b^{-1}}$, а также $F(t) \sim Exp(f^{-1})$ и $\tilde{f}(s) = \frac{f^{-1}}{s + f^{-1}}$, из формул (1.39) нестационарные вероятности модели 2-из- n принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_0(s) &= \frac{(1 + fs)(1 + b(s + \lambda_1))}{s(1 + fs)(1 + b(s + \lambda_0)) + \lambda_1 bs(1 + f(s + \lambda_0))}, \\ \tilde{\pi}_1(s) &= \frac{b\lambda_0(1 + fs)}{s(1 + fs)(1 + b(s + \lambda_0)) + \lambda_1 bs(1 + f(s + \lambda_0))}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= \frac{bf\lambda_0\lambda_1}{s(1 + fs)(1 + b(s + \lambda_0)) + \lambda_1 bs(1 + f(s + \lambda_0))}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить при построении простого процесса рождения и гибели, описываемого следующей системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + b^{-1}\pi_1(t) + f^{-1}\pi_2(t), \\ \frac{d}{dt}\pi_1(t) &= -(\lambda_1 + b^{-1})\pi_1(t) + \lambda_0\pi_0(t), \\ \frac{d}{dt}\pi_2(t) &= -f^{-1}\pi_2(t) + \lambda_1\pi_1(t).\end{aligned}$$

Численные примеры. Как и прежде, для численного эксперимента положим, что время ремонта имеет распределение Эрланга (Erl). Обозначим через v_b и v_f коэффициент вариации времени ремонта компонентов и системы соответственно. Среднее время ремонта компонентов b и системы f , соответствующие коэффициенты вариации и ПЛ равны соответственно

$$\begin{aligned}b &= l_b \cdot \theta_b^{-1}, \quad v_b = \sqrt{l_b}/l_b, \quad \tilde{b}(s) = \left(\frac{\theta_b}{s + \theta_b}\right)^{l_b}, \\ f &= l_f \cdot \theta_f^{-1}, \quad v_f = \sqrt{l_f}/l_f, \quad \tilde{f}(s) = \left(\frac{\theta_f}{s + \theta_f}\right)^{l_f}.\end{aligned}$$

Тогда из (1.39) нестационарные вероятности модели $\langle M_{2<6}|Erl|1\rangle$ для сценария полного ремонта примут вид

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_0(s) &= (5\alpha + s) \cdot \delta^{-1}, \\ \tilde{\pi}_1(s) &= 6\alpha(1 - \theta_b^{l_b}(5\alpha + s + \theta_b)^{l_b}) \cdot \delta^{-1}, \\ \tilde{\pi}_2(s) &= 30\alpha^2(1 - \theta_b^{l_b}(5\alpha + s + \theta_b)^{l_b})(1 - \theta_f^{l_f}(5\alpha + s + \theta_f)^{-l_f}) \cdot (s\delta)^{-1}, \\ \delta &= s(5\alpha + s) + 6\alpha(1 - \theta_b^{l_b}(5\alpha + s + \theta_b)^{-l_b})(s + 5\alpha(1 - \theta_f^{l_f}(5\alpha + s + \theta_f)^{-l_f})).\end{aligned}$$

Параметры распределения Эрланга будут определяться как

$$l_b = v_b^{-2}, \quad \theta_b = (bv_b^2)^{-1},$$

$$l_f = v_f^{-2}, \quad \theta_f = (bv_f^2)^{-1},$$

с последующей подстановкой фиксированных средних и коэффициентов вариации.

Анализ чувствительности нестационарных вероятностей состояний модели 2-из-6 с частичным восстановлением в разделе 2.2.1 показал, что для заданного закона распределения времени ремонта компонентов, $B(t) \sim Erl$, при $t \rightarrow \infty$ сохраняется низкая чувствительность этих характеристик к коэффициенту вариации времени ремонта компонентов v_b . Так как длительности ремонта компонентов и системы в случае сценария полного восстановления различны, рассмотрим некоторые комбинации распределения Эрланга с разными коэффициентами вариации для этих времен.

Исследуем чувствительность нестационарных вероятностей состояний системы к значениям коэффициентов вариации времени ремонта компонентов v_b и системы v_f . Пусть интенсивность отказа двигателя из-за перегрева достаточно мала относительно фиксированного среднего времени ремонта b , $\alpha = 0,1$, среднее время охлаждения одного двигателя (восстановления) $b = 1$, среднее время восстановления всей системы после отказа $f = 2$. При этом коэффициенты вариации длительностей восстановления $v_b, v_f = 1; 0,5$. Условное время наблюдения за поведением гексакоптера лежит в интервале $t = [0, 8]$. На рис. 2.4 показаны нестационарные вероятности $\pi_i(t)$, $i = 0,1,2$, модели 2-из-6 при сценарии полного ремонта системы в масштабе среднего времени восстановления компонентов.

Описание рис. 2.4 следующее:

- легенда рисунка обозначает тип линии разных вероятностей; простая линия соответствует вероятности $\pi_0(t)$, штриховая – вероятности $\pi_1(t)$, штрихпунктирная – вероятности $\pi_2(t)$;
- чёрный цвет соответствует $v_b = v_f = 1$ (формулы (2.10));
- синий – $v_b = v_f = 0,5$;
- красный – $v_b = 0,5, v_f = 1$;
- зелёный – $v_b = 1, v_f = 0,5$.

График демонстрирует аналогичное поведение системы по сравнению со случаем частичного восстановления (см. рис. 2.3). Вероятность того, что все двигатели системы не

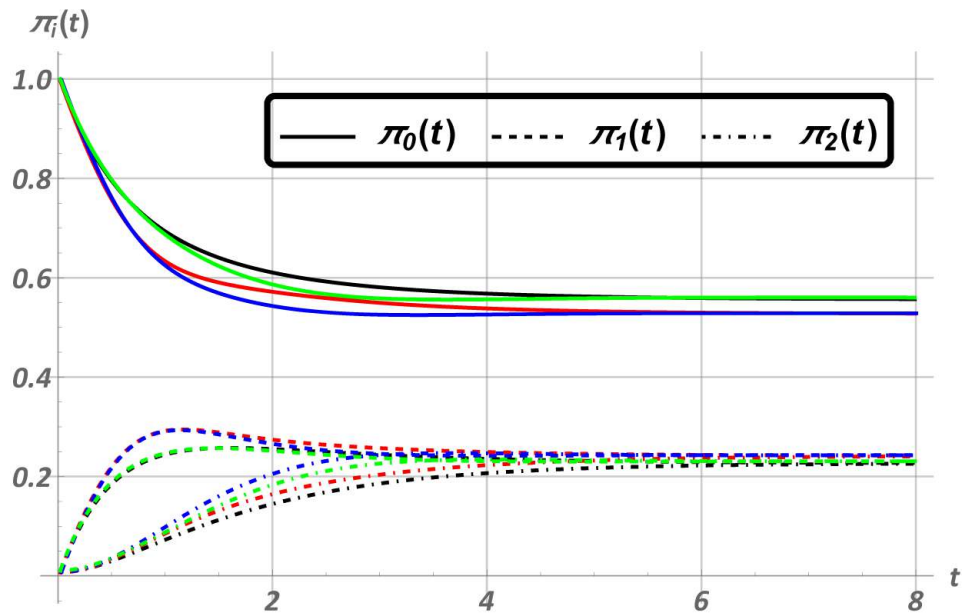


Рисунок 2.4 — Нестационарные вероятности состояний модели $\langle M_{2<6} | Erl|1 \rangle$ с полным восстановлением

отказали, достаточно высока на всём интервале t и остаётся таковой, так как она становится независимой от времени уже при $t > 5$ < среднее в.б.р. двигателей. При этом вероятность $\pi_0(t)$ с ростом t для случаев, когда $v_b = 0,5$ (синяя и красная кривые), принимает меньшее значение по сравнению с большим значением v_b (чёрная и зелёная кривые). Наблюдается низкая чувствительность этой характеристики к изменению значения коэффициента вариации времени ремонта компонентов при заданных средних и распределении Эрланга времени восстановления. Вероятности $\pi_0(t)$, $\pi_1(t)$ и $\pi_2(t)$ с ростом времени t переходят в стационарный режим. Несмотря на изменение параметров v_b и v_f принимают близкие значения для каждой вероятности соответственно.

Численные примеры исследования нестационарных вероятностей состояний показывают, что разные значения v_b слабо влияют на поведение нестационарных вероятностей состояний модели 2-из-6 при $t \rightarrow \infty$. Очевидно, что значение коэффициента вариации v_f времени ремонта систем при $t \rightarrow \infty$ не влияет на поведение системы. Анализ влияния коэффициента вариации v_b времени ремонта компонентов будет рассмотрен далее при исследовании стационарных характеристик системы.

2.2.3 Функция надёжности и среднее в.б.р. системы

Важной нестационарной характеристикой надёжности любой системы является её функция надёжности, т.е. вероятность её безотказной работы во времени. Из этой характеристики легко получить среднее в.б.р. системы. Продолжим исследование надёжности гексакоптера, отказ которого наступает при отказе двух его двигателей.

Вычисление функции надёжности модели 2-из- n с произвольной ф.р. времени ремонта компонентов. Рассмотрим поведение системы до её первого отказа. На основе Алгоритма 1.3 рассмотрим частный случай системы при $k = 2$. Тогда соответствующая система дифференциальных уравнений для вычисления функции надёжности модели 2-из- n принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t,x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t;x) &= -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x), \\ \frac{d}{dt}\pi_2(t) &= \lambda_1 \int_0^t \pi_1(t,x)dx, \end{aligned} \quad (2.11)$$

вместе с начальным

$$\pi_0(0) = 1, \quad (2.12)$$

граничными условиями

$$\pi_1(t,0) = \lambda_0\pi_0(t). \quad (2.13)$$

Следуя Алгоритму 1.3, решением второго уравнения системы (2.11) является

$$\pi_1(t,x) = h(t-x)e^{-\lambda_1 x}(1-B(x)).$$

Применим граничное условие (2.13), откуда получаем

$$\pi_1(t,0) \equiv h(t) = \lambda_0\pi_0(t) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{h}(s) = \lambda_0\tilde{\pi}_0(s).$$

Из первого уравнения (2.11) с применением начального условия (2.12) следует

$$s\tilde{\pi}_0(s) - 1 = -\lambda_0\tilde{\pi}_0(s) + \tilde{h}(s)\tilde{b}(s + \lambda_1),$$

и поэтому с учётом выражения для $\tilde{h}(s)$ следует

$$\tilde{\pi}_0(s) = (s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)))^{-1}.$$

Из последнего уравнения системы (2.11) с учётом выражения для $\tilde{h}(s)$ получаем

$$s\pi_2(s) = \lambda_1 \frac{1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)}{s + \lambda_1} \tilde{h}(s) = \frac{\lambda_0\lambda_1(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)))}.$$

Последнее выражение есть ПЛ п.р. длительности до первого отказа системы $\tilde{w}(s)$,

$$\tilde{w}(s) = \frac{\lambda_0\lambda_1(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1))}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)))},$$

откуда функция надёжности $R(t)$ в терминах ПЛ вычисляется как

$$\tilde{R}(s) = \frac{1}{s} \left[1 - \tilde{w}(s) \right] = \frac{s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)) + \lambda_1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)))}, \quad (2.14)$$

с помощью которой вычисляем среднее в.б.р. системы

$$\mathbb{E}[T] = \tilde{R}(0) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_0(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}.$$

Окончательный вид функции надёжности можно получить перейдя к обратному ПЛ в выражении (2.14). Однако это удастся сделать лишь в некоторых частных случаях распределения времени восстановления компонентов. Для произвольного распределения времени ремонта можно лишь показать, что функция надёжности имеет вид смеси показательных функций.

С помощью метода неопределённых коэффициентов разложим функцию надёжности (2.14) на простейшие дроби,

$$\tilde{R}(s) = \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \left[\frac{s_2}{s - s_1} - \frac{s_1}{s - s_2} \right], \quad (2.15)$$

где

$$s_1 = -\lambda_1, \quad s_2 = -\lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)).$$

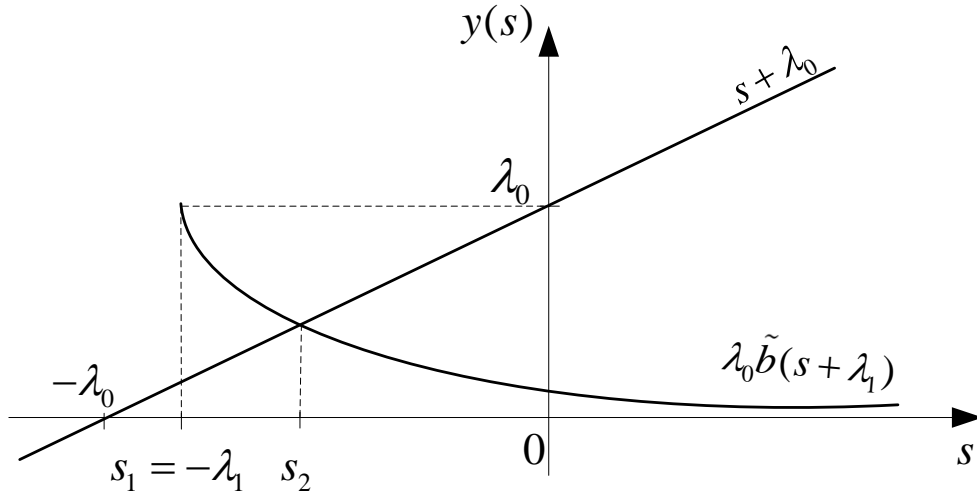
Второй корень характеристического уравнения в явном виде выписать не удаётся, так как функция распределения времени восстановления произвольная. Однако графически можно показать, что он существует. Очевидно, что корни характеристического уравнения, получаемого из знаменателя выражения (2.14), вычисляются следующим образом,

$$s + \lambda_1 = 0 \quad \text{или} \quad s + \lambda_0(1 - \tilde{b}(s + \lambda_1)) = 0,$$

откуда из второго равенства получаем,

$$s + \lambda_0 = \lambda_0 \tilde{b}(s + \lambda_1). \quad (2.16)$$

Графическое представление этого выражения продемонстрировано на рис. 2.5. Функция $s + \lambda_0$ представляет собой прямую, пересекающую ось абсцисс в точке $-\lambda_0$ и ось ординат в точке λ_0 . Преобразование Лапласа $\tilde{b}(s + \lambda_1)$ является вполне монотонной функцией [90], следовательно, она же является выпуклой вниз функцией со сдвигом по оси абсцисс в точке $-\lambda_1$ и по оси ординат в λ_0 . Таким образом, корень уравнения s_2 есть пересечение двух кривых, он существует и лежит в пределах $s_2 \in (-\lambda_1, 0)$.

Рисунок 2.5 — Графическое представление корня s_2

Тогда переходя к обратному ПЛ в выражении (2.15), функция надёжности модели $\langle M_{2 < n} | GI | 1 \rangle$ будет иметь вид смеси двух показательных функций,

$$R(t) = \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot \left[s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t} \right] \quad (2.17)$$

где $s_1 = -\lambda_1$, а корень s_2 вычисляется численно для конкретной ф.р. времени ремонта компонентов.

Рассмотрим частный случай распределения времени ремонта компонентов, а именно $B \sim Exp(\beta)$.

Следствие 2.1. Функция надёжности $R(t)$ и среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2 < n} | M | 1 \rangle$ с экспоненциальным распределением в.б.р. и ремонта вычисляются как

$$R(t) = 1 - \frac{n(n-1)\alpha^2}{s_1 - s_2} \cdot \left[\frac{1 - e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{1 - e^{s_1 t}}{s_1} \right], \quad \mathbb{E}[T] = \frac{\beta + \alpha(2n-1)}{n(n-1)\alpha^2},$$

где

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\alpha(2n-1) - \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta(2n-1) + \beta^2} \right].$$

Доказательство. Пусть длительность ремонта компонентов имеет экспоненциальное распределение с параметром β , тогда $\tilde{b}(s) = \frac{\beta}{s + \beta}$. Воспользуемся результатами вычисления функции надёжности с помощью алгоритма 1.3 и применим обратную замену $\lambda_i = (n-i)\alpha$, $i = 0, 1$, тогда

$$\tilde{w}(s) = \frac{n(n-1)\alpha^2}{s^2 + s(\beta + \alpha(2n-1)) + n(n-1)\alpha^2}. \quad (2.18)$$

Разложим выражение (2.18) на простейшие дроби:

$$\tilde{w}(s) = \frac{n(n-1)\alpha^2}{s_1 - s_2} \cdot \left[\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right],$$

где s_1, s_2 – корни характеристического уравнения ($s_2 < s_1 < 0$):

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\alpha(2n-1) - \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta(2n-1) + \beta^2} \right].$$

Применяя обратное ПЛ, получим п.р. в.б.р. системы:

$$w(t) = \frac{n(n-1)\alpha^2}{s_1 - s_2} \cdot \left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right].$$

Так как

$$R(t) = \mathbb{P}\{T > t\} = 1 - \mathbb{P}\{T \leq t\} = 1 - W(t),$$

где $W(t) = \int_0^t w(u)du$, то функция надёжности может быть вычислена как

$$R(t) = 1 - \int_0^t w(u)du = 1 - \frac{n(n-1)\alpha^2}{s_1 - s_2} \cdot \left[\frac{1 - e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{1 - e^{s_1 t}}{s_1} \right],$$

а средняя продолжительность безотказной работы $\mathbb{E}[T]$ системы

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty (1 - W(t))dt = \frac{\beta + \alpha(2n-1)}{n(n-1)\alpha^2}.$$

Этот же результат можно получить путём подстановки ПЛ плотности экспоненциального распределения в выражение (2.16) и последующей подстановки вычисленных корней характеристического уравнения в выражение (2.17).

Таким образом, с помощью прямого вывода функции надёжности из выражений нестационарных вероятностей состояний показано, что функция надёжности модели 2-из- n с экспоненциальным распределением в.б.р. и ремонта имеет вид смеси двух показательных функций. ■

Ранее аналогичные результаты были получены для различных резервированных систем, в частности Б.В. Гнеденко для дублированной системы облегчённого резервирования с простейшим потоком отказов и произвольно распределенной длительностью ремонта при быстром восстановлении [91; 92] с помощью теории регенерирующих случайных процессов, а также А.Д. Соловьёвым для случая ненагруженного резервирования с произвольно распределенными длительностями безотказной работы и восстановления компонентов [93] с помощью теории аналитических функций.

Оценка скорости сходимости характеристик надёжности к показательному распределению при быстром восстановлении также рассматривались многими исследователями [94; 95]. Ниже представлено исследование скорости сходимости функции надёжности модели 2-из- n в масштабе её среднего в.б.р. к показательной.

Исследование сходимости функции надёжности к показательной. Для частного случая модели k -из- n можно оценить и доказать сходимость функции надёжности к показательной в масштабе её среднего в.б.р. Для произвольного k такую процедуру проделать аналитически достаточно сложно.

Исследуем функцию надёжности модели 2-из- n в масштабе среднего времени её безотказной работы. Обозначим $\rho = \frac{\beta}{\alpha}$ – относительную скорость восстановления компонентов системы. Продолжим исследование на примере модели $\langle M_{2 < n} | M | 1 \rangle$.

