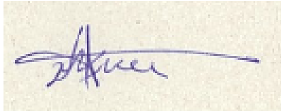
На правах рукописи



Баддур Али

Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена на кафедре Прикладной информатики и теории вероятностей федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов».

Научный руководитель:	доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», доктор физико-математических наук **Малых Михаил Дмитриевич**
Официальные оппоненты:	**Корпусов Максим Олегович,** доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математики физического факультета
	Цирулев Александр Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Тверской государственный университет», профессор кафедры общей математики и математической физики
	Васильев Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, ФГАБУ «Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН», старший научный сотрудник

Защита состоится 17 февраля 2023 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета ПДС 0200.006 при Российском университете дружбы народов по адресу: 115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, ауд. 214.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке РУДН.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, каб. 3Г, ученому секретарю диссертационного совета ПДС 0200.006.

Автореферат разослан «__» декабря 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
ПДС 0200.006,
канд. физ.-мат. наук Демидова А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задача многих тел на протяжении многих веков притягивает внимание исследователей. Математики XVIII-XIX веков стремились отыскать решение этой задачи в конечном виде. Для этого они искали алгебраических интегралы движения. Если динамическая система имеет достаточно много алгебраических интегралов, ее можно свести к квадратурам. В 1880-х годах Брунс доказал, задача многих тел не допускает других алгебраических интегралов движения, кроме десяти известных. Этих интегралов не достаточно для сведения задачи трех тел к квадратурам [1].

Это обстоятельство подтолкнуло к разработке численных методов интегрирования динамических систем. Наиболее простым для реализации численным методом интегрирования динамических систем является явный метод Рунге-Кутты. Этот метод сводит систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений, описывающая переход с одного слоя по времени на другой. Однако, алгебраические интегралы не сохраняются на приближенных решениях. Это приводит к нарушению фундаментальных законов природы (например, закону сохранения энергии). Поэтому такие методы вносят в модель новые, несвойственные ей явления.

Использование разностных методов, сохраняющих все алгебраические интегралы движения рассматриваемой динамической системы, позволит правильно «определить характер динамического процесса, используя лишь грубые вычисления с большим шагом сетки» [2]. Это обстоятельство делает конструирование и исследование разностных схем, сохраняющих все алгебраические интегралы движения, одной из актуальных задач моделирования динамических систем. При этом такие исследования естественно выполнять методами компьютерной алгебры [3].

Степень разработанности темы. Разностные методы интегрирования динамических систем вошли в употребление в начале XX века. Именно тогда был сконструирован самый распространенный метод интегрирования динамических систем — явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка (rk4). В то же время Рунге и Ричардсон предложили способы, позволяющие оценить точность приближенных решений путем сгущения сетки. Метод Ричардсона был применен в ряде практически важных задач Н.Н. Калиткиным, в школе которого был выработан целый ряд рекомендаций, позволяющих оценить порядок аппроксимации и ошибку численного метода интегрирования дифференциальных уравнений [4—9]. Благодаря этому теоретические предсказания относительно нового численного метода можно быстро проверить. Однако следует помнить, что ни один из этих методов не может дать решения задачи Коши для задачи трех тел с заданной точностью и полиномиальной сложностью, напр., в постановке, предложенной в [10].

В конце 1980-х годов Сурисом [11; 12] и Купером [13] были предложены симплектические методы Рунге-Кутты, сохраняющие гамильтонову структуру задачи многих тел и как следствие фазовый объем, см. также [14]. Эти схемы хорошо зарекомендовали себя в задачах небесной механике, в том числе для расчетов траекторий спутников. На каф. ПИ и ТВ РУДН симплектическим схемам были посвящены две канд. дисс. — М.Н. Геворкяна (науч. рук. — Д.С. Кулябов, 2013) [2] и Юй Ин (науч. рук. — Л.А. Севастьянов, 2020) [15].

Купер доказал, что симплектические схемы сохраняют линейные и квадратичные интегралы движения динамической системы. К сожалению, полная механическая энергия является квадратичной функцией только в линейных задачах. Поэтому в нелинейных задачах, в том числе в задаче многих тел, полная механическая энергия не сохраняется на приближенных решениях, найденных по симплектическим схемам.

Первая разностная схема для задачи многих тел, сохраняющая все ее алгебраические интегралы движения, была предложена Д. Гринспеном в 1992 г. [16—19] и независимо от него и в несколько иной форме Симо и Гонсалесом [20], затем эта схема несколько раз переоткрывалась [21].

Систематический подход к построению схем, сохраняющих полную механическую энергию динамических систем, был предложен в 2016 г. [22; 23] и получил название метод квадратизации энергии (invariant energy quadratization method, сокр. IEQ). В этих работах было предложено ввести новые переменные, в которых энергия записывается как квадратичная функция и поэтому сохраняется на решении, найденном по любой симплектической схеме в силу теоремы Купера.

Для задачи многих тел неоднократно предлагалось ввести новые координаты, более удобные с той или иной точки зрения. При этом обычно стараются уменьшить число искомых функций и сохранить гамильтонову структуру задачи. Однако в ряде случаев, например, при исследовании простого столкновения тел, это стремление приводит к существенному усложнению построения [24, гл. 6]. Поэтому М.Д. Малых предположил, что квадратизации всех алгебраических интегралов задачи многих тел можно добиться путем увеличения числа искомых функций.

