

Отзыв

на автореферат диссертации Гамбаряна Марка Микаеловича **«Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью»**, представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Соискатель разработал и реализовал в системе Sage метод построения обратимых разностных схем для динамических систем с квадратичной правой частью. Установлено, что для класса эллиптических осцилляторов данные схемы полностью наследуют ключевые свойства непрерывного случая: точки траекторий лежат на эллиптических кривых, решения допускают квадратурное представление и являются периодическими.

Результаты подтверждены аналитически и верифицированы численно. Разработанный программный комплекс интегрирован в пакет Sage. Работа представляет практическую ценность для задач математического моделирования, требующих сохранения алгебраических инвариантов при дискретизации.

Методология основана на синтезе теории преобразований Кремоны, подхода Лагутинского и классической теории эллиптических функций. Доказана принципиальная возможность построения дискретных аналогов, структурно тождественных непрерывным системам.

Обычно принято рассматривать численные методы интегрирования дифференциальных уравнений как развитие приближенных методов вычисления интегралов. В этой связи весьма оригинальной мне представляется идея представления шага разностной схемы при помощи «непрерывной» квадратуры, равно как и полученные из нее следствия — приближенные решения, образующие периодические последовательности.

Полагаю, что результаты диссертации очень интересны важны для применения на практике, а ее автор — М.М. Гамбарян — заслуживает присуждения степени кандидата физ.-мат. наук.

Исходя из автореферата можно сделать вывод, что диссертационное исследование является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в федеральном автономном образовательном

учреждении — высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», а её автор, М.М. Гамбарян, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Кандидат физико-математических наук, доцент ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» *специальность 01.01.03 - Математическая физика*

Могилевский Илья Ефимович

« 09 » октября 2025 г.



Адрес: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2

Телефон: +7(495) 939-10-33, e-mail: mogilevsky@physics.msu.ru

Подпись И.Е. Могилевского удостоверяю.



ОТЗЫВ

на автореферат кандидатской диссертации

Гамбаряна Марка Микаеловича

«Обратимые разностные схемы для динамических систем

с квадратичной правой частью»,

представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006

при Федеральном Государственном автономном образовательном учреждении

высшего образования «Российский университет дружбы народов»

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности

«1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Работа посвящена разработке и анализу обратимых разностных схем для динамических систем с квадратичной правой частью. Основное достижение – создание вычислительного инструментария в системе Sage, позволяющего строить схемы, сохраняющие ключевые алгебраические свойства исходных непрерывных систем.

В центре внимания автора оказались эллиптические осцилляторы, в том числе задача о вращении твердого тела. В этом случае доказано, что предложенные схемы:

- сохраняют род интегральных кривых;
- допускают представление решений через эллиптические функции дискретного аргумента;
- обеспечивают периодичность решений при соответствующем выборе шага.

Практическая значимость работы заключается в создании надежного метода для высокоточного моделирования динамических систем с сохранением их алгебраических свойств. Разработанный подход позволяет избежать накопления ошибок, характерных для явных методов численного интегрирования, без необходимости применения итерационных методов, возникающих при применении схем неявных.

Особо хочется отметить бережное отношение автора диссертации к работам математиков прошлого. Так одна из глав кандидатской диссертации посвящена методу, разработанному М.Н. Лагутинским в 1910 году для отыскания алгебраических интегралов динамических систем. В те времена, конечно, нельзя было и подумать, что этот чисто аналитический, даже алгебраический метод найдет свое применение в численных методах интегрирования дифференциальных уравнений. В целом, кандидатская диссертация М.М. Гамбаряна представляет собой удачный пример соединения численных и аналитических методов интегрирования дифференциальных систем.

Полагаю, что кандидатская диссертация М.М. Гамбаряна посвящена актуальной теме, содержит оригинальные результаты и вносит вклад в развитие концепции геометрических интеграторов, а её автор – Марк Микаелович Гамбарян – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Рецензент:

Декан факультета математики и информатики

Учреждения образования «Гродненский государственный

университет имени Янки Купалы», *специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения*

кандидат физико-математических наук, доцент

«03» октября 2025 года



А.Ф. Проневич

Беларусь, 230023, Гродно, Ожешко, 22-326

Тел.: +375(152)39-50-41

Электронная почта: pranevich@grsu.by

Подпись декана факультета математики и информатики, доцента *Андрея Францевича Проневича* удостоверяю.



Отзыв на диссертацию М.М. Гамбаряна рассмотрен на заседании кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (протокол № 13 от 03.10.2025).

Заведующий кафедрой математического анализа,

дифференциальных уравнений и алгебры

Учреждения образования «Гродненский государственный

университет имени Янки Купалы»,

доктор физико-математических наук, профессор



А.А. Гринь

Подпись профессора *Александра Александровича Гриня* удостоверяю.

Зам. декана факультета математики и информатики



Т.Н. Ванькова

Отзыв

на автореферат диссертации Гамбаряна Марка Микаеловича «Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью», представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертация Гамбаряна Марка посвящена созданию и изучению одного из численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Этот метод появился в 1990-х годах и известен под несколькими именами -- метод Кагана, метода Хироты-Кимуры.