Теорема 2.1. При $\rho = \frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \infty$ имеет место равномерная сходимость функции надёжности модели 2-из- n в масштабе её среднего в.б.р.: $\hat{R}(t) \rightarrow e^{-t}$, причём скорость сходимости имеет порядок ε :

$$|\hat{R}(t) - e^{-t}| < \varepsilon,$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{n(n-1)}{(\rho + 2n - 1)^2}.$$

Доказательство. Выпишем ПЛ плотности распределения в.б.р. системы (2.18) в масштабе её среднего в.б.р.:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(s/\mathbb{E}[T]) &= \frac{n(n-1)\alpha^2}{s^2 \left(\frac{n(n-1)\alpha^2}{\beta + \alpha(2n-1)} \right)^2 + n(n-1)\alpha^2 s + n(n-1)\alpha^2} = \\ &= \frac{1}{s^2 \frac{n(n-1)\alpha^2}{(\beta + \alpha(2n-1))^2} + s + 1} = \frac{1}{\varepsilon s^2 + s + 1}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\varepsilon = \frac{n(n-1)\alpha^2}{(\beta + \alpha(2n-1))^2} = \frac{n(n-1)}{(\rho + 2n - 1)^2} \rightarrow 0$ для любых $n > 1$ при $\rho \rightarrow \infty$. Разложим выражение (2.19) на простейшие дроби при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда

$$\tilde{w}(s/\mathbb{E}[T]) = \frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon}} \left(\frac{1}{s-s'_2} - \frac{1}{s-s'_1} \right), \quad (2.20)$$

где $s'_1, s'_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$ – корни характеристического уравнения. Раскладывая слагаемое $\sqrt{1-4\varepsilon}$ в ряд Тейлора, $\sqrt{1-4\varepsilon} \approx 1 - 2\varepsilon$, корни уравнения примут значения:

$$\begin{aligned} s'_1 &= \frac{-1 - (1 - 2\varepsilon)}{2\varepsilon} + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty, \\ s'_2 &= \frac{-1 + (1 - 2\varepsilon)}{2\varepsilon} + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -1. \end{aligned}$$

Тогда переходя к обратному ПЛ в (2.20) получаем

$$\hat{w}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4\varepsilon}} \left(e^{s'_2 t} - e^{s'_1 t} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-t}. \quad (2.21)$$

С помощью (2.21) по определению $\hat{R}(t) = 1 - \hat{W}(t \cdot \mathbb{E}[T])$ вычислим функцию надёжности в новом масштабе времени:

$$\hat{R}(t) = 1 - \hat{W}(t \cdot \mathbb{E}[T]) = 1 - \int_0^t \hat{w}(u) du = \frac{s'_1(1 - e^{s'_2 t} + s'_2 \sqrt{1 - 4\varepsilon}) - s'_2(1 - e^{s'_1 t})}{s'_1 s'_2 \sqrt{1 - 4\varepsilon}}.$$

Поставив полученные корни s'_1, s'_2 , функция надёжности системы в масштабе её среднего значения принимает вид:

$$\hat{R}(t) = \frac{e^{-\frac{(1+\sqrt{1-4\varepsilon})t}{2\varepsilon}}}{2\sqrt{1-4\varepsilon}} \left[\sqrt{1-4\varepsilon} + (1 + \sqrt{1-4\varepsilon}) e^{\frac{\sqrt{1-4\varepsilon}t}{\varepsilon}} - 1 \right], \quad (2.22)$$

что при разложении $\varepsilon \rightarrow 0$ даёт

$$\hat{R}(t) = \frac{e^{-t}}{1-2\varepsilon} - \frac{\varepsilon e^{-t}}{1-2\varepsilon} - \frac{\varepsilon e^{-\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon}t}}{1-2\varepsilon} + o(\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-t}. \quad (2.23)$$

Таким образом, формула (2.23) показывает, что предельное выражение для функции надёжности в масштабе её среднего в.б.р. есть e^{-t} и обеспечивает равномерную оценку скорости сходимости к этому предельному выражению.

Для получения равномерной абсолютной оценки скорости сходимости рассмотрим:

$$\begin{aligned} \left| \hat{R}(t) - e^{-t} \right| &= \left| \frac{e^{-\frac{(1+\sqrt{1-4\varepsilon})t}{2\varepsilon}}}{2\sqrt{1-4\varepsilon}} \left(\sqrt{1-4\varepsilon} + (1 + \sqrt{1-4\varepsilon}) e^{\frac{\sqrt{1-4\varepsilon}t}{\varepsilon}} - 1 \right) - e^{-t} \right| = \\ &= \left| \frac{e^{-t}}{1-2\varepsilon} - \frac{\varepsilon e^{-t}}{1-2\varepsilon} - \frac{\varepsilon e^{-t+t(2-1/\varepsilon)}}{1-2\varepsilon} - e^{-t} + o(\varepsilon^2) \right| \leq \\ &\leq \left| e^{-t} \left(\frac{1}{1-2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} - 1 \right) \right| = \left| e^{-t} \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку $e^{-t} \leq 1$, то окончательно имеем:

$$\left| \hat{R}(t) - e^{-t} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} < \varepsilon.$$

Ч.т.д. ■

В качестве графического представления результатов теоремы 2.1 рассмотрим равномерную сходимость $\hat{R}(t) - e^{-t}$ в масштабе среднего в.б.р. модели 2-из-6 к предельной функции e^{-t} при разных значениях относительной скорости восстановления ρ . Для построения графика определим $\rho = 1, 5, 10, 100$ (см. рис. 2.6).

Из рисунка видно, что отклонение кривых не превышает ε и с ростом ρ стремится к нулю по всем значениям $\frac{t}{\mathbb{E}T}$. Значения ε для каждого случая представлены в таблице 1.

Таблица 1 — Значения ε с ростом параметра ρ

	$\rho = 1$	$\rho = 5$	$\rho = 10$	$\rho = 100$
ε	0,208333	0,117188	0,068027	0,002435

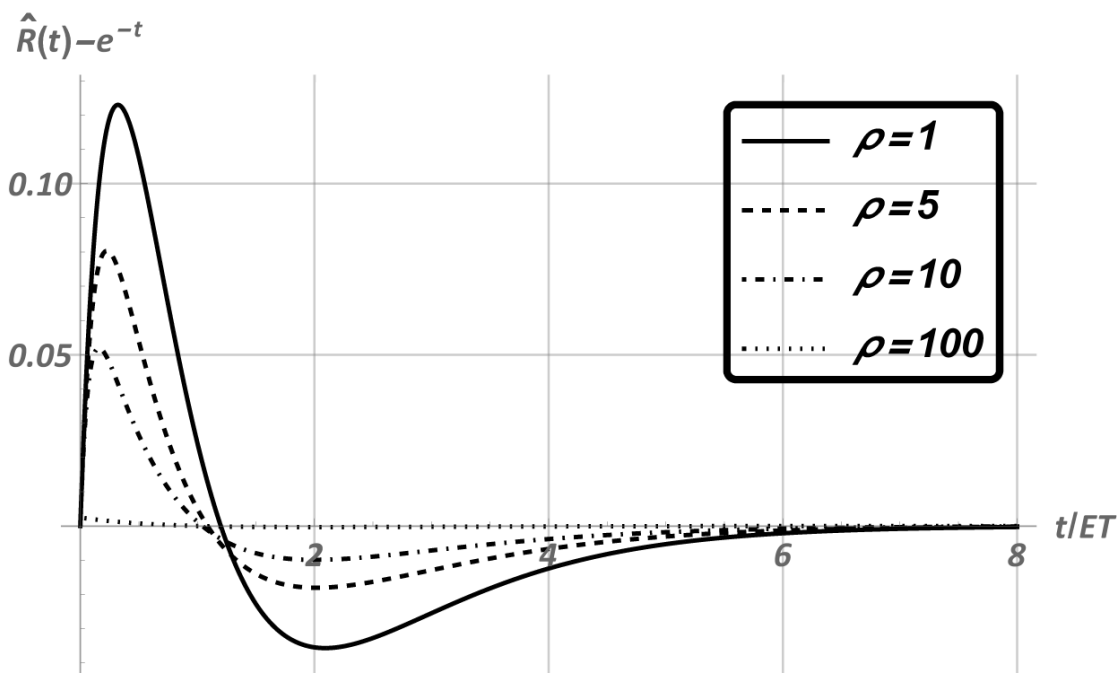


Рисунок 2.6 — Равномерная сходимость функции надёжности $\hat{R}(t)$ модели 2-из-6 в масштабе её среднего в.б.р. к предельной функции e^{-t} с ростом ρ

Численный пример. Алгоритм вычисления функции надёжности и полученная с помощью него формула (2.14), представленные выше, позволяют исследовать эту вероятность при произвольном распределении времени восстановления компонентов.

Исследуем чувствительность функции надёжности к коэффициенту вариации времени ремонта компонентов в масштабе среднего в.б.р. системы на примере гексакоптера (модель 2-из-6). Для численного исследования рассмотрим, как и прежде, модель $\langle M_{2<6} | Erl|1 \rangle$ (описание распределения Эрланга и его параметров то же, что и в разделе 2.2.1). ПЛ функции надёжности и среднее в.б.р. такой системы выражаются как

$$\tilde{R}(s) = \frac{6\alpha\theta^l + (s + 11\alpha)(s + 5\alpha\theta)^l}{(s + 5\alpha)(-6\alpha\theta^l + (s + 6\alpha)(s + 5\alpha\theta)^l)},$$

$$\mathbb{E}[T] = \frac{6\theta^l - 11(s + 5\alpha\theta)^l}{30\alpha(\theta^l - (s + 5\alpha\theta)^l)}.$$

Рассмотрим два случая: пусть среднее время до отказа двигателей $a = 1$ и $a = 10$, среднее время их ремонта $b = 1$, относительная скорость восстановления равна соответственно $\rho = \frac{\beta}{\alpha} = 1$ и $\rho = 10$, коэффициент вариации времени ремонта $v_b = v = 1; 0,7; 0,5$. Здесь, как и ранее, принятые значения не являются абсолютными.

Рис. 2.7 демонстрирует функцию надёжности $R(t/\mathbb{E}[T])$ модели 2-из-6 в масштабе среднего времени до отказа системы, а также оценку $\hat{R}(t)$, полученную из формулы (2.22) путём подстановки соответствующих значений ρ .

Из рисунка видно, что функция надёжности системы в масштабе её среднего в.б.р. нечувствительна к значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов для распределения Эрланга. Кривые функции надёжности достаточно близки друг к другу для

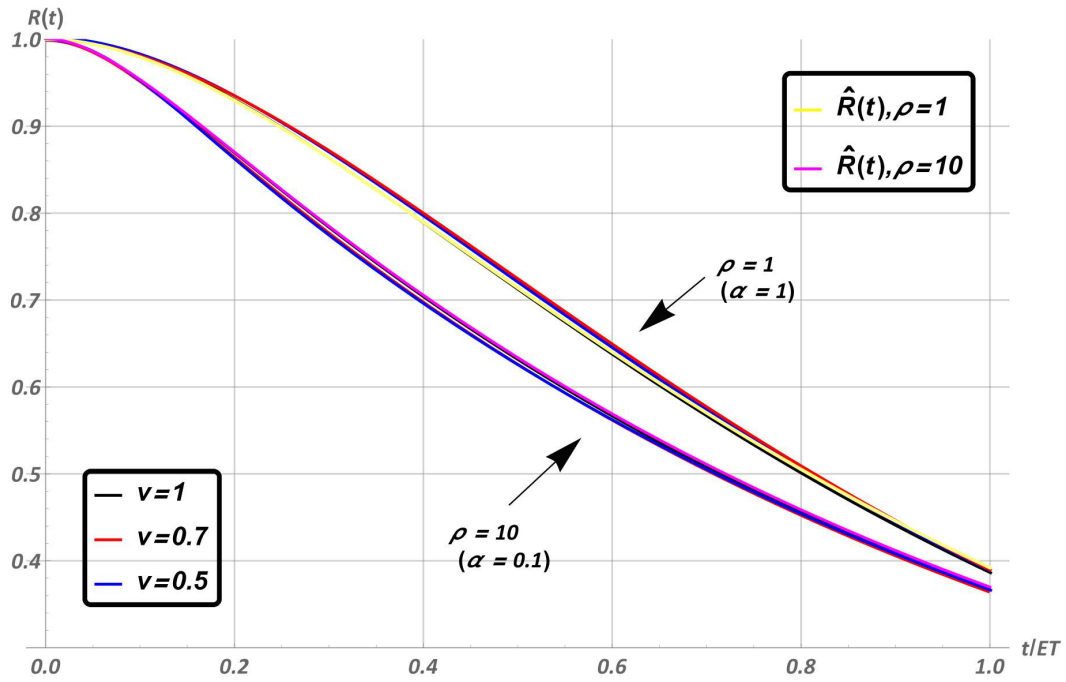


Рисунок 2.7 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6} | Erl|1 \rangle$ и её оценки $\hat{R}(t)$ в масштабе её среднего в.б.р.

каждого значения ρ , несмотря на разные значения v . Кроме того, оба эксперимента демонстрируют достаточно высокую точность с полученной оценкой $\hat{R}(t)$ при $\rho = 1$ и $\rho = 10$ (жёлтая и розовая кривые соответственно), поскольку кривые, соответствующие этим оценкам, близки к кривым, построенным численным методом.

Таблица 2 содержит соответствующие значения среднего в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$ для рассматриваемых случаев. Значения $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6} | Erl|1 \rangle$ демонстрируют чувствительность среднего в.б.р. системы к значению коэффициента вариации времени ремонта. Например, для $\rho = 1$ в.б.р. системы при $v = 1$ и $v = 0,5$ отличается не более чем на 0,026, что соответствует примерно 7%. При $\rho = 10$ среднее в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$ примерно в 17 раз больше по сравнению с $\rho = 1$. Динамика изменения значений $\mathbb{E}[T]$ одинакова для обоих случаев, уменьшение значения v приводит к уменьшению среднего в.б.р. системы.

Таблица 2 — $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6} | Erl|1 \rangle$

	$v = 0,5$	$v = 0,7$	$v = 1$
$\rho = 1$	0,373434	0,381481	0,4
$\rho = 10$	6,43611	6,62963	7

Заметим, что при $\alpha = 1$ надёжность модели в масштабе её среднего времени лежит в окрестности единицы дольше, чем при $\alpha = 0,1$, в то время как к единице среднего в.б.р. системы значения функции надёжности принимают близкие значения (см. рис. 2.7). Это приводит к необходимости рассмотрения такой характеристики как квантиль, $q_\gamma = R^{-1}(\gamma)$. Эта мера показывает, как долго система будет надёжной с фиксированной вероятностью. Она также может показать влияние коэффициента вариации времени ремонта компонентов на поведение системы в контексте исследования чувствительности.

Значения квантилей модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$ для $\rho = 1$ в масштабе среднего в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$ представлены в таблице 3. Значения квантилей демонстрируют низкую чувствительность к значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов. Кроме того, очевидно, что для всех значений v система работоспособна с вероятностью выше 90% при $t < 0,26$ в масштабе среднего в.б.р. системы.

Таблица 3 — Квантили функции надёжности в масштабе $\mathbb{E}[T]$ ($\rho = 1$)

	$v = 1$	$v = 0,7$	$v = 0,5$
$q_{0,999}$	0,0207	0,0217	0,0222
$q_{0,99}$	0,0681	0,0711	0,0726
$q_{0,9}$	0,2469	0,2551	0,2602

Квантили функции надёжности для $\rho = 10$ представлены в таблице 4. Значения в таблице подтверждает низкую чувствительность квантилей к значению v в масштабе её среднего в.б.р. При этом квантили q_γ при $\rho = 10$ меньше по сравнению со значениями в таблице 3. Здесь для всех значений v система работоспособна с вероятностью выше 90% при $t \approx 0,16$ в масштабе среднего в.б.р. системы.

Таблица 4 — Квантили функции надёжности в масштабе $\mathbb{E}[T]$ ($\rho = 10$)

	$v = 1$	$v = 0,7$	$v = 0,5$
$q_{0,999}$	0,0119	0,0125	0,0125
$q_{0,99}$	0,0405	0,0412	0,0421
$q_{0,9}$	0,1647	0,1613	0,1589

Таким образом, численный анализ функции надёжности модели 2-из-6 показал, что вероятность безотказной работы гексакоптера в масштабе его среднего в.б.р. сходится к показательному распределению при $\rho \rightarrow \infty$, что подтверждает аналитические результаты и говорит о нечувствительности функции надёжности модели 2-из-6 к значению коэффициента вариации времени ремонта при заданной ф.р. При этом среднее в.б.р. системы чувствительно к значению v , а квантили – слабо чувствительны к этой же характеристике.

2.3 Стационарные характеристики надёжности гексакоптера

Перейдём к исследованию стационарных характеристик надёжности гексакоптера на примере модели k -из-6. Исследование нестационарных вероятностей состояний модели показало, что при $t \rightarrow \infty$ эти характеристики сходятся к стационарным значениям. Поэтому будем считать, что БПЛА привязной высотной телекоммуникационной платформы функционирует длительное время и рассмотрим случай, когда отказ модуля наступает при отказе 3 его двигателей. Таким образом, ниже будет исследована модель 3-из-6.

Как и прежде, стационарные характеристики будут представлены для двух сценариев восстановления после отказа системы, для чего будут использованы результаты, полученные ранее в главе 1. В этом разделе также положим $v_b = v$.

2.3.1 Стационарные вероятности состояний модели 3-из-6 для сценария частичного ремонта

Вычисление стационарных вероятностей состояний модели 3-из-6 с произвольной ф.р. времени ремонта её компонентов. Согласно теореме 1.4 и выражениям (1.50) стационарные вероятности состояний процесса, описывающего модель 3-из- n для сценария частичного ремонта, вычисляются следующим образом,

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0} C_1 \tilde{b}(\lambda_1), \\ \pi_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_2 &= C_2 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} + S(1) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_3 &= C_3 \cdot b - C_2 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S(1) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1},\end{aligned}\tag{2.24}$$

где константы вычисляются рекуррентно из (1.51),

$$C_1 = C_2 \frac{\tilde{b}(\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}, \quad C_3 = C_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} S(1), \quad S(1) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} C_1.$$

Подставив $S(1)$ и C_1 в выражение для C_3 , получаем зависимость константы C_3 от C_2 ,

$$C_3 = C_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} C_1 = C_2 \left(1 - \frac{\lambda_2 \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))} \right).$$

Таким образом, подставив полученные константы в выражения стационарных вероятностей и применив $C = C_2$, получаем окончательный вид выражений (2.24),

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_0} \cdot \frac{\tilde{b}(\lambda_1) \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))} C, \\ \pi_1 &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\tilde{b}(\lambda_2)(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))} C, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_1(1 - \tilde{b}(\lambda_2)) - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1)))} C, \\ \pi_3 &= \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1) + \tilde{b}(\lambda_2))}{\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1))} b - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2 \tilde{b}(\lambda_2)(1 - \tilde{b}(\lambda_1))}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2(1 - \tilde{b}(\lambda_1)))} \right] C,\end{aligned}\tag{2.25}$$

где константа C вычисляется из условия нормировки, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$.

Выражения (2.25) для стационарных вероятностей при $n = 6$ с обратной заменой $\lambda_i = (n - i)\alpha$, $i = 0, 1, 2$, принимают вид,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \tilde{b}(5\alpha)}{\tilde{b}(5\alpha)} \pi_0, \\ \pi_2 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)}{\tilde{b}(5\alpha)\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \\ \pi_3 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{\tilde{b}(4\alpha)(21 - 80\alpha b + 4\tilde{b}(5\alpha)) - 5(1 - 4\alpha b)(1 + 4\tilde{b}(5\alpha))}{\tilde{b}(5\alpha)\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \\ \pi_0 &= \frac{\tilde{b}(4\alpha)\tilde{b}(5\alpha)}{6\alpha b(1 + 4\tilde{b}(5\alpha)) - \tilde{b}(4\alpha)(24\alpha b - \tilde{b}(5\alpha))},\end{aligned}\tag{2.26}$$

откуда коэффициент готовности вычисляется как

$$K_{av} = 1 - \pi_3 = \frac{15 + 2\tilde{b}(5\alpha)(30 - \tilde{b}(4\alpha)) - 63\tilde{b}(4\alpha)}{10(6\alpha b(1 + 4\tilde{b}(5\alpha)) - 4\tilde{b}(4\alpha)) + \tilde{b}(5\alpha)\tilde{b}(4\alpha)}.\tag{2.27}$$

При экспоненциальном распределении времени ремонта этот результат совпадает с соответствующими результатами, полученными путём решения уравнений баланса для процесса рождения и гибели. Таким образом, если $B(x) = 1 - e^{-xb^{-1}}$ и $\tilde{b}(\lambda_i) = (1 + \lambda_i b)^{-1}$, $i = 1, 2$, вероятности в марковском случае для стационарного режима примут вид

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{120\alpha^3 b^3 + 30\alpha^2 b^2 + 6\alpha b + 1}, \quad \pi_1 = \frac{6\alpha b}{120\alpha^3 b^3 + 30\alpha^2 b^2 + 6\alpha b + 1}, \\ \pi_2 &= \frac{30\alpha^2 b^2}{120\alpha^3 b^3 + 30\alpha^2 b^2 + 6\alpha b + 1}, \quad \pi_3 = \frac{120\alpha^3 b^3}{120\alpha^3 b^3 + 30\alpha^2 b^2 + 6\alpha b + 1}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Далее перейдём к анализу чувствительности и численным примерам.

Асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний модели 3-из-6 при редких отказах компонентов. На примере модели 3-из-6 покажем, что в условии редких отказов компонентов относительно среднего времени ремонта, стационарные вероятности состояний модели 3-из-6 при фиксированном среднем времени ремонта b компонентов не зависят от вида распределения времени ремонта.

Теорема 2.2. В условии редких отказов компонентов, когда $\alpha \rightarrow 0$, стационарные вероятности состояний и коэффициент готовности модели 3-из-6 для сценария частичного ремонта

системы принимают вид

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6\alpha(2b - 5\alpha b_2)}{2 - 5\alpha(2b - 5\alpha b_2)}\pi_0, \\
\pi_2 &\approx \frac{30\alpha^2 b_2}{(1 - 4\alpha(b - 2\alpha b_2))(2 - 5\alpha(2b - 5\alpha b_2))}\pi_0, \\
\pi_3 &\approx \frac{240\alpha^4 b_2^2}{(1 - 4\alpha(b - 2\alpha b_2))(2 - 5\alpha(2b - 5\alpha b_2))}\pi_0, \\
\pi_0 &\approx \frac{(1 - 4\alpha(b - 2\alpha b_2))(2 - 5\alpha(2b - 5\alpha b_2))}{2(1 - \alpha b(3 + 4\alpha b)) + \alpha^2 b_2(41 + 4(50 + 9\alpha b))}, \\
K_{av} &\approx \frac{2(1 - \alpha b(3 + 4\alpha b)) + \alpha^2 b_2(41 - 4(10 - 9\alpha b))}{2(1 - \alpha b(3 + 4\alpha b)) + \alpha^2 b_2(41 + 4(50 + 9\alpha b))}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение ПЛ п. р. времени ремонта $\tilde{b}(\lambda_i)$ в ряд Тейлора до второго порядка относительно α ,

$$\tilde{b}(\lambda_i) \approx 1 - \lambda_i b + \frac{\lambda_i^2 b_2}{2}, \quad i = 1, 2,$$

где b_2 – второй момент времени ремонта. Тогда выражения стационарных вероятностей состояний (2.26) примут следующий вид,

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right)}{1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}} \pi_0 \approx \frac{6(2\alpha b - 5\alpha^2 b_2)}{2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2} \pi_0, \\
\pi_2 &\approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 4\left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 5\left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2}\right)}{(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2})(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2})} \pi_0 \approx \\
&\approx \frac{30\alpha^2 b_2}{(1 - 4\alpha b + 8\alpha^2 b_2)(2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2)} \pi_0, \\
\pi_3 &\approx \frac{3}{10} \cdot \left[\frac{\left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2}\right) \left(21 - 80\alpha b + 4\left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right)\right)}{(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2})(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2})} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{5(1 - 4\alpha b) \left(1 + 4\left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right)\right)}{(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2})(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2})} \right] \pi_0 \approx \\
&\approx \frac{240\alpha^4 b_2^2}{(1 - 4\alpha b + 8\alpha^2 b_2)(2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2)} \pi_0, \\
\pi_0 &\approx \frac{\left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2}\right)}{6\alpha b(1 + 4\left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right)) - \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b_2}{2}\right) (24\alpha b - \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right))} \approx \\
&\approx \frac{(1 - 4\alpha b + 8\alpha^2 b_2)(2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2)}{2 - 6\alpha b - 8(\alpha b)^2 + 41\alpha^2 b_2 + 36\alpha^3 b b_2 + 200\alpha^4 b_2^2},
\end{aligned}$$

а коэффициент готовности из формулы (2.27) равен

$$\begin{aligned} K_{av} &= 1 - \pi_3 \approx 1 - \frac{240\alpha^4 b_2^2}{2 - 6\alpha b - 8(\alpha b)^2 + 41\alpha^2 b_2 + 36\alpha^3 b b_2 + 200\alpha^4 b_2^2} \pi_0 \approx \\ &\approx \frac{2 - 6\alpha b - 8(\alpha b)^2 + 41\alpha^2 b_2 + 36\alpha^3 b b_2 - 40\alpha^4 b_2^2}{2 - 6\alpha b - 8(\alpha b)^2 + 41\alpha^2 b_2 + 36\alpha^3 b b_2 + 200\alpha^4 b_2^2}. \end{aligned}$$

Упростив представленные выражения, получаем формулы (2.29). При этом условие нормировки для асимптотических выражений вероятностей состояний

$$\begin{aligned} \pi_0 \left(1 + \frac{6(2\alpha b - 5\alpha^2 b_2)}{2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2} + \frac{30\alpha^2 b_2 + 240\alpha^4 b_2^2}{(1 - 4\alpha b + 8\alpha^2 b_2)(2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2)} \right) &= 1, \\ \pi_0 \cdot \frac{2 - 6\alpha b - 8(\alpha b)^2 + 41\alpha^2 b_2 + 36\alpha^3 b b_2 + 200\alpha^4 b_2^2}{(1 - 4\alpha b + 8\alpha^2 b_2)(2 - 10\alpha b + 25\alpha^2 b_2)} &= 1 \end{aligned}$$

при подстановке выражения для π_0 выполняется. Таким образом, полученные выражения показывают, что вид ф.р. времени ремонта влияет на стационарные вероятности состояний с точностью до второго момента времени ремонта компонентов. Ч.т.д. ■

Численные примеры и анализ чувствительности коэффициента готовности K_{av} модели 3-из-6. Исследуем с помощью численных примеров чувствительность коэффициента готовности (стационарная вероятность безотказной работы) гексакоптера к виду распределения времени ремонта его компонентов. В качестве распределений времени ремонта будут рассматриваться следующие функции и их параметры:

– Гамма ($\Gamma(l, \theta)$)

$$b(t) = \frac{\theta^l}{\Gamma(l)} t^{l-1} e^{-\theta t}, \quad t > 0, \quad \tilde{b}(s) = \left(\frac{\theta}{s + \theta} \right)^l, \quad b = l \cdot \theta^{-1}, \quad v = \sqrt{l}/l;$$

– Гнеденко-Вейбулла ($GW(k, \lambda)$)

$$b(t) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-(t/\lambda)^k}, \quad t > 0, \quad \tilde{b}(s) = \frac{k}{\lambda^k} \int_0^\infty e^{-st - (t/\lambda)^k} t^{k-1} dt,$$

$$b = \lambda \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right), \quad v = \frac{\sqrt{\lambda^2 \cdot \Gamma(1 + 2/k) - b^2}}{b}.$$

Заметим, что при $v = 1$ представленные распределения становятся экспоненциальным со средним временем b . Тогда стационарные вероятности состояний системы совпадают с формулами (2.28).

Предположим, что среднее в.б.р. двигателей гексакоптера $a = 1$. Коэффициенты вариации времени ремонта компонентов следующие: $v = 0,1; 0,5; 1; 5; 10$. В качестве параметра модели рассмотрим значение

$$\rho = \frac{a}{b} = \frac{\text{среднее в.б.р.}}{\text{среднее время ремонта}},$$

что можно интерпретировать как относительную скорость восстановления системы. Таким образом, фиксируя параметры b и v подставим выбранные распределения и соответствующие ПЛ п. р. времени ремонта. На рис. 2.8 показано поведение коэффициента готовности K_{av} модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$ при различных распределениях времени ремонта и изменении его коэффициента вариации.

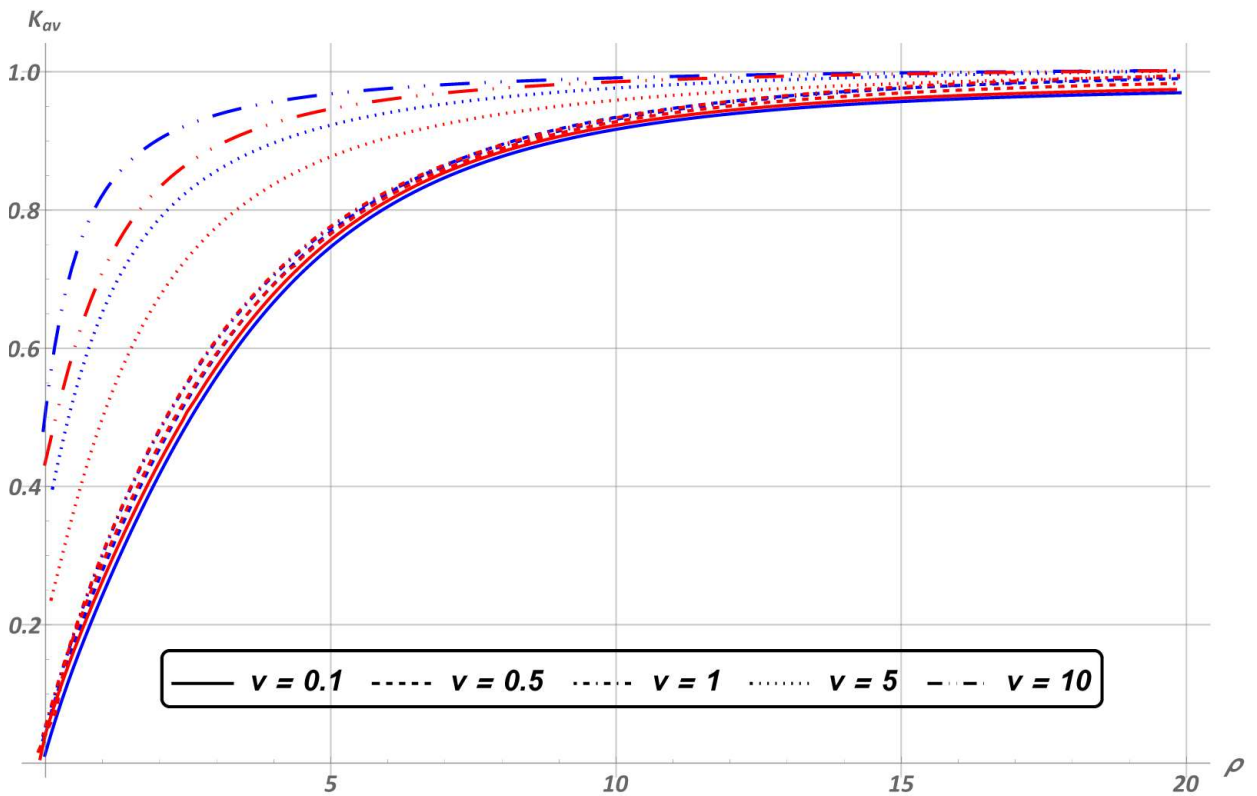


Рисунок 2.8 — K_{av} модели 3-из-6 с частичным восстановлением

Описание рис. 2.8 следующее:

- легенда рисунка обозначает тип линии с различным коэффициентом вариации v времени ремонта компонентов: простая линия соответствует $v = 0,1$, пунктирная – $v = 0,5$, штрихпунктирная линия соответствует $v = 1$, точечная линия – $v = 5$ и штриховая линия с двумя точками означает $v = 10$;
- синий цвет кривых соответствует K_{av} модели $\langle M_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$;
- красный – модели $\langle M_{3<6}|GW|1 \rangle$.

При $v = 1$ оба распределения времени ремонта демонстрируют марковский случай, то есть модель $\langle M_{3<6}|M|1 \rangle$.

Как видно из графика, поведение кривых коэффициента готовности K_{av} модели 3-из-6 одинаково несмотря на зависимость выражения (2.27) от вида распределения времени ремонта. При $\rho \rightarrow \infty$ коэффициент готовности асимптотически нечувствителен к виду этого распределения.

Согласно рисунку, наименьшее значение коэффициента вариации v времени ремонта приводит к наименьшему значению K_{av} на интервале $\rho = [0, 15]$. При этом различие между

кривыми коэффициента готовности при $v \leq 1$ минимально, что говорит о нечувствительности значения K_{av} к виду ф.р. времени ремонта, а также значению v .

Для случаев $v > 1$ нечувствительность K_{av} к значению коэффициента вариации v и виду ф.р. времени ремонта компонентов при малых значениях ρ не наблюдается. Большее значение v приводит к большему значению K_{av} . Тем не менее уже при $\rho \approx 10$ ($b = 0,1a$) представленный график демонстрирует нечувствительность стационарного коэффициента готовности K_{av} модели 3-из-6 к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта компонентов.

2.3.2 Стационарные вероятности состояний модели 3-из-6 для сценария полного ремонта

Аналогично рассмотрим стационарные вероятности гексакоптера в случае полного восстановления после отказа.

Вычисление стационарных вероятностей состояний модели 3-из-6 с произвольной ф.р. времени ремонта её компонентов. Согласно теореме 1.5 и выражениям (1.57) стационарные вероятности состояний модели для сценария полного восстановления принимают вид

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0} \left[C_1 \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \tilde{b}(\lambda_1) \right) - C_2 \tilde{b}(\lambda_2) \right], \\ \pi_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_2 &= C_2 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} + S(1) \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_3 &= C_3 \cdot f,\end{aligned}\tag{2.30}$$

где константы вычисляются рекуррентно из (1.58),

$$C_3 = \lambda_2 C_2 \left[\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} \right], \quad C_2 = -S(1), \quad S(1) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} C_1,$$

Подставив $S(1)$ и C_2 в выражение для C_3 , получаем зависимость константы C_3 от C_1 ,

$$C_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_1} \right] C_1.$$

Таким образом, подставив полученные константы в выражения стационарных вероятностей и применив $C = C_1$, получаем окончательный вид выражений (2.30),

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\lambda_0} C \left[1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\tilde{b}(\lambda_1) - 1) \right], \\ \pi_1 &= C \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} C \left[\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} \right], \\ \pi_3 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} C f \left[\frac{1 - \tilde{b}(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} \right],\end{aligned}\tag{2.31}$$

где константа C вычисляется из условия нормировки, $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$.

При $n = 6$ выражения (2.31) принимают следующий вид,

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \tilde{b}(5\alpha)}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, & \pi_2 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \\ \pi_3 &= \frac{6\alpha f(1 + 4\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha))}{1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha)} \pi_0, \\ \pi_0 &= \frac{10(1 + 5\tilde{b}(5\alpha) - 5\tilde{b}(4\alpha))}{37 + 60\alpha f - 25\tilde{b}(4\alpha)(5 + 12\alpha f) + 2\tilde{b}(5\alpha)(49 + 120\alpha f)},\end{aligned}\tag{2.32}$$

откуда коэффициент готовности равен

$$K_{av} = \frac{37 + 98\tilde{b}(5\alpha) - 125\tilde{b}(4\alpha)}{37 + 60\alpha f - 25\tilde{b}(4\alpha)(5 + 12\alpha f) + 2\tilde{b}(5\alpha)(49 + 120\alpha f)}.\tag{2.33}$$

При экспоненциальном распределении времени ремонта этот результат совпадает с соответствующими результатами, полученными путём решения уравнений баланса для процесса рождения и гибели. Таким образом, если $B(x) = 1 - e^{-xb^{-1}}$, где b – среднее время ремонта, и $\tilde{b}(\lambda_i) = (1 + \lambda_i b)^{-1}$, $i = 1, 2$, вероятности π_i и K_{av} примут вид

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{20\alpha^2 b^2 + 4\alpha b + 1}{120\alpha^3 b^2 f + 74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}, & \pi_1 &= \frac{24\alpha^2 b^2 + 6\alpha b}{120\alpha^3 b^2 f + 74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}, \\ \pi_2 &= \frac{30\alpha^2 b^2}{120\alpha^3 b^2 f + 74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}, & \pi_3 &= \frac{120\alpha^3 b^2 f}{120\alpha^3 b^2 f + 74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}, \\ K_{av} &= \frac{74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}{120\alpha^3 b^2 f + 74\alpha^2 b^2 + 10\alpha b + 1}.\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему разделу рассмотрим нечувствительность выражений стационарных вероятностей при сценарии редких отказах.

Асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний модели 3-из-6 при редких отказах компонентов. Для сценария полного ремонта системы по-

сле её отказа аналогично получены асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний модели 3-из-6.

Теорема 2.3. При редких отказах компонентов, когда $\alpha \rightarrow 0$, стационарные вероятности состояний и коэффициент готовности модели 3-из-6 для сценария полного ремонта системы принимают вид

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6\alpha(2b - 5\alpha b_2)}{2 - 5\alpha(2b - 9\alpha b_2)}\pi_0, \\
\pi_2 &\approx \frac{30\alpha^2 b_2}{2 - 5\alpha(2b - 9\alpha b_2)}\pi_0, \\
\pi_3 &\approx \frac{120\alpha^3 f b_2}{2 - 5\alpha(2b - 9\alpha b_2)}\pi_0, \\
\pi_0 &\approx \frac{2 - 5\alpha(2b - 9\alpha b_2)}{2(1 + \alpha b) + 5\alpha^2 b_2(9 + 24\alpha f)}, \\
K_{av} &\approx \frac{2 + \alpha(2b + 45\alpha b_2)}{2(1 + \alpha b) + 5\alpha^2 b_2(9 + 24\alpha f)}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Доказательство. Разложение в ряд Тейлора ПЛ п. р. времени ремонта $\tilde{b}(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$,

$$\tilde{b}(\lambda_i) \approx 1 - \lambda_i b + \frac{\lambda_i^2 b_2}{2}, \quad i = 1, 2,$$

позволяет получить следующие выражения из (2.32),

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\approx \frac{6}{5} \cdot \frac{1 - \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right)}{1 + 5 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 5 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)}\pi_0 \approx \frac{6(2\alpha b - 5\alpha^2 b_2)}{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2}\pi_0, \\
\pi_2 &\approx \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + 4 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right) - 5 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)}{1 + 5 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 5 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)}\pi_0 \approx \frac{30\alpha^2 b_2}{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2}\pi_0, \\
\pi_3 &\approx \frac{6\alpha f \left(1 + 4 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right) - 5 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)\right)}{1 + 5 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 5 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)}\pi_0 \approx \frac{120\alpha f \alpha^2 b_2}{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2}\pi_0, \\
\pi_0 &\approx \frac{10 \left(1 + 5 \left(1 - 5\rho^{-1} + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 5(1 - 4\alpha b)\right)}{37 + 60\alpha f - 25 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right) (5 + 12\alpha f) + 2 \left(1 - 5\rho^{-1} + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) (49 + 120\alpha f)} \approx \\
&\approx \frac{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2}{2 + 2\alpha b + 45\alpha^2 b_2 + 120\alpha^3 f b_2},
\end{aligned}$$

а коэффициент готовности равен

$$\begin{aligned}
K_{av} &\approx \frac{37 + 98 \left(1 - 5\rho^{-1} + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) - 125 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right)}{37 + 60\alpha f - 25 \left(1 - 4\alpha b + \frac{16\alpha^2 b^{(2)}}{2}\right) (5 + 12\alpha f) + 2 \left(1 - 5\alpha b + \frac{25\alpha^2 b_2}{2}\right) (49 + 120\alpha f)} \approx \\
&\approx \frac{2 + 2\alpha b + 45\alpha^2 b_2}{2 + 2\alpha b + 45\alpha^2 b_2 + 120\alpha^3 f b_2}.
\end{aligned}$$

Упростив представленные выражения, получаем формулы (2.29). При этом условие нормировки для асимптотических выражений вероятностей состояний

$$\pi_0 \left(1 + \frac{6(2ab - 5\alpha^2 b_2) + 30\alpha^2 b_2 + 120\alpha^3 f b_2}{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2} \right) = 1,$$

$$\pi_0 \cdot \frac{2 + 2\alpha b + 45\alpha^2 b_2 + 120\alpha^3 b b_2}{2 - 10\alpha b + 45\alpha^2 b_2} = 1$$

при подстановке выражения для π_0 выполняется. Таким образом, полученные выражения показывают, что вид ф.р. времени ремонта влияет на стационарные вероятности состояний с точностью до второго момента времени ремонта компонентов. Время полного восстановления представлено средним значением. Ч.т.д. ■

Численные примеры и анализ чувствительности коэффициента готовности K_{av} модели 3-из-6. Представим численное исследование нечувствительности стационарных характеристик рассматриваемой модели к виду ф.р. и значению коэффициента вариации времени ремонта компонентов. В качестве распределений времени ремонта рассмотрим используемые ранее M , Γ и GW распределения (см. описание параметров и соответствующих характеристик в разделе 2.3.1).

Предположим, что $a = 1$, $f = 2 \cdot b$, $v = 0,1; 0,5; 1; 5; 10$. В качестве параметра модели рассмотрим ρ (рис. 2.9). Описание рисунка аналогично примеру в случае частичного восстановления системы после отказа.