Как и другие геометрические интеграторы, этот метод не просто приближает решение, но и сохраняет ключевые математические свойства исходной непрерывной системы. Главным же его свойством является то, что получаемые на этом пути разностные схемы устанавливают взаимно-однозначное (бirationальное) соответствие между состояниями системы в разные моменты времени. Это позволяет вести вычисления как вперед, так и назад по времени без необходимости решения нелинейных уравнений.

Автор разработал и реализовал в системе компьютерной алгебры Sage программные инструменты для построения и анализа таких схем. Основные результаты показали, что для важного класса эллиптических осцилляторов (к которым относится, например, задача о вращении волчка) дискретная модель, построенная по обратимой схеме, полностью наследует свойства непрерывной: траектории лежат на эллиптических кривых, решение можно представить через эллиптические функции, а само движение является периодическим.

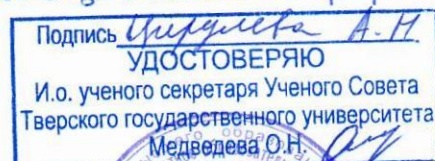
Хотелось бы обратить внимание автора на следующее обстоятельство. Если правая часть системы ОДУ заданы аналитически, как в рассмотренных в диссертации примерах, то с заданной и контролируемой точностью результаты можно получить неявной схемой с использованием итерационного метода Ньютона (A Hybrid Numerical Method for Analysis of Dynamics of the Classical Hamiltonian Systems P.G. Akishin, I.V. Puzynin, S.I. Vinitsky, Computers Math. Applic., V. 34, No. 2–4, pp. 45–73, 1997). Диссертанту следовало бы сравнить этот метод и метод Кагана, рассматриваемый в данной работе.

Тем не менее, полагаю, что выбранная автором тема актуальна, полученные результаты оригинальны и представляют несомненный научный интерес. Основные идеи диссертации изложены в автореферате четко и в полном соответствии с паспортом специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Доктор физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет, математический факультет, кафедра общей математики и математической физики:

специальность 1.2.2. - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Цирулев Александр Николаевич
02 октября 2025 г.



170100, Тверь, ул. Желябова, 33. Тел. +7 (4822) 34-24-52, Email: rector@tversu.ru



Отзыв

на автореферат диссертации Гамбаряна Марка Микаеловича **«Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью»**, представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Соискатель разработал и реализовал в системе Sage метод построения обратимых разностных схем для динамических систем с квадратичной правой частью. Установлено, что для класса эллиптических осцилляторов данные схемы полностью наследуют ключевые свойства непрерывного случая: точки траекторий лежат на эллиптических кривых, решения допускают квадратурное представление и являются периодическими.

Результаты подтверждены аналитически и верифицированы численно. Разработанный программный комплекс интегрирован в пакет Sage. Работа представляет практическую ценность для задач математического моделирования, требующих сохранения алгебраических инвариантов при дискретизации.

Методология основана на синтезе теории преобразований Кремоны, подхода Лагутинского и классической теории эллиптических функций. Доказана принципиальная возможность построения дискретных аналогов, структурно тождественных непрерывным системам.

Обычно принято рассматривать численные методы интегрирования дифференциальных уравнений как развитие приближенных методов вычисления интегралов. В этой связи весьма оригинальной мне представляется идея представления шага разностной схемы при помощи «непрерывной» квадратуры, равно как и полученные из нее следствия — приближенные решения, образующие периодические последовательности.

Полагаю, что результаты диссертации очень интересны важны для применения на практике, а ее автор — М.М. Гамбарян — заслуживает присуждения степени кандидата физ.-мат. наук.

Исходя из автореферата можно сделать вывод, что диссертационное исследование является законченной научно-квалификационной работой, соответствующей требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в федеральном автономном образовательном

учреждении — высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», а её автор, М.М. Гамбарян, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Кандидат физико-математических наук, доцент ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» *специальность 01.01.03 - Математическая физика*

Могилевский Илья Ефимович

« 09 » октября 2025 г.



Адрес: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2

Телефон: +7(495) 939-10-33, e-mail: mogilevsky@physics.msu.ru

Подпись И.Е. Могилевского удостоверяю.



ОТЗЫВ

на автореферат кандидатской диссертации

Гамбаряна Марка Микаеловича

«Обратимые разностные схемы для динамических систем

с квадратичной правой частью»,

представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006

при Федеральном Государственном автономном образовательном учреждении

высшего образования «Российский университет дружбы народов»

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности

«1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Работа посвящена разработке и анализу обратимых разностных схем для динамических систем с квадратичной правой частью. Основное достижение – создание вычислительного инструментария в системе Sage, позволяющего строить схемы, сохраняющие ключевые алгебраические свойства исходных непрерывных систем.