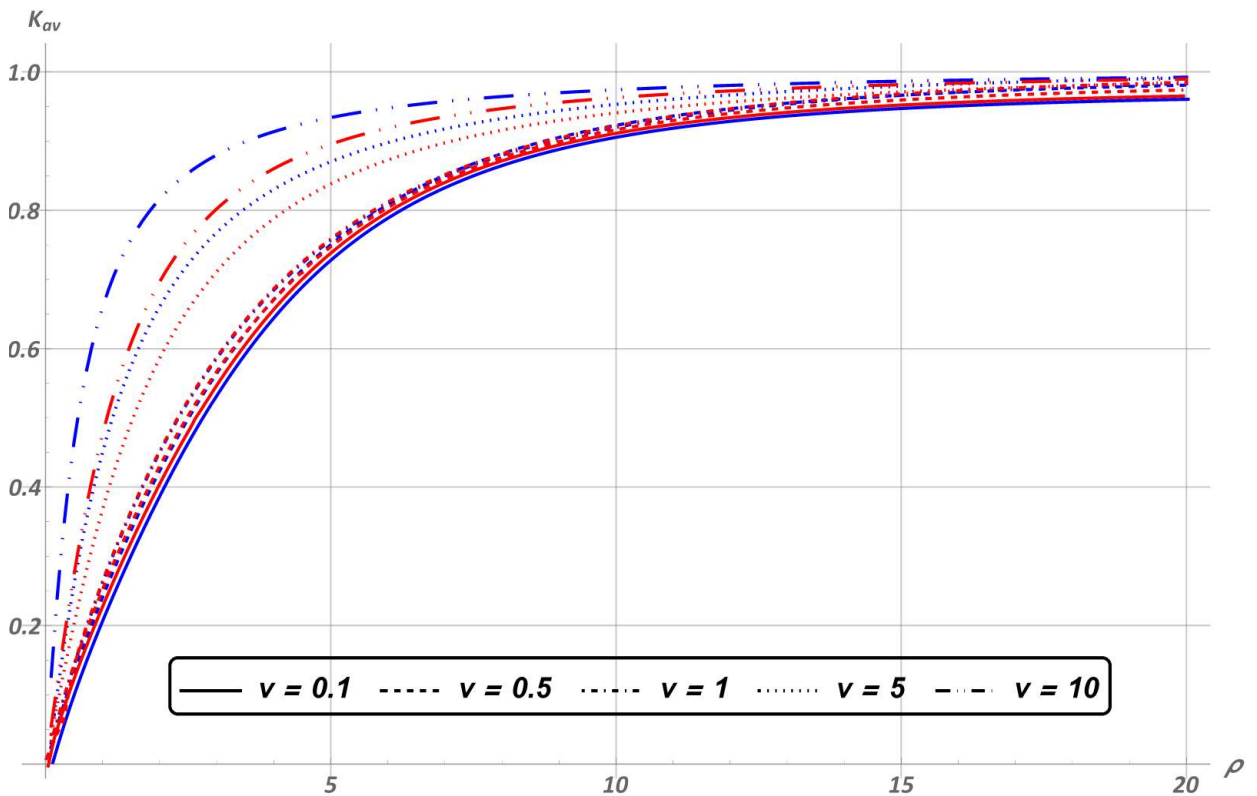


Рисунок 2.9 — K_{av} модели 3-из-6 с полным восстановлением

Согласно рис. 2.9 рассматриваемые распределения времени ремонта показывают одинаковое поведение кривых коэффициента готовности при $v \leq 1$. При $\rho \rightarrow \infty$ стационарная вероятность безотказной работы системы асимптотически нечувствительна к виду распределения времени ремонта, а также его коэффициенту вариации при фиксированном среднем времени ремонта. При $v > 1$ поведение кривых аналогично случаю частичного ремонта. При малых ρ , $v = 5$ и $v = 10$ кривые коэффициента готовности K_{av} моделей $\langle M_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$ и $\langle M_{3<6}|GW|1 \rangle$ достаточно быстро стремятся к 1 и при $\rho \approx 10$ принимают близкое расположение относительно других кривых.

Результаты, представленные в данном разделе, свидетельствуют о наличии асимптотической нечувствительности стационарной вероятности безотказной работы модели 3-из-6 с полным восстановлением к виду распределения времени ремонта и его коэффициенту вариации при фиксированном среднем и $\rho \rightarrow \infty$.

2.4 Заключение

В настоящей главе представлены результаты численного исследования и анализа чувствительности вероятностно-временных характеристик надёжности математической модели k -из- n мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы.

Рассмотрен сценарий работы гексакоптера, при котором платформа обеспечивает телекоммуникационное покрытие на некоторой местности. Предусматриваются два типа восстановления системы в случае прекращения её функционирования. В качестве возможных сценариев отказа и восстановления двигателей БПЛА рассмотрены ситуации их перегрева и охлаждения, а также профилактики перегрева, т.е. принудительное отключение двигателя, если его температура достигла близкого к критическому значения.

На основе представленных в главе 1 алгоритмов вычисления нестационарных вероятностей состояний и функции надёжности системы рассмотрено численное исследование этих характеристик на примере модели гексакоптера. Предполагается, что остановка функционирования двух двигателей гексакоптера приводит к сбою его работы. Для этой ситуации рассматривается математическая модель 2-из-6. В качестве ф.р. времени ремонта взято распределение Эрланга с различными значениями коэффициента вариации. Исследование показало наличие слабой чувствительности нестационарных характеристик модели 2-из-6 к значению коэффициента вариации времени ремонта как компонентов, так и всей системы. Графический анализ нестационарных вероятностей состояний также показал, что с ростом t система переходит в стационарный режим. Показано, что при произвольном распределении времени восстановления функция надёжности имеет вид смеси показательных функций. Рассмотрен случай экспоненциального распределения времени ремонта компонентов, для которого доказана равномерная сходимости функции надёжности в масштабе среднего

в.б.р. системы к показательному распределению. С помощью численных примеров продемонстрирована нечувствительность функции надёжности к значению коэффициента вариации с фиксированным средним при распределении Эрланга. Вычисленные среднее в.б.р. системы и квантили функции надёжности показали чувствительность и слабую чувствительность соответственно к значению коэффициента вариации времени восстановления при фиксированном среднем и распределении Эрланга времени ремонта.

Исследованы стационарные вероятности состояний гексакоптера, для которого применена модель 3-из-6. Представлены стационарные характеристики в случае двух сценариев ремонта системы после её отказа. Получены асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний и коэффициента готовности системы в условии редких отказов ($\alpha \rightarrow 0$). Численный анализ основан на применении распределений Гамма и Гнеденко-Вейбулла в качестве ф.р. времени восстановления компонентов. Графические результаты продемонстрировали нечувствительность стационарного коэффициента готовности модели 3-из-6 к виду ф.р. времени ремонта и его коэффициенту вариации при $\rho \rightarrow \infty$ (быстрое восстановление компонентов) для обоих сценариев восстановления системы после отказа.

Важность исследования чувствительности стационарных характеристик надёжности гексакоптера обусловлена тем, что исходная информация о в.б.р. и ремонта его двигателей зачастую ограничена одним или двумя моментами (среднее и дисперсия) при условии наличия статистических данных. При этом вид распределения этой информации неизвестен и может быть лишь оценен из имеющейся статистики. Результаты данной главы показали, что вероятность работоспособности (в стационарном режиме) мультироторного беспилотного модуля привязной высотной платформы нечувствительна к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта при относительной скорости восстановления компонентов системы $\rho = \frac{a}{b} > 10$. В то же время если среднее время охлаждения относительно среднего времени до критического повышения температуры (или перегрева) двигателя будет, например, в соотношении $b < 10\% \cdot a$, то необходимо учитывать значение дисперсии времени ремонта и её ф.р. для обоих случаев восстановления системы после полного отказа. С увеличением дисперсии вероятность работоспособности гексакоптера будет более высокой, но чувствительной к виду ф.р. времени ремонта при малых b относительно a .

Результаты исследования, представленные в этой главе, были опубликованы в работах [57; 60–65; 68–72].

В следующей главе с помощью имитационного моделирования представлено исследование чувствительности основных вероятностно-временных характеристик надёжности математической модели БПЛА привязной высотной телекоммуникационной платформы с произвольной ф.р. в.б.р. компонентов.

Глава 3. Имитационная модель системы k -из- n с произвольными исходными распределениями и её приложение к анализу надёжности гексакоптера

Главы 1,2 опираются на предположение о том, что в.б.р. отдельных компонентов системы имеет показательное распределение, $A \sim Exp(\alpha)$. В действительности на практике это утверждение не всегда верно из-за свойства «отсутствия памяти» у этой ф.р. Для анализа немарковских СМО прибегают к иным методам исследования, например, имитационным.

В настоящей главе представлены исследование и анализ чувствительности основных вероятностно-временных характеристик надёжности модели k -из- n для исследования работоспособности БПЛА привязной высотной телекоммуникационной платформы с произвольным распределением в.б.р. и ремонта компонентов. Для этой цели применено имитационное моделирование на основе метода дискретно-событийного моделирования. В диссертационной работе для моделирования исследуемой системы используется язык программирования Python.

3.1 Имитационное моделирование системы $\langle GI_{k<n}|GI|1 \rangle$

Метод дискретно-событийного моделирования является одним из широко распространённых методов имитационного моделирования стохастических систем надёжности с дискретным множеством состояний. Предложенная имитационная модель является универсальной, так как рассчитана на исследование модели k -из- n с произвольной архитектурой (параметры k и n), произвольными ф.р. в.б.р. и ремонта компонентов, двумя сценариями восстановления системы после отказа, возможностью исследования системы без покомпонентного восстановления. Кроме того, модель может быть модифицирована с учётом особенностей функционирования БПЛА, в том числе зависимость отказа системы от расположения отказавших компонентов и другие.

3.1.1 Общая процедура моделирования

Метод дискретно-событийного моделирования опирается на изменение состояний исследуемой системы во времени. Поэтому работа имитационной модели системы k -из- n управляется параметрами k и n , а также с.в. времени до отказа и ремонта компонентов. Алгоритм моделирования системы $\langle GI_{k<n}|GI|1 \rangle$ представлен с помощью блок-схемы на рис. 3.1. В таблице 5 представлены используемые в схеме обозначения.

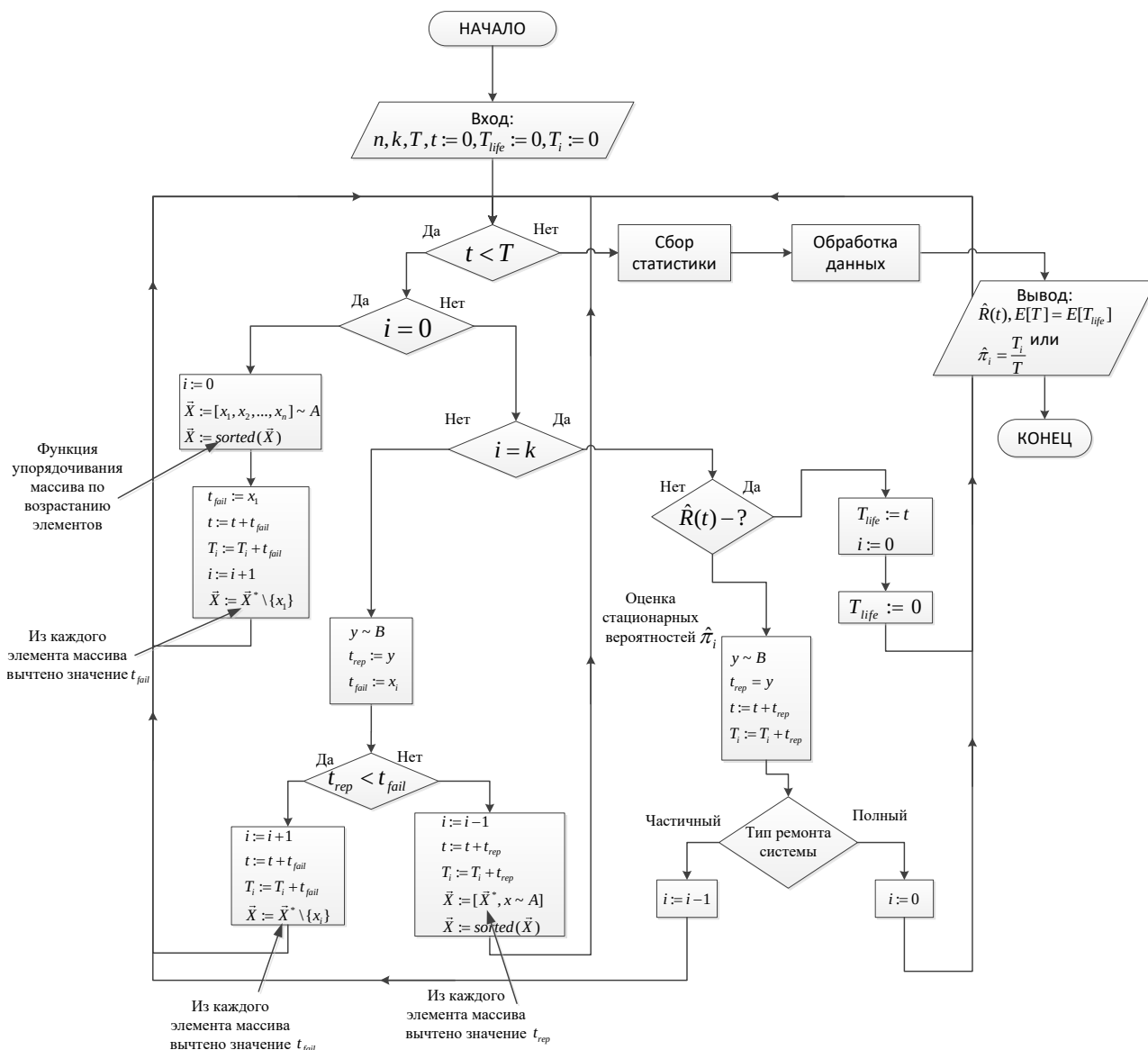


Рисунок 3.1 — Блок-схема имитационного моделирования

Представленный алгоритм позволяет вычислить оценки функции надёжности $\hat{R}(t)$ и среднего в.б.р системы $\hat{E}[T]$, а также распределения стационарных вероятностей состояний системы $\hat{\pi}_i$, и может быть модифицирован для оценки других вероятностно-временных характеристик надёжности модели, а также других сценариев её работы.

Основная сложность моделирования СМО с непоказательным распределением в.б.р компонентов в отличие от моделирования марковских СМО состоит в преодолении свойства «отсутствия памяти», то есть в отслеживании остаточного времени работы каждого компонента до его отказа с учётом времени до отказа другого уже вышедшего из строя компонента и проводимого над ним ремонта.

Опишем процедуру моделирования. На вход подаются параметры k, n , задаётся общее время моделирования T . Остальные переменные модели на начальном этапе приравниваются к нулю. Предполагается, что в начале наблюдения за моделью все её компоненты работоспособны (состояние $i = 0$), поэтому генерируем n с.в. A , взятых из непрерывного распределения

Таблица 5 — Обозначения

A	с.в. времени до отказа
B	с.в. времени ремонта
t	текущее время моделирования
T	общее время моделирования
T_{life}	в.б.р. системы
T_i	время пребывания в состоянии i
\vec{X}	вектор моментов отказов
y	момент окончания ремонта
t_{fail}	текущее время отказа
t_{rep}	текущее время ремонта

$A(t)$ со средним a и коэффициентом вариации в.б.р. компонентов v_a . Массив \vec{X} , состоящий из этих с.в., сортируется в порядке увеличения. Таким образом, компоненты вектора \vec{X} являются в.б.р. компонентов модели.

Первая компонента x_1 вектора \vec{X} есть время до отказа одного элемента модели, поэтому оно также является текущим временем моделирования t . Вектор \vec{X} изменяется таким образом, что все его компоненты сдвигаются на время x_1 (из каждой компоненты вектора \vec{X} вычитается значение x_1), после чего первая компонента, равная нулю, удаляется из массива. Теперь вектор \vec{X} состоит из $n - 1$ компонент.

В состоянии $i = \overline{1, k - 1}$ возможны два события: восстановления отказавшего компонента или отказ нового. Для моделирования этой ситуации генерируется с.в. B времени до окончания ремонта отказавшего компонента, взятого из непрерывного распределения $B(t)$ со средним b и коэффициентом вариации v_b . Далее сравниваются время до окончания ремонта $t_{rep} := B$ и время до отказа следующего компонента $t_{fail} := x_i$. Если $t_{rep} < t_{fail}$, то наступает отказ нового компонента, текущее время моделирования $t := t + t_{fail}$, новое состояние системы $i := i + 1$. Компоненты вектора \vec{X} снова сдвигаются на время отказа. В противном случае, $t_{rep} > t_{fail}$, тогда завершается ремонт отказавшего компонента, $t := t + t_{rep}$, новое состояние системы $i := i - 1$. Генерируется новое время до отказа компонента $x \sim A$ и добавляется в массив \vec{X} , который после этого шага сортируется.

Поведение системы в состоянии $i = k$ зависит от того, какая характеристика интересует исследователя. Если необходимо оценить функцию надёжности $\hat{R}(t)$, то в.б.р. системы «запоминается», а остальные временных параметры приравниваются к нулю, включая состояние системы. После чего цикл моделирования начинается заново.

Если необходимо оценить стационарные вероятности состояний системы $\hat{\pi}_i$, то в зависимости от рассматриваемого сценария восстановления системы после отказа будут проделаны следующие шаги. Для сценария частичного восстановления генерируется с.в. B времени до окончания ремонта отказавшего компонента, добавляется к модельному времени $t := t + t_{rep}$, после чего новое состояние системы $i := i - 1$. Для сценария полного ремонта генерируется время до окончания ремонта всей системы, после чего система переходит в состояние $i = 0$.

Таким образом происходит моделирование системы $\langle GI_{k < n} | GI | 1 \rangle$, до выполнения критерия остановки, т.е. пока текущее время моделирования t не достигнет заданного T , после

чего происходит обработка статистических данных, выводятся оценки интересующих вероятностно-временных характеристик, а также приводятся графические результаты, если это необходимо.

Рассмотрим реализацию предложенного алгоритма моделирования для исследования надёжности мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы с произвольным распределением в.б.р. и ремонта компонентов. Как и ранее в качестве БПЛА рассмотрим гексакоптер.

3.1.2 Исходные данные

Для проведения экспериментов с помощью имитационного моделирования во всех примерах, представленных в настоящей главе, были использованы следующие исходные данные, обозначения и предположения:

- общее время моделирования $T = 10^5$;
- число двигателей в гексакоптере $n = 6$;
- ф.р. в.б.р. и ремонта и их параметры с учётом среднего m и заданного коэффициента вариации v представлены в таблице 6, где α означает параметр формы, β – параметр масштаба, а μ и σ – среднее значение и стандартное отклонение логнормального распределения, полученные из соответствующего нормального распределения,

Таблица 6 — Распределения в.б.р. и времени ремонта компонентов и их параметры

	Гамма $\Gamma(\alpha, \beta)$	Гнеденко–Вейбулла $GW(\alpha, \beta)$	Логнормальное $LN(\mu, \sigma)$	Парето $P(k, \alpha)$
$v = 0,1$	$\alpha = 100,$ $\beta = 0,01m$	$\alpha = 12,1,$ $\beta = 1,04321m$	$\mu = \ln(0.995037m),$ $\sigma = 0,09975$	$k = 0,9095m,$ $\alpha = 11,0499$
$v = 0,5$	$\alpha = 4,$ $\beta = 0,25m$	$\alpha = 2,1,$ $\beta = 1,12906m$	$\mu = \ln(0.894427m),$ $\sigma = 0,47238$	$k = 0.690983m,$ $\alpha = 3.23607$
$v = 1$	$\alpha = 1,$ $\beta = m$	$\alpha = 1,$ $\beta = m$	$\mu = \ln(0.707107m),$ $\sigma = 0,83255$	$k = 0.585786m,$ $\alpha = 2.41421$
$v = 5$	$\alpha = 0,04,$ $\beta = 25m$	$\alpha = 0,31,$ $\beta = 0,12462m$	$\mu = \ln(0.196116m),$ $\sigma = 1,80502$	$k = 0.504902m,$ $\alpha = 2.0198$
$v = 10$	$\alpha = 0,01,$ $\beta = 100m$	$\alpha = 0,2332,$ $\beta = 0,02675m$	$\mu = \ln(0.0995037m),$ $\sigma = 2,14828$	$k = 0,5012m,$ $\alpha = 2,0049$

далее параметр m будет заменён на средние в.б.р. a и ремонта b ;

- коэффициенты вариации в.б.р. и ремонта обозначим соответственно v_a и v_b ;
- значения средних в.б.р. и ремонта и соответствующих коэффициентов вариации являются условными единицами.

В экспериментах ниже будут представлены результаты моделирования для исследования чувствительности вероятностных характеристик гексакоптера в стационарном и неста-

ционарном режиме работы к виду ф.р. исходной информации и соответствующему коэффициенту вариации.

3.2 Функция надёжности и квантили модели $\langle GI_{2<6}|GI|1 \rangle$

Первая характеристика, которая будет рассмотрена в экспериментах ниже, – это функция надёжности, с помощью которой также будут вычислены среднее в.б.р. системы и квантили. Продолжим исследование надёжности гексакоптера на примере модели 2-из-6.

3.2.1 Верификация имитационной модели на примере системы $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$

Для подтверждения корректности работы имитационной модели проведем первый эксперимент и сравним полученные результаты с теоретическими, вычисленными численно с помощью выражений из главы 2. Пусть в.б.р. компонентов имеет показательное распределение со средним $a = 1$, соответствующий коэффициент вариации $v_a = 1$. Время ремонта имеет распределение Эрланга со средним $b = 1$ и коэффициентом вариации $v_b = 1, 0,5$. График функции надёжности модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$ с имитационными и численными результатами из главы 2 представлен на рис. 3.2.

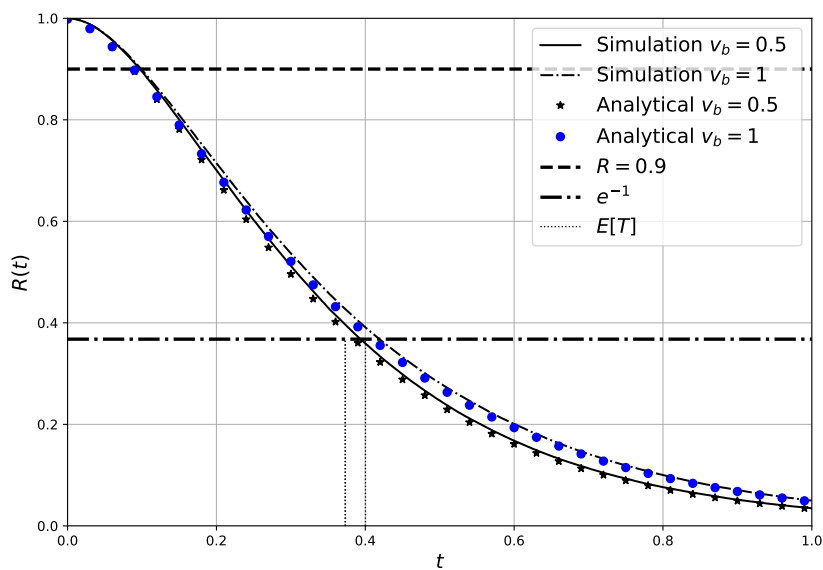


Рисунок 3.2 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты

Здесь чёрный цвет линии и штрихов соответствует значению коэффициента вариации времени ремонта $v_b = 0,5$, а синий – $v_b = 1$. Результаты первого эксперимента показывают, что разработанная имитационная модель адекватно описывает исходную математическую модель $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$, поскольку кривые, полученные численным и имитационным методами, близко расположены друг к другу. Сравним также значения среднего в.б.р. модели (см. таблицу 7) и квантили надёжности (см. таблицу 8).

Таблица 7 – Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты

$\mathbb{E}[T]$	$v_b = 0,5$	$v_b = 1$
Аналитика	0,373434	0,4
Моделирование	0,373100	0,400247

Согласно табл. 7 значения $\mathbb{E}[T]$, полученные из имитационной модели с общим временем моделирования $T = 10^5$ очень близки к результатам, полученным аналитически. Разница между значениями, вычисленными с помощью двух моделей, возникает лишь на четвёртом знаке десятичной дроби после запятой.

Таблица 8 – Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$

		$v_b = 0,5$	$v_b = 1$
Аналитика	$\gamma = 0,99$	0,027111	0,02724
	$\gamma = 0,9$	0,097168	0,09876
Моделирование	$\gamma = 0,99$	0,275467	0,027391
	$\gamma = 0,9$	0,097104	0,099054

Оценки значений квантилей надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6}|Erl|1 \rangle$, полученные из имитационной модели, также сопоставимы с результатами, вычисленными из аналитической модели. Таким образом, можем утверждать, что имитационная модель корректно описывает поведение исследуемой системы.

3.2.2 Чувствительность функции надёжности модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта

Перейдём далее к результатам, полученным только с помощью моделирования. В качестве второго эксперимента рассмотрим функцию надёжности модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$, а также вытекающие из неё временные характеристики. Предположим, что среднее в.б.р. $a = 10$, среднее время ремонта компонентов $b = 1$, а его коэффициент вариации принимает следующие значения: $v_b = 0,5; 1; 5; 10$ (см. рис. 3.3). В качестве распределений времени ремонта взяты Γ (чёрный цвет кривых), GW (синий), LN (красный) и P (зелёный). Вертикальные точечные линии отображают значения среднего в.б.р. системы $\mathbb{E}[T]$ для каждого случая $B(t)$ и v_b . На рисунке также отмечены уровень надёжности 0,9 и оценка значения среднего в.б.р.

системы e^{-1} , полученная из аналитических результатов, представленных в главе 2. График представлен в масштабе среднего времени восстановления компонентов $b = 1$.

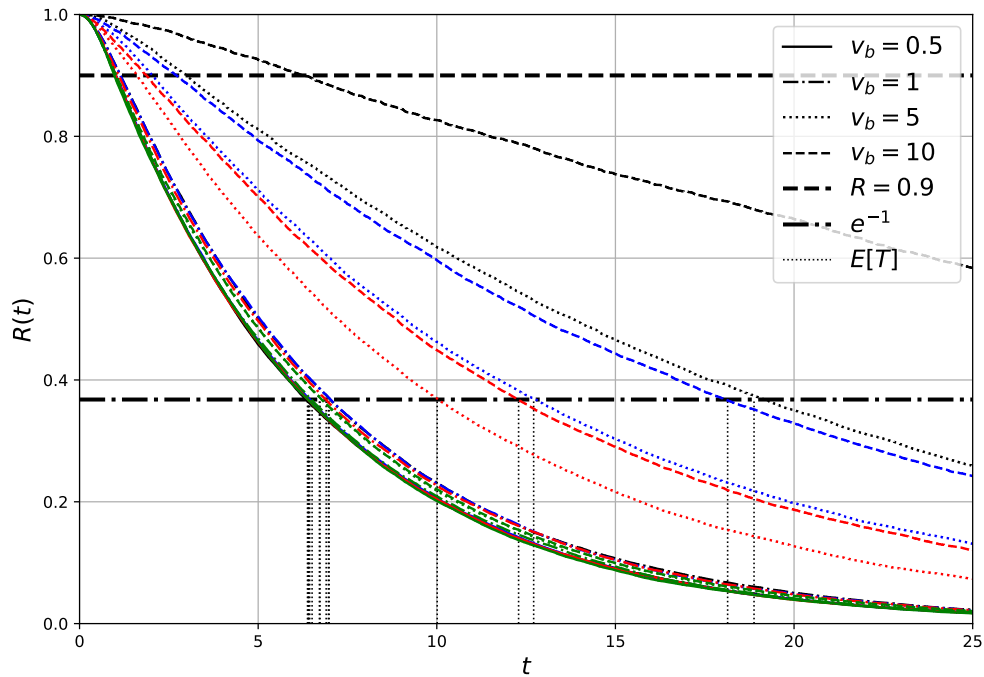


Рисунок 3.3 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$

Согласно представленному графику наблюдается нечувствительность функции надёжности к виду ф.р. и коэффициенту вариации v_b времени ремонта при фиксированном среднем b и значениях $v_b \leq 1$. С другой стороны при $v_b > 1$ наблюдается чувствительность функции $R(t)$ к виду ф.р. $B(t)$ для всех представленных распределений, кроме распределения Парето, а также к значению коэффициента вариации при фиксированном среднем. При этом большее значение v_b соответствует кривыми, характеризующих систему как более надёжную, так как вероятность работоспособности системы в этом случае сохраняется на уровне выше 90% дольше, чем при малых значениях v_b .

Квантили надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$ представлены в таблице 9. Согласно таблице при любых ф.р. и значениях v_b времени ремонта к моменту среднего времени восстановления компонентов $b = 1$ модель 2-из-6 сохраняет свою работоспособность с вероятностью $> 90\%$.

Значения среднего в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$ (см. таблицу 10) соответствуют наблюдаемому поведению кривых функции надёжности. Наибольшее значение коэффициента вариации v_b приводит к росту среднего в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ для всех распределений, кроме P .

При этом, значения среднего в.б.р. системы, которые отображены на рис. 3.3 вертикальными линиями, демонстрируют нечувствительность функции надёжности модели 2-из-6 к виду ф.р. и значению коэффициента вариации времени ремонта в масштабе $\frac{t}{\mathbb{E}[T]}$ при фикс-

Таблица 9 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$

$B(t)$		$v_b = 0,5$	$v_b = 1$	$v_b = 5$	$v_b = 10$
Γ	$\gamma = 0,99$	0,27877	0,288516	0,736649	1,221570
	$\gamma = 0,9$	1,013898	1,145379	3,002399	6,264864
GW	$\gamma = 0,99$	0,267558	0,300634	0,424230	0,564476
	$\gamma = 0,9$	1,012621	1,143730	2,039844	2,712557
LN	$\gamma = 0,99$	0,277106	0,271781	0,328587	0,375761
	$\gamma = 0,9$	1,013677	1,097445	1,610209	1,872957
P	$\gamma = 0,99$	0,270984	0,272696	0,271699	0,261639
	$\gamma = 0,9$	0,974522	0,987021	1,027038	1,013835

Таблица 10 — Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6}|GI|1 \rangle$

$B(t)$	$v_b = 0,5$	$v_b = 1$	$v_b = 5$	$v_b = 10$
Γ	6,447648	6,965168	19,192129	46,281772
GW	6,414108	6,985736	13,788588	17,930732
LN	6,444679	6,805641	10,047439	12,152034
P	6,356603	6,553173	6,732873	6,7124429

сированном среднем b , так как к моменту $\mathbb{E}[T]$ все вероятности безотказной работы сходятся к значению $\approx e^{-1}$.

3.2.3 Чувствительность функции надёжности модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р.

Далее исследуем чувствительность функции надёжности к виду ф.р. и значению коэффициента вариации v_a в.б.р. компонентов. Рассмотрим модель $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$. Пусть среднее в.б.р. компонентов $a = 10$, соответствующий коэффициент вариации $v_a = 0,5, 1, 5$, среднее время ремонта $b = 1$, коэффициент вариации времени ремонта $v_b = 1$. Результаты эксперимента представлены на рис. 3.4. Здесь чёрный, синий, красный и зелёный цвета кривых обозначают распределения Γ , GW , LN и P в.б.р. компонентов соответственно. Легенда рисунка обозначает тип линии для соответствующего значения v_a . Уровень надёжности 0,9, оценка среднего в.б.р. системы e^{-1} , полученная для сценария быстрого восстановления компонентов, и значения среднего в.б.р. системы для каждого случая $A(t)$ и v_a также отображены на рисунке. График представлен в масштабе среднего времени восстановления компонентов $b = 1$.

Согласно рис. 3.4 функция надёжности модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$ чувствительна и к виду ф.р. в.б.р., и к соответствующему значению коэффициента вариации v_a . При этом чем больше значение v_a , тем быстрее снижается надёжность системы и её функция быстрее стремится к 0 для всех распределений, кроме P . При коэффициенте вариации $v_a < 1$ поведение кривых неоднозначно. По графику видно, что с уменьшением значения v_a функция надёжности имеет более высокий квантиль $q_{0,9}$. При $v_a = 0,5$ квантиль $q_{0,9} \approx 5$ для распределений Γ , GW ,

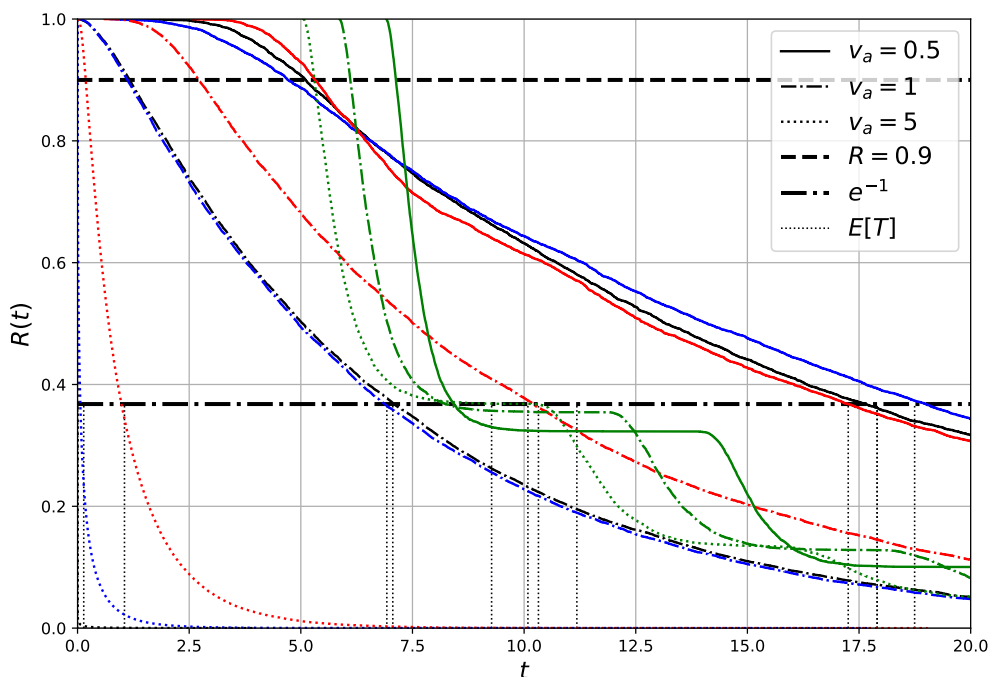


Рисунок 3.4 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$

LN и $q_{0.9} \approx 7$ для P . При $v_a = 1$ квантиль $q_{0.9} \approx 1$ для Γ , GW , $q_{0.9} \approx 3$ для LN и $q_{0.9} \approx 6$ для P . Точные значения квантилей надёжности q_γ модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$ представлены в таблице 11. Более того, при каждом значении коэффициента вариации в.б.р. поведение кривых функции надёжности различно при разных ф.р. $A(t)$. Лишь при $v_a = 0,5$ кривые функции надёжности при распределениях Γ , GW , LN близки друг к другу. При этом утверждать наличие нечувствительности функции надёжности к ф.р. в.б.р. при фиксированных среднем и значениях $v_a < 1$ нельзя.

Таблица 11 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$

$A(t)$		$v_a = 0,5$	$v_a = 1$	$v_a = 5$
Γ	$\gamma = 0,99$	3,135444	0,281286	$7,4 * 10^{-38}$
	$\gamma = 0,9$	5,109427	1,165689	$2,2 * 10^{-24}$
GW	$\gamma = 0,99$	2,256893	0,281504	$1,2 * 10^{-5}$
	$\gamma = 0,9$	4,713512	1,122042	0,000713
LN	$\gamma = 0,99$	3,782428	1,479940	0,061157
	$\gamma = 0,9$	5,317916	2,714034	0,183287
P	$\gamma = 0,99$	6,964723	5,925399	5,117187
	$\gamma = 0,9$	7,129194	6,107686	5,306342

Поведение кривых при распределении Парето в.б.р. компонентов и любом значении соответствующего коэффициента вариации отличается от других распределений. Для всех значений v_a надёжность системы сохраняется дольше половины среднего в.б.р. компонентов $0,5a = 5$, после чего резко снижается до своего среднего значения $\mathbb{E}[T]$ к моменту среднего в.б.р. компонентов $a = 10$.

В таблице 12 представлены соответствующие значения среднего в.б.р модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$. Значения $\mathbb{E}[T]$ в таблице показывают, что наименьшее значение $v_a = 0,5$ приводит к $\mathbb{E}[T] \approx 18$ для распределений Γ , GW , LN и $\mathbb{E}[T] \approx 11$ для P . При этом значения $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle P_{2<6}|M|1 \rangle$ близки друг к другу. Разница между минимальным и максимальным значениями среднего в.б.р. системы составляет $\approx 17\%$, при том что значение коэффициента вариации изменяется в 10 раз. Результаты демонстрируют чувствительность среднего в.б.р. модели 2-из-6 к виду ф.р. и значению v_a в.б.р. при фиксированном среднем a .

Таблица 12 — Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$

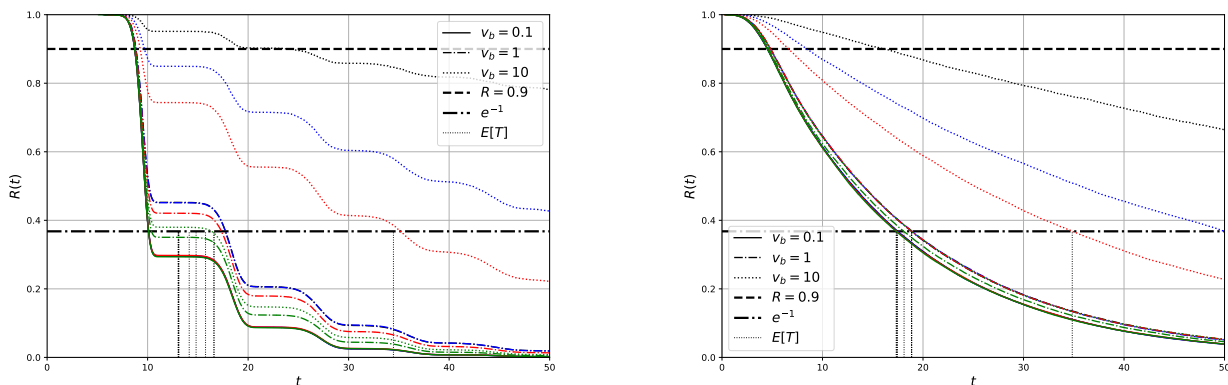
$A(t)$	$v_a = 0,5$	$v_a = 1$	$v_a = 5$
Γ	17,90509	7,059357	0,002445
GW	18,744807	6,926049	0,138673
LN	17,257915	10,085391	1,050927
P	11,181314	10,320868	9,272108

Кроме того, сопоставляя рис. 3.4 и значения таблицы 12 можно заметить, что время «дожития» системы к своему среднему времени жизни составляет $\approx e^{-1}$, что соответствует полученной в главе 2 сходимости функции надёжности к показательной.

3.2.4 Чувствительность функции надёжности модели $\langle GI_{2<6}|GI|1 \rangle$ к ф.р. и коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта

Далее проведём серию экспериментов для исследования чувствительности функции надёжности к виду ф.р. в.б.р. и ремонта, а также к значениям соответствующих коэффициентов вариации при непоказательных исходных распределениях. В теориях надёжности и ТМО одним из широко используемых распределений, описывающих наработку на отказ компонента (длительность работы компонента до отказа), является распределение Гнеденко-Вейбулла [96]. Его параметр формы α определяет интенсивность отказа. Если $\alpha < 1$, то интенсивность отказов уменьшается со временем, $\alpha = 1$ приводит к постоянной интенсивности отказов (распределение переходит в экспоненциальное), а $\alpha > 1$ – к увеличению интенсивности отказов. Последний случай соответствует реальной прикладной задаче, рассматриваемой в диссертационном исследовании. Отметим, что согласно таблице 6 интенсивность $\alpha < 1$ ведёт к $v_a > 1$, а при $\alpha > 1$ коэффициент вариации $v_a < 1$.