В центре внимания автора оказались эллиптические осцилляторы, в том числе задача о вращении твердого тела. В этом случае доказано, что предложенные схемы:

- сохраняют род интегральных кривых;
- допускают представление решений через эллиптические функции дискретного аргумента;
- обеспечивают периодичность решений при соответствующем выборе шага.

Практическая значимость работы заключается в создании надежного метода для высокоточного моделирования динамических систем с сохранением их алгебраических свойств. Разработанный подход позволяет избежать накопления ошибок, характерных для явных методов численного интегрирования, без необходимости применения итерационных методов, возникающих при применении схем неявных.

Особо хочется отметить бережное отношение автора диссертации к работам математиков прошлого. Так одна из глав кандидатской диссертации посвящена методу, разработанному М.Н. Лагутинским в 1910 году для отыскания алгебраических интегралов динамических систем. В те времена, конечно, нельзя было и подумать, что этот чисто аналитический, даже алгебраический метод найдет свое применение в численных методах интегрирования дифференциальных уравнений. В целом, кандидатская диссертация М.М. Гамбаряна представляет собой удачный пример соединения численных и аналитических методов интегрирования дифференциальных систем.

Полагаю, что кандидатская диссертация М.М. Гамбаряна посвящена актуальной теме, содержит оригинальные результаты и вносит вклад в развитие концепции геометрических интеграторов, а её автор – Марк Микаелович Гамбарян – заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Рецензент:

Декан факультета математики и информатики

Учреждения образования «Гродненский государственный

университет имени Янки Купалы», *специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения*

кандидат физико-математических наук, доцент

«03» октября 2025 года



А.Ф. Проневич

Беларусь, 230023, Гродно, Ожешко, 22-326

Тел.: +375(152)39-50-41

Электронная почта: pranevich@grsu.by

Подпись декана факультета математики и информатики, доцента *Андрея Францевича Проневича* удостоверяю.



Отзыв на диссертацию М.М. Гамбаряна рассмотрен на заседании кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (протокол № 13 от 03.10.2025).

Заведующий кафедрой математического анализа,

дифференциальных уравнений и алгебры

Учреждения образования «Гродненский государственный

университет имени Янки Купалы»,

доктор физико-математических наук, профессор



А.А. Гринь

Подпись профессора *Александра Александровича Гриня* удостоверяю.

Зам. декана факультета математики и информатики



Т.Н. Ванькова

Отзыв

на автореферат диссертации Гамбаряна Марка Микаеловича «Обратимые разностные схемы для динамических систем с квадратичной правой частью», представленной к защите в диссертационном совете ПДС 0200.006 при федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Российский университет дружбы народов» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Диссертация Гамбаряна Марка посвящена созданию и изучению одного из численных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Этот метод появился в 1990-х годах и известен под несколькими именами -- метод Кагана, метода Хироты-Кимуры.

Как и другие геометрические интеграторы, этот метод не просто приближает решение, но и сохраняет ключевые математические свойства исходной непрерывной системы. Главным же его свойством является то, что получаемые на этом пути разностные схемы устанавливают взаимно-однозначное (бirationальное) соответствие между состояниями системы в разные моменты времени. Это позволяет вести вычисления как вперед, так и назад по времени без необходимости решения нелинейных уравнений.

Автор разработал и реализовал в системе компьютерной алгебры Sage программные инструменты для построения и анализа таких схем. Основные результаты показали, что для важного класса эллиптических осцилляторов (к которым относится, например, задача о вращении волчка) дискретная модель, построенная по обратимой схеме, полностью наследует свойства непрерывной: траектории лежат на эллиптических кривых, решение можно представить через эллиптические функции, а само движение является периодическим.

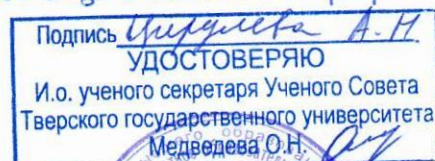
Хотелось бы обратить внимание автора на следующее обстоятельство. Если правая часть системы ОДУ заданы аналитически, как в рассмотренных в диссертации примерах, то с заданной и контролируемой точностью результаты можно получить неявной схемой с использованием итерационного метода Ньютона (A Hybrid Numerical Method for Analysis of Dynamics of the Classical Hamiltonian Systems P.G. Akishin, I.V. Puzynin, S.I. Vinitsky, Computers Math. Applic., V. 34, No. 2–4, pp. 45–73, 1997). Диссертанту следовало бы сравнить этот метод и метод Кагана, рассматриваемый в данной работе.

Тем не менее, полагаю, что выбранная автором тема актуальна, полученные результаты оригинальны и представляют несомненный научный интерес. Основные идеи диссертации изложены в автореферате четко и в полном соответствии с паспортом специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Доктор физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет, математический факультет, кафедра общей математики и математической физики:

специальность 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Цирулев Александр Николаевич
02 октября 2025 г.



170100, Тверь, ул. Желябова, 33. Тел. +7 (4822) 34-24-52, Email: rector@tversu.ru