Таким образом, рассмотрим модель $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$. Пусть средние $a = 10$, $b = 1$. Положим $v_a = 0,1, 0,5$ и $v_b = 0,1, 1, 10$. В качестве распределений времени ремонта рассмотрим те же, что и раньше (см. рис. 3.5). Здесь легенда рисунков означает тип линии при изменении значения v_b . Цвета чёрный, синий, красный и зелёный обозначают распределения Γ , GW , LN и P времени ремонта компонентов соответственно. Рисунки а) и б) соответствуют значениям $v_a = 0,1$ и $v_a = 0,5$. Графики представлены в масштабе среднего времени восстановления компонентов $b = 1$.

а) $v_a = 0,1$ б) $v_a = 0,5$ Рисунок 3.5 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle GW_{2<6} | GI | 1 \rangle$

Согласно рис. 3.5 можно утверждать, что при $A(t) \sim GW$ и произвольной ф.р. $B(t)$ функция надёжности нечувствительна к виду ф.р. и коэффициенту вариации v_b времени ремонта при $v_b \leq 1$ и чувствительна к $v_a \leq 1$. Из рис. 3.5 а) видно, что при наименьшем значении коэффициента вариации в.б.р. v_a кривые функции надёжности имеют ступенчатый вид. Однако практически до момента $t \approx 10 = a$ (среднее в.б.р. компонентов) система надёжна с вероятностью единица. При $t > a$ и $v_b \leq 1$ надёжность системы резко снижается, и к моменту $t \approx 2a$ надёжность $R(t) \leq 0,2$. При этом кривые функции надёжности достаточно близки друг другу. При $v_b > 1$ функция надёжности чувствительна к виду ф.р. времени ремонта.

Случай $v_a = 0,5$ представлен на рис. 3.5 б). Рисунок демонстрирует аналогичные результаты, однако в данном случае все кривые функции надёжности монотонны. Сопоставляя результаты экспериментов при $v_a = 0,1$ и $v_a = 0,5$ видно, что наименьшее значение коэффициента вариации в.б.р. компонентов приводит с одной стороны к уменьшению среднего в.б.р. системы, а с другой – к увеличению квантилей надёжности. При этом оба примера показывают, что несмотря на разные ф.р. и значения коэффициента вариации времени ремонта, а также изменение коэффициента вариации в.б.р. компонентов вероятность безотказной работы системы в момент среднего в.б.р. системы $\approx e^{-1}$.

Значения квантилей функции надёжности q_γ модели $\langle GW_{2<6} | GI | 1 \rangle$ представлены в таблицах 13 и 14 для значений коэффициента вариации в.б.р. $v_a = 0,1$ и $v_a = 0,5$ соответственно. Результаты вычисления квантилей показывают, что для случая $v_a = 0,1$ при любой ф.р. и коэффициенте вариации времени ремонта при $v_b \leq 1$ квантили 0,99 и 0,9 принимают близкие значения, $q_{0,99} \approx 8$, $q_{0,9} \approx 9$.

Для случая $v_a = 0,5$ при любой ф.р. и коэффициенте вариации времени ремонта при $v_b \leq 1$ квантили надёжности $q_{0,99} \approx 2$, $q_{0,9} \approx 4,5$. При $v_b > 1$ наибольший квантиль соответствует Гамма распределению времени ремонта при любом v_a .

Таким образом, таблицы демонстрируют чувствительность квантилей к значению коэффициента вариации v_a .

Таблица 13 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,1$

$B(t)$		$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	$\gamma = 0,99$	7,824474	7,898356	8,997462
	$\gamma = 0,9$	8,710112	8,833543	24,226243
GW	$\gamma = 0,99$	7,831768	7,920923	8,398117
	$\gamma = 0,9$	8,708976	8,836058	9,681884
LN	$\gamma = 0,99$	7,798952	7,874726	8,207023
	$\gamma = 0,9$	8,719651	8,804207	9,257022
P	$\gamma = 0,99$	7,805067	7,854472	7,850493
	$\gamma = 0,9$	8,712089	8,751818	8,774245

Таблица 14 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,5$

$B(t)$		$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	$\gamma = 0,99$	2,128875	2,283045	4,870098
	$\gamma = 0,9$	4,532061	4,852642	16,140901
GW	$\gamma = 0,99$	2,099373	2,262206	2,262206
	$\gamma = 0,9$	4,512650	4,813445	8,422345
LN	$\gamma = 0,99$	2,436791	2,136692	2,282379
	$\gamma = 0,9$	4,546447	4,851404	6,629515
P	$\gamma = 0,99$	2,128212	2,199892	2,209872
	$\gamma = 0,9$	4,506893	4,650577	4,775498

Значения среднего в.б.р. для данного эксперимента представлены в таблицах 15 и 16. Значения $\mathbb{E}[T]$ подтверждают слабую чувствительность этой характеристики к виду ф.р. и коэффициенту вариации $v_b < 1$ времени ремонта при различных значениях коэффициента вариации в.б.р. При этом очевидна чувствительность среднего в.б.р. системы к значению коэффициента вариации в.б.р. компонентов v_a . Коэффициент вариации $v_b > 1$ приводит к значительному повышению надёжности системы (с точки зрения среднего времени жизни системы до её первого отказа) и чувствительности всех показателей надёжности к виду ф.р. времени ремонта.

Таблица 15 — Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,1$

$B(t)$	$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	13,061222	16,601749	187,699236
GW	13,087088	16,605153	57,543193
LN	13,112398	15,763803	34,460204
P	13,050228	14,139841	14,823715

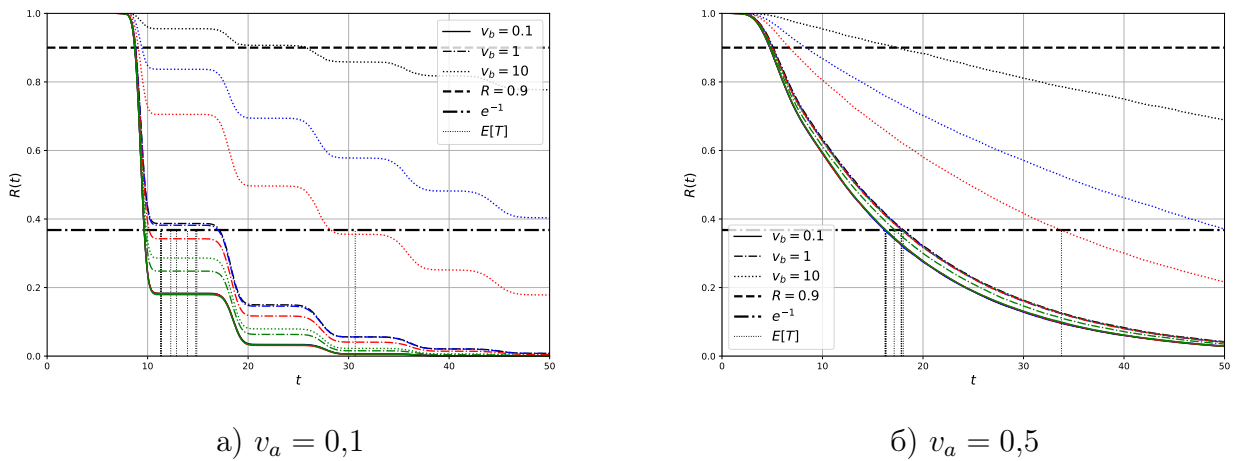
Как и прежде, графики функции надёжности и соответствующие им значения среднего в.б.р. системы демонстрируют нечувствительность функции надёжности к виду ф.р. и значению коэффициента вариации в.б.р. и ремонта в масштабе $\frac{t}{\mathbb{E}[T]}$.

Проведём дополнительный эксперимент для выявления нечувствительности функции надёжности к виду ф.р. времени ремонта и значению коэффициента вариации при непоказательном распределении в.б.р. Для финального теста рассмотрим модель $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$. Параметр формы распределения Гамма имеет тот же смысл, что и в распределении Гнеденко-Вейбулла. Результаты эксперимента представлены на рис. 3.6. Средние значения, а

Таблица 16 — Среднее в.б.р. $E[T]$ модели $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,5$

$B(t)$	$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	17,412921	18,860754	119,617131
GW	17,400349	18,869189	50,296678
LN	17,415513	18,864429	34,849586
P	17,329960	18,115494	18,863097

также значения коэффициента вариации в.б.р. и ремонта см. из предыдущего эксперимента. Обозначения в легенде и цвета кривых также аналогичны предыдущему примеру.

Рисунок 3.6 — Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$

Оба рисунка подтверждают, что при Гамма распределении в.б.р., соответствующем коэффициенту вариации $v_a < 1$ и значениях $v_b \leq 1$ функция надёжности нечувствительна к виду ф.р. времени ремонта и соответствующему значению коэффициента вариации. При этом большее значение $v_b = 10$ приводит к чувствительности функции надёжности к виду ф.р. времени ремонта. Кроме того, в этом случае надёжность системы выше по сравнению с кривыми, характеризующими случаи $v_b \leq 1$.

Поведение кривых на рис. 3.6 аналогично результатам вычисления функции надёжности модели $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$, что говорит о нечувствительности функции надёжности к виду ф.р. в.б.р. компонентов при фиксированных распределениях времени восстановления, коэффициенту вариации в.б.р. и ремонта и соответствующих средних значениях.

В таблицах 17 и 18 представлены значения квантилей надёжности q_γ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$ при разных значениях коэффициента вариации в.б.р. компонентов. Значения квантилей модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$ близки к значениям в таблицах 13 и 14. Для модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$ при $v_a = 0,1$ квантили $q_{0,99} \approx 8,2$, $q_{0,9} \approx 8,8$, в то время как при $v_a = 0,5$ квантили $q_{0,99} \approx 3$, $q_{0,9} \approx 5$. Тем не менее можно утверждать, что квантили чувствительны к виду ф.р. в.б.р. при фиксированных среднем и значении v_a .

Наибольшее значение квантиля, как и прежде, достигается при Гамма распределении времени ремонта компонентов при коэффициенте вариации $v_b > 1$.

Таблица 17 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,1$

$B(t)$		$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	$\gamma = 0,99$	8,177333	8,225367	8,929340
	$\gamma = 0,9$	8,719864	8,810953	25,809336
GW	$\gamma = 0,99$	8,159052	8,207227	8,524733
	$\gamma = 0,9$	8,714213	8,802739	9,422990
LN	$\gamma = 0,99$	8,162512	8,187259	8,376139
	$\gamma = 0,9$	8,721755	8,774687	9,078255
P	$\gamma = 0,99$	8,159922	8,164483	8,188838
	$\gamma = 0,9$	8,715502	8,729186	8,749625

Таблица 18 — Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,5$

$B(t)$		$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	$\gamma = 0,99$	2,867441	3,022455	5,488070
	$\gamma = 0,9$	4,777778	5,099488	17,487359
GW	$\gamma = 0,99$	2,889698	3,039956	3,896653
	$\gamma = 0,9$	4,746580	5,019947	8,323150
LN	$\gamma = 0,99$	2,856889	3,023153	3,529841
	$\gamma = 0,9$	4,770324	5,015443	6,703955
P	$\gamma = 0,99$	2,890760	2,946220	2,953414
	$\gamma = 0,9$	4,783789	4,902431	4,960055

В таблицах 19 и 20 представлены соответствующие значения среднего в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$. Результаты таблиц показывают, что при фиксированном среднем и коэффициенте вариации в.б.р. v_a среднее в.б.р. слабо чувствительно к виду ф.р. времени ремонта компонентов и значению коэффициента вариации $v_b < 1$. При этом наблюдается чувствительность характеристики $\mathbb{E}[T]$ к виду ф.р. времени ремонта при $v_b > 1$, а также к значению v_a .

Таблица 19 — Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,1$

$B(t)$	$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	11,358401	14,894228	175,406532
GW	11,323455	14,793060	53,567008
LN	11,315745	13,966588	30,656699
P	11,301775	12,302665	12,876218

Сравнивая графические результаты экспериментов для моделей $\langle GW_{2<6}|GI|1 \rangle$ и $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$, можно убедиться в нечувствительности функции надёжности к виду ф.р. в.б.р. при фиксированном коэффициенте вариации v_a . При этом значения среднего в.б.р. системы и квантили чувствительны и к виду ф.р. в.б.р., и к соответствующему значению коэффициента вариации.

Таблица 20 — Среднее в.б.р. $E[T]$ модели $\langle \Gamma_{2<6}|GI|1 \rangle$, $v_a = 0,5$

$B(t)$	$v_b = 0,1$	$v_b = 1$	$v_b = 10$
Γ	16,249028	18,037407	128,299285
GW	16,240302	17,879440	50,55068
LN	16,287571	17,836050	33,774352
P	16,333662	17,134019	17,841828

3.3 Стационарные вероятности

Перейдём далее к исследованию стационарных характеристик гексакоптера, а именно стационарным вероятностям состояний модели 3-из-6. Численные результаты главы 2 показали, что стационарный коэффициент готовности системы нечувствителен к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта при $\rho \rightarrow \infty$. Нечувствительность сохраняется для двух сценариев восстановления системы после отказа.

3.3.1 Верификация имитационной модели на примере системы

$$\langle M_{3<6}|GI|1 \rangle$$

Рассмотрим модель $\langle M_{3<6}|M|1 \rangle$ с частичным восстановлением и сравним её стационарные вероятности, полученные с помощью аналитических результатов и оценки имитационной модели. Пусть среднее в.б.р. $a = 1$, коэффициенты вариации $v_a = v_b = 1$. В качестве параметра системы, как и прежде, рассмотрено значение $\rho = \frac{a}{b} = [0, 10]$. Результаты приведены на рис. 3.7.

Графические результаты подтверждают адекватность предложенной имитационной модели системы 3-из-6 и сопоставимость оценки стационарного распределения вероятностей состояний с вычисленными аналитическими результатами.

Также для подтверждения корректности работы имитационной модели рассмотрим систему $\langle M_{3<6}|GI|1 \rangle$ с полным восстановлением. В качестве распределений времени ремонта взяты распределения из таблицы 6, а коэффициент вариации времени ремонта компонентов $v_b = 0,5, 1, 5$. Пусть $a = 1$, $\rho = \overline{0,15}$, время полного восстановления $f = 2b$. Результаты эксперимента для оценки коэффициента готовности K_{av} представлены на рис. 3.8.

Легенда рисунков обозначает тип линии для различных значений v_b : сплошная линия – $v_b = 0,5$, пунктирная – $v_b = 1$, точечная – $v_b = 5$. Цвета чёрный, красный, синий, зелёный означают распределения Γ , GW , LN , P времени ремонта компонентов соответственно.

Рис. 3.8 демонстрирует аналогичные главе 2 результаты. Значение коэффициента вариации времени ремонта $v_b > 1$ приводит к чувствительности коэффициента готовности системы K_{av} к виду распределения времени ремонта при малых ρ . Тем не менее с ростом ρ эта чувствительность исчезает. Также, как и в экспериментах по оценке функции надёж-

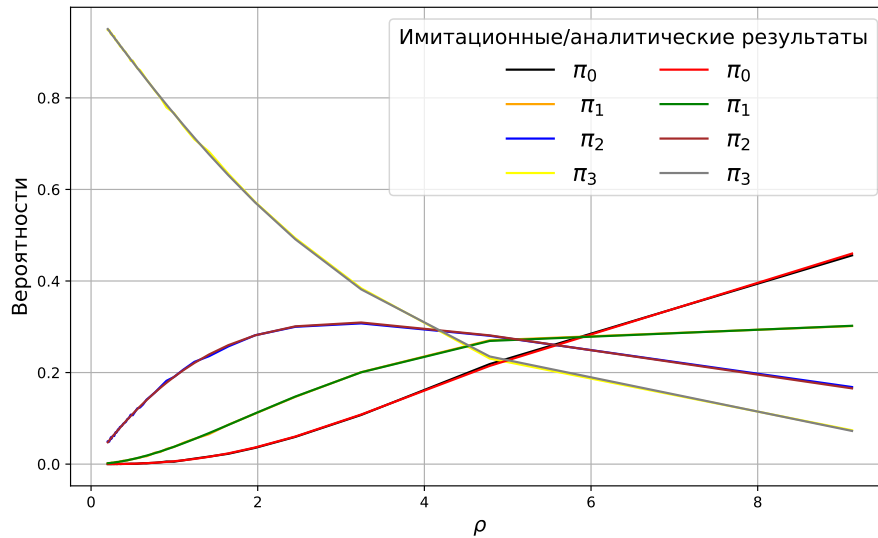


Рисунок 3.7 — Стационарные вероятности модели $\langle M_{3<6} | M | 1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты

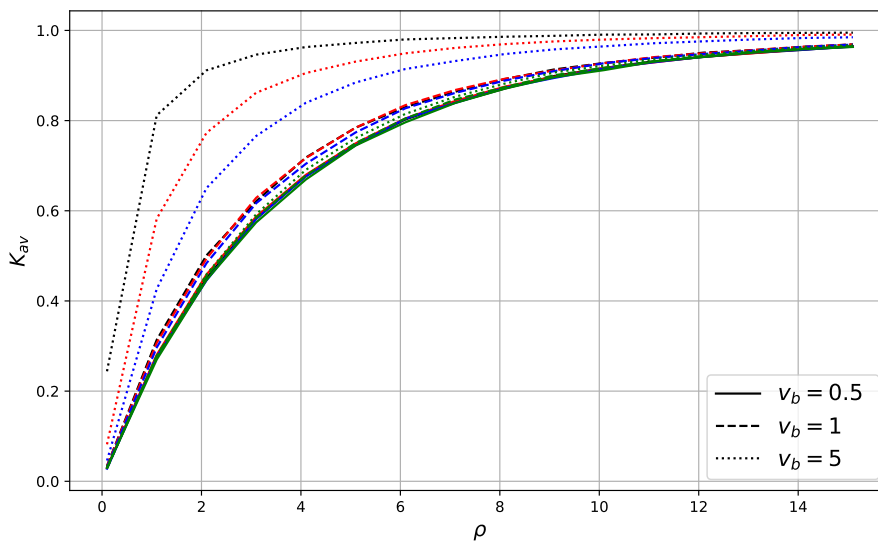


Рисунок 3.8 — Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle M_{3<6} | GI | 1 \rangle$

ности, можно отметить, что в случае распределения Парето времени ремонта коэффициент готовности системы K_{av} нечувствителен к соответствующему значению коэффициента вариации.

Очевидно, что предложенная имитационная модель достаточно точно описывает математическую модель, так как оценки коэффициента готовности, полученные имитационно, близки к результатам, полученным численными методами.

3.3.2 Чувствительность стационарного коэффициента готовности модели $\langle GI_{3<6}|M|1 \rangle$

Рассмотрим далее модель $\langle GI_{3<6}|M|1 \rangle$ с частичным восстановлением и оценку её вероятности безотказной работы. Пусть среднее в.б.р. компонентов $a = 1$, соответствующий коэффициент вариации $v_a = 0,5, 1, 5$, среднее время ремонта b взято из отношения $\rho = \frac{a}{b} = \overline{0, 15}$, коэффициент вариации времени ремонта $v_b = 1$. Результаты эксперимента представлены на рис. 3.9. Здесь чёрный, синий, красный и зелёный цвета кривых обозначают распределения Γ , GW , LN и P в.б.р. компонентов соответственно. Легенда рисунка обозначает тип линии для соответствующего значения v_a .

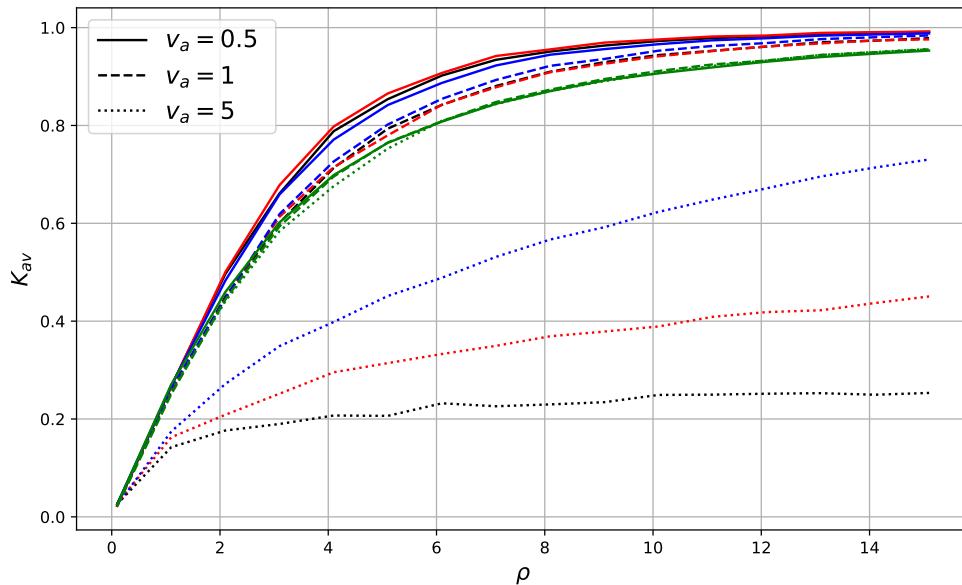


Рисунок 3.9 — Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle GI_{2<6}|M|1 \rangle$

Согласно рисунку, коэффициент готовности K_{av} модели $\langle GI_{3<6}|M|1 \rangle$ асимптотически нечувствителен к виду ф.р. в.б.р. при $v_a \leq 1$ на рассматриваемом интервале ρ . При этом большее значение коэффициента вариации в.б.р. v_a приводит к уменьшению значения K_{av} , а также к чувствительности вероятности безотказной работы системы к виду ф.р. в.б.р. Как и прежде наблюдаем, что распределение Парето в.б.р. компонентов системы приводит к нечувствительности коэффициента готовности K_{av} к значению коэффициента вариации в.б.р.

3.3.3 Чувствительность стационарного коэффициента готовности модели $\langle GI_{3<6}|GI|1\rangle$

Исследуем чувствительность вероятности безотказной работы модели $\langle GI_{3<6}|GI|1\rangle$ при сценарии частичного восстановления с произвольными распределениями в.б.р. и ремонта. В качестве ф.р. в.б.р. взяты распределения Γ и LN со значениями коэффициента вариации $v_a = 0,5, 1, 5$. В качестве ф.р. времени ремонта взято GW с соответствующим коэффициентом вариации $v_b = 0,5, 5$. Средние a и b аналогичны предыдущему эксперименту. Поведение коэффициент готовности K_{av} для этого эксперимента представлено на рис. 3.10.

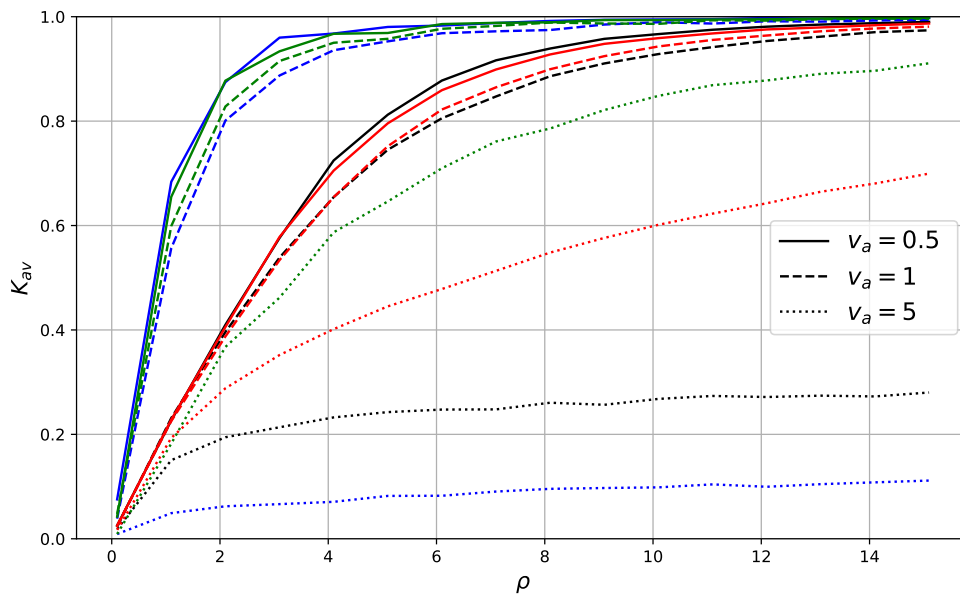


Рисунок 3.10 — Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle GI_{3<6}|GW|1\rangle$

Описание рис. 3.10 следующее:

- легенда рисунка соответствует типу линии для коэффициента вариации v_a в.б.р.;
- цвет линии определяет ф.р. в.б.р. и коэффициент вариации времени ремонта; чёрный соответствует модели $\langle \Gamma_{3<6}|GW|1\rangle$ при $v_b = 0,5$, синий – этой же модели, но $v_b = 5$, красный и зелёный определяет поведение модели $\langle LN_{3<6}|GW|1\rangle$ при $v_b = 0,5$ и $v_b = 5$ соответственно.

Согласно рис. 3.10, коэффициент готовности K_{av} асимптотически нечувствителен к виду ф.р. в.б.р. при фиксированном значении $v_b \leq 1$ и $v_a \leq 1$, но при этом чувствителен к виду ф.р. в.б.р. при $v_a > 1$ (чёрные и красные кривые) при $\rho > 10$. Кроме того коэффициент готовности нечувствителен к виду ф.р. в.б.р. при $v_b > 1$ и $v_a \leq 1$ (синяя и зелёная сплошные линии). При $v_a \leq 1$ вероятность безотказной работы принимает большее значение по сравнению с $v_a > 1$ при $v_b > 1$ при малых значениях относительной скорости восстановления ρ . При этом наименьшее значение коэффициента готовности K_{av} достигается при $v_a > 1$ и $v_b > 1$.

Рассмотрим дополнительный эксперимент, где в качестве ф.р. в.б.р взято распределение Парето с $v_a = 0,5, 5$, а для времени ремонта – Γ и P распределение с $v_b = 0,1, 0,5, 5$. Остальные параметры остаются прежними (рис. 3.11).

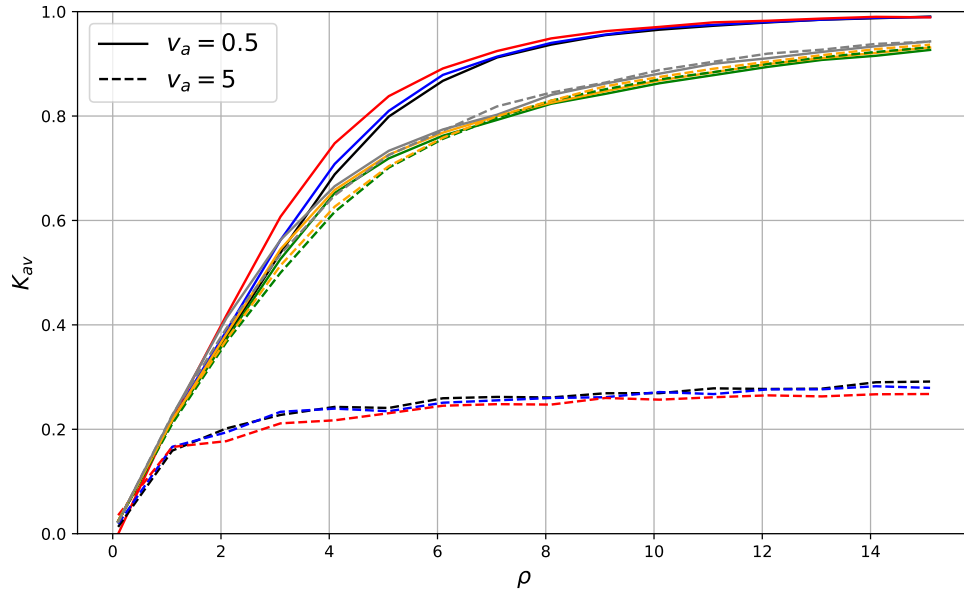


Рисунок 3.11 — Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle P_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$

Здесь легенда рисунка означает значение коэффициента вариации в.б.р. v_a , цвет линии зависит от ф.р. времени ремонта и значения коэффициента вариации. Чёрный, синий и красный цвета соответствуют модели $\langle P_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$ и значениям коэффициента вариации времени ремонта $v_b = 0,1, 0,5, 5$ соответственно. Цвета зелёный, оранжевый и серый обозначают модель $\langle P_{3<6}|P|1 \rangle$ с теми же значениями v_b .

Согласно рис. 3.11 коэффициент готовности K_{av} модели $\langle P_{3<6}|P|1 \rangle$ нечувствителен к значениям v_a и v_b на рассматриваемом интервале ρ . С другой стороны рисунок демонстрирует зависимость значения K_{av} от вида ф.р. времени ремонта при фиксированной ф.р. в.б.р. и рассматриваемых значениях v_a и v_b . Поведение коэффициента готовности модели $\langle P_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$ показывает наличие нечувствительности значения K_{av} к значению коэффициента вариации v_b и $v_a > 1$. В то же время $v_a > 1$ приводит к нечувствительности к виду значению v_b , а также к наименьшему значению вероятности безотказной работы системы.

3.4 Заключение

В настоящей главе представлены результаты численного исследования и анализа чувствительности вероятностно-временных характеристик надёжности модели $\langle GI_{3<6}|\Gamma|1 \rangle$, полученные с помощью имитационного моделирования.

Предложена имитационная модель на основе метода дискретно-событийного моделирования. Описана общая процедура моделирования, позволяющая вычислить оценки характеристик надёжности модели k -из- n с произвольными исходными распределениями для различных сценариев работы системы. Проведена верификация имитационной модели путём сравнения с марковской моделью и результатами, полученными ранее в главе 2.

На основе наиболее часто используемых в теории надёжности и ТМО распределений представлено исследование чувствительности характеристик надёжности к виду ф.р. и значению коэффициента вариации в.б.р. и ремонта компонентов. Согласно результатам экспериментов сформулированы следующие выводы о чувствительности и нечувствительности функции надёжности, среднего в.б.р. системы, квантилей надёжности и стационарного коэффициента готовности модели $\langle GI_{k<6}|GI|1 \rangle$.

1. В масштабе среднего времени ремонта компонентов b функция надёжности модели 2-из-6 нечувствительна к виду ф.р. и коэффициенту вариации v_b времени ремонта при коэффициенте вариации времени ремонта $v_b \leq 1$ и чувствительна к виду этой ф.р. и значению v_b при $v_b > 1$. Квантили и среднее в.б.р. системы чувствительны к виду ф.р. времени ремонта и значению коэффициента вариации v_b .
2. Наибольшее значение коэффициента вариации времени ремонта v_b приводит к наибольшим значениям среднего в.б.р. системы и квантилей $q_{0,9}$ и $q_{0,99}$ при рассмотренных ф.р. и значениях коэффициента вариации в.б.р. и ремонта компонентов.
3. Функция надёжности, квантили и среднее в.б.р. системы в масштабе среднего времени ремонта компонентов чувствительны к виду ф.р. в.б.р. и коэффициенту вариации v_a .
4. Поведение кривой функции надёжности зависит от вида ф.р. и коэффициента вариации v_a в.б.р. компонентов. Если коэффициент вариации в.б.р. очень мал, $v_a \rightarrow 0$, то кривые функции надёжности могут иметь ступенчатый вид при любых ф.р. времени ремонта и значениях v_b .
5. При относительно малых значениях v_a модель k -из- n может иметь высокий квантиль $q_{0,9}$, но в окрестностях $t \approx a$ стать ненадёжной при рассмотренных ф.р. в.б.р. и ремонта, а также значениях коэффициента вариации времени ремонта $v_b \leq 1$.
6. Чем больше коэффициент вариации в.б.р. v_a (при $v_a > 1$), тем ниже надёжность системы: кривая функции надёжности быстро стремится к 0, а значение коэффициента готовности системы и соответствующая кривая медленнее стремятся к 1 при рассмотренных ф.р. и коэффициенте вариации v_b времени ремонта.
7. При $\rho = \frac{a}{b} \rightarrow \infty$ и фиксированном среднем в.б.р. компонентов a , т.е. для сценария быстрого восстановления компонентов системы, стационарный коэффициент готовности модели 3-из-6 нечувствителен к виду ф.р. и значению коэффициента вариации времени ремонта для рассмотренных ф.р. в.б.р. и значений коэффициента вариации $v_a \leq 1$ компонентов.
8. При $\rho \rightarrow \infty$ и фиксированном среднем в.б.р. компонентов a коэффициент готовности нечувствителен к виду ф.р. в.б.р. компонентов при коэффициенте вариации $v_a \leq 1$,

рассмотренных ф.р. и значениях v_b времени ремонта. При этом если коэффициент вариации в.б.р. $v_a > 1$, то коэффициент готовности чувствителен к виду ф.р. в.б.р. компонентов при рассмотренных ф.р. времени ремонта.

9. Для поддержания высокой надёжности модели k -из- n при любых ф.р. в.б.р. и коэффициенте вариации v_a значение коэффициента вариации времени ремонта v_b должно быть большим или по крайней мере $v_b > 1$, а коэффициент вариации в.б.р. $v_a < 1$.
10. Эксперименты по оценке функции надёжности также показали, что при фиксированных средних значениях в.б.р. a и ремонта b компонентов системы вероятность безотказной работы по времени нечувствительна к виду ф.р. и коэффициентам вариации в.б.р. и ремонта в масштабе её среднего в.б.р. и к моменту $\mathbb{E}[T]$ все вероятности близки к значению e^{-1} .

Предложенная имитационная модель является универсальной и может служить для быстрого и точного вычисления оценок различных вероятностно-временных характеристик моделей k -из- n . Сформулированные по результатам экспериментов выводы могут служить в качестве рекомендаций инженерам и проектировщикам мультироторного беспилотного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы на этапе разработки модуля, в том числе в рамках проектирования высоконадёжной конфигурации модуля, подбора оптимального набора характеристик двигателей и т.д.

Результаты исследования, представленные в этой главе, были опубликованы в работах [60; 63; 65; 68; 70; 71].

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Разработаны математические модели системы k -из- n с произвольным распределением времени ремонта компонентов и всей системы для двух сценариев её восстановления, которые представлены в виде двумерного марковского процесса с дискретно-непрерывным множеством состояний. Получено аналитическое решение дифференциальных уравнений Колмогорова для вычисления нестационарных вероятностей состояний и функции надёжности в терминах ПЛ. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний.
2. Проведён анализ скорости сходимости функции распределения времени безотказной работы системы к показательному распределению при сценарии быстрого восстановления её компонентов. Выполнено численное исследование скорости сходимости. Получены асимптотические выражения стационарных вероятностей состояний в случае редких отказов.
3. На основе полученных теоретических результатов выполнены численное исследование надёжности моделей k -из- n и анализ чувствительности их характеристик к виду ф.р. и коэффициенту вариации времени ремонта компонентов и системы. Результаты применены к анализу надёжности мультироторного летательного модуля привязной высотной телекоммуникационной платформы.
4. Созданные имитационные модели позволили провести анализ чувствительности вероятностно-временных характеристик надёжности моделей k -из- n к виду исходной информации в случае произвольного распределения в.б.р. компонентов.

Список сокращений и условных обозначений

БПЛА – беспилотный летательный аппарат

в.б.р. – время безотказной работы

Г – Гамма распределение

ПЛ – преобразование Лапласа

п.р. – плотность распределения

с.в. – случайная величина

СеМО – сеть массового обслуживания

СМО – система массового обслуживания

ТМО – теория массового обслуживания

ф.р. – функция распределения

Exp – экспоненциальное распределение

FCFS – first come first service, первый поступивший обслуживается первым

GI - general independent, общее независимое

GW – распределение Гнеденко-Вейбулла

Erl – распределение Эрланга

LN – логнормальное распределение

M – показательное распределение

P – распределение Парето

Словарь терминов

- $A, A(t), a(t), a$ – с.в. в.б.р. компонентов, соответствующие ф.р., п.р., ПЛ и среднее
- $B, B(t), b(t), \tilde{b}(s), b$ – с.в. времени покомпонентного и частичного ремонта системы, соответствующие ф.р., п.р., ПЛ и среднее
- \mathbf{E} – пространство состояний системы k -из- n
- \mathbf{E}_0 – подмножество рабочих состояний процесса $J(t)$
- \mathbf{E}_1 – подмножество отказовых состояний процесса $J(t)$
- $\overline{\mathbf{E}}$ – пространство состояний процесса $Z(t)$
- $\overline{\mathbf{E}}'$ – пространство состояний процесса $Z(t)$ с поглощением
- $\mathbb{E}[T]$ – среднее в.р.б. системы
- $F, F(t), f(t), \tilde{f}(s), f$ – с.в. времени полного ремонта системы, соответствующие ф.р., п.р., ПЛ и среднее
- $J(t)$ – случайный процесс на пространстве \mathbf{E}
- K_{av} – коэффициент готовности
- $\mathbb{P}\{A\}$ – вероятность события A
- T – время жизни системы
- v_a – коэффициент вариации в.б.р. компонентов
- v_b – коэффициент вариации времени ремонта компонентов (и системы в случае её частичного ремонта)
- v_f – коэффициент вариации времени полного ремонта системы
- $W(t), w(t), \tilde{w}(s)$ – ф.р., п.р. и ПЛ длительности до первого отказа системы
- $Z(t)$ – двумерный марковский процесс
- α – параметр экспоненциального распределения, интенсивность отказа компонента
- $\beta(x)$ – интенсивность покомпонентного и частичного восстановления системы с учётом времени x , затраченного на ремонт отказавшего компонента
- λ_i – интенсивность отказа системы в i -м состоянии, $i = \overline{0, k-1}$
- ρ – относительная скорость восстановления системы
- $\phi(x)$ – интенсивность полного восстановления системы с учётом времени x , затраченного на ремонт отказавшего компонента

Список литературы

1. *Netes V. A.* A General Approach to Dependability Assessment of Intelligent Transport Systems // 2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. — 2022. — P. 1–4.
2. *Taxa X. A.* Исследование операций. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2018. — 1056 с.
3. *Кусакина М. С., Нетес В. А.* Проблемы обеспечения надежности программно-конфигурируемых сетей // Телекоммуникации и информационные технологии. — 2019. — т. 6, № 1. — с. 39–43.
4. *Kuo W., Zuo M.* Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications. — New Jersey : John Wiley & Sons, 2003. — 561 p.
5. *Trivedi K.* Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications. — New York : Wiley, 2016. — 848 p.
6. *Chakravarthy S. R., Krishnamoorthy A., Ushakumari P. V.* A (k -out-of- n) reliability system with an unreliable server and Phase type repairs and services: The (N, T) policy // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 2001. — Vol. 14. — P. 361–380.
7. *Yuge T., Maruyama M., Yanagi S.* Reliability of a (k -out-of- n) system with common-cause failures using multivariate exponential distribution // Procedia Computer Science. — 2016. — Vol. 96. — P. 968–976.
8. *Zhang T., Xie M., Horigome M.* Availability and reliability of (k -out-of- $(M + N)$): warm standby systems // Reliability Engineering & System Safety. — 2006. — Vol. 91. — P. 381–387.
9. *Gertsbakh I., Shpungin Y.* Reliability Of Heterogeneous $((k, r)$ -out-of- $(n, m))$ System // Reliability: Theory & Application. — 2016. — Vol. 11. — P. 8–10.
10. Computational analysis of machine repair problem with unreliable multi-repairmen / J. C. Ke, Y. L. Hsu, T. H. Liu, Z. G. Zhang // Computers & Operations Research. — 2013. — Vol. 40. — P. 848–855.
11. *Wang K. H., Ke J. B., Ke J. C.* Profit analysis of the $M|M|R$ machine repair problem with balking, reneging, and standby switching failures // Computers & Operations Research. — 2007. — Vol. 34. — P. 835–847.
12. Reliability and sensitivity analysis of a repairable k -out-of- n :G system with two failure modes and retrial feature / L. Hu, S. Liu, R. Peng, Z. Liu // Communications in Statistics – Theory and Methods. — 2020. — Vol. 51, issue 9. — P. 3043–3064.
13. *Amari S., Bergman R.* Reliability analysis of k -out-of- n load-sharing systems // Annual Reliability and Maintainability Symposium. — 2008.

14. *Krishnamoorthy A., Ushakumari P., Lakshmi B.* K -out-of- n system with repair: the N -policy // Asia Pacific Journal of Operation Research. — 2002. — Vol. 19. — P. 47–61.
15. *Ushakumari P., Krishnamoorthy A.* k -out-of- n system with repair: the $\max(N, T)$ policy // Performance Evaluation. — 2004. — Vol. 57, issue 2. — P. 221–234.
16. Computation and profit analysis of a k -out-of- n :G repairable system under N -policy with multiple vacations and one replaceable repair facility / W. Wu, Y. Tang, M. Yu, Y. Jiang // RAIRO-Oper. Res. — 2015. — Vol. 49, issue 4. — P. 717–734.
17. *Zhang Y., Ding W., P. Z.* On total capacity of k -out-of- n systems with random weights // Naval Research Logistics. — 2018. — Vol. 65. — P. 347–359.
18. *Zhang Y.* Optimal allocation of active redundancies in weighted k -out-of- n systems // Statistics & Probability Letters. — 2018. — Vol. 135. — P. 110–117.
19. *Zhang Y.* Reliability analysis of weighted k -out-of- n systems with variable demand // Quality Engineering. — 2018. — Vol. 30. — P. 687–693.
20. Reliability modeling and analysis for linear consecutive- k -out-of- n :F retrial systems with two maintenance activities / Y. Wang, L. Hu, L. Yang, J. Li // Reliability Engineering & System Safety. — 2022. — Vol. 226.
21. *Zhang T., Zhang Y., Du X.* Reliability analysis for k -out-of- n systems with shared load and dependent components // Struct Multidisc Optim. — 2018. — Vol. 57. — P. 913–923.
22. *Eruguz A., Tan T., Houtum G.-J. van.* Optimizing usage and maintenance decisions for k -out-of- n systems of moving assets // Naval Research Logistics. — 2017. — Vol. 64. — P. 418–434.
23. *Naumov V. A., Gaidamaka Y. V. and Yarkina N. V., Samouylov K. E.* Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems. — Cham : Springer, 2022. — 308 p.
24. Analysis of machine-type communication data transmission by multicasting technology in 5G wireless networks / V. Beschastnyi, V. Savich, D. Ostrikova, I. Gudkova, G. Araniti, V. Shorgin // AIP Conference Proceedings. — 2019. — т. 2116, № 1.
25. Energy- and Latency-Aware Hybrid Offloading Algorithm for UAVs / A. A. A. Ateya, A. Muthanna, R. Kirichek, M. Hammoudeh, A. Koucheryavy // IEEE Access. — 2019. — т. 7. — с. 37587–37600.
26. *Rumyantsev A., Morozova T., Basmadjian R.* Discrete-Event Modeling of a High-Performance Computing Cluster with Service Rate Control // 2018 22nd Conference of Open Innovations Association (FRUCT). — 2018. — с. 224–231.
27. *Zorin A., Zorin V.* General Markov chain model for time-sharing process with renewal input of multiclass customers and setup times // The 5th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-5). — 2020. — с. 384–387.

28. Моделирование надёжности беспилотного высотного модуля привязной телекоммуникационной платформы / В. М. Вишнеvский, Д. В. Козырев, В. В. Рыков, З. Ф. Нгуен // ИТиВС. — 2020. — т. 4. — с. 26–38.
29. *Вишнеvский В. М., Ширванян А. М., Бряшко Н. Н.* Расчет необходимой мощности для функционирования привязной беспилотной платформы в условиях турбулентной атмосферы // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2020. — № 3. — с. 71–84.
30. A Tutorial on UAVs for Wireless Networks: Applications, Challenges, and Open Problems / M. Mozaffari, W. Saad, M. Bennis, Y.-H. Nam, M. Debbah // IEEE Communications Surveys & Tutorials. — 2019. — с. 410–438.
31. A Novel UAV – Aided NetWork Architecture Using WiFi Direct / M. A. Khan, R. Hamila, M. S. Kiranyaz, A. M. Gabbou // IEEE Access. — 2019. — т. 7. — с. 67305–67318.
32. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Коваленко И. Н.* Математические вопросы теории надёжности // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1964. — 1966. — 1 (1). — с. 7–53.
33. *Kala Z., Omishore A.* Reliability and Sensitivity Analyses of Structures Related to Eurocodes // International Journal of Mechanics. — 2022. — Vol. 16. — P. 98–107.
34. Neural network ensemble-based sensitivity analysis in structural engineering: Comparison of selected methods and the influence of statistical correlation / L. Pan, L. Novák, D. Lehký, D. Novak, M. Cao // Computers & Structures. — 2021. — Vol. 242.
35. sensobol : An R Package to Compute Variance-Based Sensitivity Indices / A. Puy, S. Lo Piano, A. Saltelli, S. Levin // Journal of Statistical Software. — 2022. — Vol. 102.
36. *Zorin A., Sizova K.* A Method for Solving Stationary Equations for Priority Time-Sharing Service Process in Random Environment // In: Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2020. Communications in Computer and Information Science. т. 1391. — 2021.
37. *Севастьянов Б. А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и её применение. — 1957. — т. 2, № 1. — с. 106–116.
38. *Gertsbakh I. B.* Asymptotic methods in reliability theory: a review // Advances in Applied Probability. — 1984. — Vol. 16, issue 1. — P. 147–175.
39. *Zachary S.* A Note on Insensitivity in Stochastic Networks // Journal of Applied Probability. — 2007. — Vol. 44, issue 1. — P. 238–248.
40. *Ушаков И. А.* Надёжность: прошлое, настоящее, будущее // Reliability: Theory & Applications. — 2006. — 1 (1). — с. 17–27.
41. *Коваленко И. Н.* Исследования по анализу надёжности сложных систем. — Киев : Наукова думка, 1976. — 212 с.

42. *Rykov V.* Multidimensional alternative processes reliability models // In: Dudin, A., Klimenok, V., Tsarenkov, G., Dudin, S. (eds.) BWWQT 2013. Communications in Computer and Information Science. Vol. 356. — 2013. — P. 147–156.
43. *Ивницкий В. А.* Об условии инвариантности стационарных вероятностей состояний для сетей однолинейных систем массового обслуживания // Теория вероятн. и ее примен. — 1989. — т. 34, вып. 3. — с. 576–580.
44. *Ивницкий В. А.* Об инвариантности стационарных вероятностей состояний однолинейной системы обслуживания, не имеющей мультипликативной формы // Пробл. передачи информ. — 2002. — т. 38, вып. 4. — с. 136–146.
45. *Eremina A.* Invariance of the stationary state distribution for mass service networks with multi-regime strategies, different demands, and a “generalized processor sharing” discipline // Automatic Control and Computer Sciences. — 2011. — Vol. 45. — P. 29–38.
46. *Dovzhenok T.* Invariance of the Stationary Distribution of Networks with Bypasses and “Negative” Customers // Automation and Remote Control. — 2002. — Vol. 63. — P. 1458–1469.
47. *Boyarovich Y. S.* The stationary distribution invariance of states in a closed queueing network with temporarily non-active customers // Automation and Remote Control. — 2012. — Vol. 73. — P. 1616–1623.
48. *Schassberger R.* Insensitivity of Steady-State Distributions of Generalized Semi-Markov Processes. Part I // Ann. Probab. — 1977. — Vol. 5, issue 1. — P. 87–99.
49. *Schassberger R.* Insensitivity of Steady-State Distributions of Generalized Semi-Markov Processes. Part II // Ann. Probab. — 1978. — Vol. 6, issue 1. — P. 88–95.
50. Sensitivity Analysis and Simulation of a Multiserver Queueing System with Mixed Service Time Distribution / E. Morozov, M. Pagano, I. Peshkova, A. Rumyantsev // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, issue 8.
51. *Kovalenko I. N., Atkinson J. B., Mykhalevych K. V.* Three cases of light-traffic insensitivity of the loss probability in a $GI/G/m/0$ loss system to the shape of the service time distribution // Queueing Syst. — 2003. — Vol. 45, issue 3. — P. 245–271.
52. *Efrosinin D., Rykov V.* Sensitivity Analysis of Reliability Characteristics to the Shape of the Life and Repair Time Distributions // In: Dudin, A., Nazarov, A., Yakupov, R., Gortsev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. ITMM 2014. Communications in Computer and Information Science. Vol. 487. — 2014.
53. *Rykov V., Ivanova N.* Reliability of a Double Redundant System Under the Full Repair Scenario // In: Data Analysis and Related Applications 1 (eds K.N. Zafeiris, C.H. Skiadas, Y. Dimotikalis, A. Karagrigoriou and C. Karagrigoriou-Vonta). — 2022.

54. On Sensitivity Analysis of Steady State Probabilities of Double Redundant Renewable System with Marshal-Olkin Failure Model / V. Rykov, E. Zaripova, N. Ivanova, S. Shorgin // In: Vishnevskiy, V.V., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2018. Communications in Computer and Information Science. Vol. 919. — 2018. — P. 234–245.
55. Approximations in Performance Analysis of a Controllable Queueing System with Heterogeneous Servers / D. Efrosinin, N. Stepanova, J. Sztrik, A. Plank // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, issue 10.
56. *Genis Y.* On Reliability of Systems with Periodic Maintenance under Rare Failures of Its Elements // Automation and Remote Control. — 2010. — Vol. 71. — P. 1337–1345.
57. *Ivanova N.* On Steady State Reliability and Sensitivity Analysis of a k -out-of- n System under Full Repair Scenario // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2022. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13766. — 2023. — P. 422–434.
58. *Новакоро Н. Г. К., Козырев Д. В.* Mathematical and Simulation Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System // Mathematics. — 2021. — Vol. 9.
59. *Rykov V.* On steady state probabilities of renewable system with Marshal–Olkin failure model // Stat Papers. — 2018. — Vol. 59. — P. 1577–1588.
60. Моделирование надёжности привязных высотных беспилотных телекоммуникационных платформ / В. М. Вишнеvский, В. В. Рыков, Д. В. Козырев, Н. М. Иванова. — М. : РИЦ Техносфера, 2022. — 194 с.
61. On Reliability Function of a k -out-of- n System With General Repair Time Distribution / V. Rykov, D. V. Kozyrev, A. Filimonov, N. M. Ivanova // Probability in the Engineering and Informational Sciences. — 2021. — Vol. 35. — P. 885–902.
62. *Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D.* Sensitivity Analysis of a k -out-of- n :F System Characteristics to Shapes of Input Distribution // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12563. — 2021. — P. 485–496.
63. *Иванова Н. М., Вишнеvский В. М.* Оценка надёжности привязных высотных беспилотных платформ с использованием моделей систем К-из- N и методов машинного обучения // Проблемы информатики. — 2021. — № 4. — с. 16–39.
64. *Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D.* Sensitivity Analysis of Characteristics of a k -out-of- n :F System to Shapes of Life and Repair Times Distributions of Its Components // Материалы 23-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2020, Москва). — 2020. — с. 268–275.

65. *Rykov V., Ivanova N.* Reliability and sensitivity analysis of a repairable k -out-of- n :F system with general life- and repair times distributions // In proceedings of the 30th European Safety and Reliability Conference and the 15th Probabilistic Safety Assessment and Management Conference. Edited by Piero Baraldi, Francesco Di Maio and Enrico Zio. — 2020.
66. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.* Расчёт характеристик надёжности восстанавливаемой системы k -из- n : F с разными сценариями ремонта системы и произвольными исходными распределениями / В. В. Рыков, Н. М. Иванова ; федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН). — № 2021663864 ; заявл. 16.08.2021 ; опубл. 25.08.2021, 2021662893 (Российская Федерация).
67. *Иванова Н. М.* Аналитическая модель восстанавливаемой системы типа k -из- n с произвольным распределением времени восстановления // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — 2019. — с. 54—57.
68. *Ivanova N.* Modeling and Simulation of Reliability Function of a k -out-of- n :F System // In: Vishnevskiy, V.M., Samouylov, K.E., Kozyrev, D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications. DCCN 2020. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1337. — 2021. — P. 271–285.
69. *Ivanova N.* On Importance of Sensitivity Analysis on an Example of a k -out-of- n System // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, issue 5.
70. *Ivanova N.* Modeling and Simulation of Reliability Function of a k -out-of- n :F System with Partial Repair // Материалы 23-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2020, Москва). — 2020. — с. 156—163.
71. *Иванова Н. М.* О чувствительности характеристик надёжности системы k -out-of- n к форме распределения длительностей жизни и ремонта её компонент // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами». — 2021. — с. 54—65.
72. *Ivanova N.* Reliability Analysis of a k -out-of- n System in Case of Full Repair After Its Failure // Материалы 25-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2022, Москва). — 2022. — с. 345—351.
73. *Kendall D. G.* Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // Ann. Math. Statist. — 1953. — Vol. 24, no. 3. — P. 338–354.
74. *Рыков В. В., Козырев Д. В.* Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации). — М. : ИНФРА-М, 2015. — 223 с.

75. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания / под ред. П. с англ. / Пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. — М. : Машиностроение, 1979. — 432 с.
76. *Cox D. R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 1955. — Vol. 51, issue 3. — P. 433–441.
77. *Rykov V., Filimonov A.* Hyperbolic Systems with Multiple Characteristics and Some Applications // *Autom Remote Control.* — 2021. — Vol. 82. — P. 1262–1270.
78. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 400 с.
79. *Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М. : Наука, 1978. — 688 с.
80. Efficiency Enhancement of Tethered High Altitude Communication Platforms Based on Their Hardware-Software Unification / V. Perelomov, L. Myrova, D. Aminev, D. Kozyrev // In: Vishnevskiy V., Kozyrev D. (eds) *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2018. Communications in Computer and Information Science.* Vol. 919. — 2018. — P. 184–200.
81. *Tognon M., Franchi A.* Theory and Applications for Control of Aerial Robots in Physical Interaction Through Tethers. — Cham : Springer, 2021. — 155 p.
82. *Vishnevsky V., Efrosinin D., Krishnamoorthy A.* Principles of Construction of Mobile and Stationary Tethered High-Altitude Unmanned Telecommunication Platforms of Long-Term Operation // In: Vishnevskiy V., Kozyrev D. (eds) *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2018. Communications in Computer and Information Science.* Vol. 919. — 2018.
83. Optimal Method for Uplink Transfer of Power and the Design of High-Voltage Cable for Tethered High-Altitude Unmanned Telecommunication Platforms / V. Vishnevsky, B. Tereschenko, D. Tumchenok, A. Shirvanyan // In: Vishnevskiy V., Kozyrev D. (eds) *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science.* Vol. 700. — 2017. — P. 240–247.
84. Сети 5G/6G: архитектура, технологии, методы анализа и расчета / Д. А. Молчанов, В. О. Бегисhev, К. Е. Самуйлов, Е. А. Кучерявый. — М. : РУДН, 2022. — 516 с.
85. A Markov Process-Based Approach for Reliability Evaluation of the Propulsion System in Multi-rotor Drones / K. Aslansefat, F. Marques, R. Mendonça, J. Barata // In: Camarinha-Matos L., Almeida R., Oliveira J. (eds) *Technological Innovation for Industry and Service Systems. DoCEIS 2019. IFIP Advances in Information and Communication Technology.* Vol. 553. — 2019.
86. Reliability modeling of a flight module of a tethered high-altitude telecommunication platform / V. Vishnevsky, D. Selvamuthu, V. Rykov, D. Kozyrev, N. Ivanova // *International Conference on Information, Control, and Communication Technologies.* — 2022.

87. *Rykov V., Ivanova N., Kochetkova I.* Reliability Analysis of a Load-Sharing k -out-of- n System Due to Its Components' Failure // Mathematics. — 2022. — Vol. 10.
88. On Reliability Function of a k -out-of- n System with Decreasing Residual Lifetime of Surviving Components after their Failures / V. Rykov, N. Ivanova, D. Kozyrev, T. Milovanova // Mathematics. — 2022. — Vol. 10.
89. *Ivanova N., Vishnevsky V.* Application of k -out-of- n :G System and Machine Learning Techniques on Reliability Analysis of Tethered Unmanned Aerial Vehicle // In: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds). Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1605. — 2022.
90. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т. 2. — М. : Мир, 1984. — 738 с.
91. *Гнеденко Б. В.* О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 4. — с. 3—12.
92. *Гнеденко Б. В.* О дублировании с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 111—118.
93. *Соловьёв А. Д.* Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 119—121.
94. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надёжности систем. — М. : Советское радио, 1980. — 208 с.
95. *Kalashnikov V.* Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications: Risk Analysis, Reliability, Queueing. — Dordrecht : Springer, 1997. — 270 p.
96. *Каштанов В. А., Медведев А. И.* Теория надёжности сложных систем. — М. : ФИЗМАЛИТ, 2010. — 608 с.

Список рисунков

1.1	Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n для сценария частичного ремонта	18
1.2	Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n для сценария полного ремонта	28
1.3	Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы 2-из- n для сценария полного ремонта	32
1.4	Граф интенсивностей переходов модели восстанавливаемой системы k -из- n с поглощением	34
2.1	Структура привязной высотной платформы	48
2.2	Беспилотный шестироторный модуль	49
2.3	Нестационарные вероятности состояний модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$ с частичным восстановлением	55
2.4	Нестационарные вероятности состояний модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$ с полным восстановлением	59
2.5	Графическое представление корня s_2	62
2.6	Равномерная сходимоть функции надёжности $\hat{R}(t)$ модели 2-из-6 в масштабе её среднего в.б.р. к предельной функции e^{-t} с ростом ρ	66
2.7	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$ и её оценки $\hat{R}(t)$ в масштабе её среднего в.б.р.	67
2.8	K_{av} модели 3-из-6 с частичным восстановлением	73
2.9	K_{av} модели 3-из-6 с полным восстановлением	77
3.1	Блок-схема имитационного моделирования	81
3.2	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты	84
3.3	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle M_{2<6} GI 1 \rangle$	86
3.4	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle GI_{2<6} M 1 \rangle$	88
3.5	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle GW_{2<6} GI 1 \rangle$	90
3.6	Функция надёжности $R(t)$ модели $\langle \Gamma_{2<6} GI 1 \rangle$	92
3.7	Стационарные вероятности модели $\langle M_{3<6} M 1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты	95
3.8	Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle M_{3<6} GI 1 \rangle$	95
3.9	Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle GI_{2<6} M 1 \rangle$	96
3.10	Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle GI_{3<6} GW 1 \rangle$	97
3.11	Коэффициент готовности K_{av} модели $\langle P_{3<6} GI 1 \rangle$	98

Список таблиц

1	Значения ε с ростом параметра ρ	65
2	$\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$	67
3	Квантили функции надёжности в масштабе $\mathbb{E}[T]$ ($\rho = 1$)	68
4	Квантили функции надёжности в масштабе $\mathbb{E}[T]$ ($\rho = 10$)	68
5	Обозначения	82
6	Распределения в.б.р. и времени ремонта компонентов и их параметры	83
7	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$ – аналитические и имитационные результаты	85
8	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6} Erl 1 \rangle$	85
9	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle M_{2<6} GI 1 \rangle$	87
10	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle M_{2<6} GI 1 \rangle$	87
11	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GI_{2<6} M 1 \rangle$	88
12	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle GI_{2<6} M 1 \rangle$	89
13	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GW_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,1$	91
14	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle GW_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,5$	91
15	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle GW_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,1$	91
16	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle GW_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,5$	92
17	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle \Gamma_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,1$	93
18	Квантили функции надёжности q_γ модели $\langle \Gamma_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,5$	93
19	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle \Gamma_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,1$	93
20	Среднее в.б.р. $\mathbb{E}[T]$ модели $\langle \Gamma_{2<6} GI 1 \rangle, v_a = 0,5$	94

Приложение А

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ


RU2021663864

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2021663864 Дата регистрации: 25.08.2021 Номер и дата поступления заявки: 2021662893 16.08.2021 Дата публикации и номер бюллетеня: 25.08.2021 Бюл. № 9 Контактные реквизиты: 8(495)4331401 доб. 43-25, titova-ekbr@rudn.ru, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 10/2, РУДН	Автор(ы): Рыков Владимир Васильевич (RU), Иванова Ника Михайловна (RU) Правообладатель(и): федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН) (RU)
--	---

Название программы для ЭВМ:

Расчет характеристик надежности восстанавливаемой системы k-из-n: F с разными сценариями ремонта системы и произвольными исходными распределениями

Реферат:

Программа предназначена для расчета характеристик надежности восстанавливаемой системы k-из-n:F с двумя типами ремонта и произвольными распределениями времени жизни и ремонта элементов и системы. Программа может применяться в образовательных целях в качестве дополнительного образовательного ресурса при изучении дисциплин «Теория случайных процессов», «Теория надёжности», «Прикладные стохастические модели». Программа обеспечивает вычисление стационарных вероятностей состояний, а также функции надежности и среднего времени жизни системы k-из-n:F с одним ремонтным устройством и произвольными законами распределения времени жизни и ремонта длительностей безотказной работы и ремонта её элементов и всей системы. Также программа может быть полезна в качестве дополнительного средства для исследования чувствительности систем k-из-n:F к виду функции распределения времени жизни и ремонта.

Язык программирования: Python

Объем программы для ЭВМ: 15 КБ