Этот подход сулит построение целого семейства консервативных разностных схем на основе хорошо изученных симплектических схем Рунге-Кутты, имеющих высокий порядок аппроксимации.

Целью данной работы проектирование и исследования разностных схем для моделей движения многих тел, сохраняющих все алгебраические интегралы движения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

– Разработать метод проектирования разностных схем произвольного порядка аппроксимации, сохраняющих все алгебраические интегралы движения задачи многих тел.

– Разработать численный метод исследование моделей движения многих тел на основе спроектированных разностных схем и реализовать в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения компьютерных экспериментов.
– Протестировать реализацию путем вычисления порядков аппроксимации реализованных методов по методу Ричардсона-Калиткина на простейших тестовых примерах.
– Протестировать предложенную реализацию численного метода исследование моделей движения многих тел.

Для решения первой задачи используются симплектические схемы Рунге-Кутты, сохраняющие линейные и квадратичные интегралы, и концепция «квадратизации» энергии путем введения дополнительных переменных.

Ряд наработок студентов и аспирантов кафедры, связанные с решением обыкновенных дифференциальных уравнений по методу конечных разностей, собраны М.Д. Малых и Л. Гонсалесом в пакет fdm for sage, переданный в общественный доступ по адресу: `https://github.com/malykhmd/fdm`. Этот пакет был представлен на ITTTM'2022 [25]. Поэтому решение названных задач было выполнено путем добавления в этот пакет новых функций — оригинальной реализации неявного метода Рунге-Кутты, поддерживающего работы с таблицами Бутчера любого размера, и оригинальной реализации метода Ричардсона-Калиткина.

Научная новизна:

1. Предложен метод проектирования разностных схем произвольно большого порядка аппроксимации, сохраняющих все алгебраические интегралы движения задачи многих тел.
2. В пакет fdm for sage добавлены новые инструменты: реализация неявного метода Рунге-Кутты с адаптивным шагом и реализация метода Ричардсона-Калиткина.
3. Выполнено оригинальное исследование сохранения алгебраических интегралов движения задачи многих тел в плоских задачах 2 и 3 тел на схемах 2, 4 и 6 порядков аппроксимации.

Теоретическая и практическая значимость Разрабатываемые численные методы найдут применение в теоретических исследованиях динамических систем, богатых законами сохранения, но тем не менее не сводящихся к квадратурам, и особенно при исследовании задачи многих тел. Результаты диссертации могут быть использованы при создании учебных курсов по теме «Дифференциальные уравнения» и «Компьютерная алгебра».

Методология и методы исследования. В диссертации для вычисления приближенных решений использовались симплектические методы Рунге-Кутты, для апостериорной оценки совершаемых при этом ошибок — метод Ричардсона-Калиткина. Символьные и численные вычисления выполнялись в системе компьютерной алгебры Sage, созданные в рамках диссертационного исследования инструменты были интегрированы в пакет fdm for sage.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан алгоритм расчета приближенного решения динамической системы по неявному методу Рунге-Кутты, этот алгоритм был реализован в системе Sage и протестирован.
2. Метод Ричардсона-Калиткина реализован в системе Sage и протестирован.
3. Для задачи многих тел предложена новая система переменных, в которой все алгебраические интегралы являются квадратичными функциями.
4. На основе симплектических схем Рунге-Кутты впервые разработан метод проектирования разностных схем произвольно большого порядка аппроксимации, сохраняющих все алгебраические интегралы движения задачи многих тел. Схемы до 6-го порядка выписаны явно, порядки аппроксимации протестированы по методу Ричардсона-Калиткина.
5. Предложенный численный метод исследования моделей движения многих тел реализован в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения компьютерных экспериментов.

Достоверность Обоснованность результатов диссертации опирается на строго обоснованное теоретические исследования, все оригинальные теоремы, используемые в тексте диссертации, и их доказательства были опубликованы в рецензируемых журналах. Везде, где это возможно, проводилось сравнения полученного численного решения с аналитическими решениями. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных конференциях PCA'2020 и PCA'2021, ПОМИ, Санкт-Петербург, всероссийских конференциях с международным участием ITTM'2019 и ITTM'2021, РУДН, а также на научных семинарах: по вычислительной и прикладной математике ЛИТ ОИЯИ (Дубна, сентябрь 2021 г.) и «Математические методы в естественных науках» под рук. проф. А.Н. Боголюбова (МГУ, март 2022 г.).

Личный вклад. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, доказал ряд теорем, необходимых для конструирования разностных схем, самостоятельно разработал и реализовал ряд основных функций пакета fdm for sage, в т.ч. `richardson`, `richardson_plot`, `irk` и `irk_adaptive`, провел серию серия численных экспериментов в Sage.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, включенных в Перечень ВАК/РУДН, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 3 — в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **Введении** обосновывается актуальность проектирования и исследования разностных схем, сохраняющих все алгебраические интегралы движения динамических систем, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель и ставятся задачи работы. В последующих главах сначала описывается общий подход, позволяющий позволяющий проектировать такие схемы, на его основе конструируются разностные схемы, сохраняющие все алгебраические интегралы многих тел, затем идет апробация на тестовых примерах — плоских задач двух и трех тел.

В **первой главе** дан обзор конечно-разностных методов интегрирования динамических систем. Математическая модель, основанная на системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1,2, \ldots n, \tag{1}$$

называется динамической системой, при этом переменная t называется временем. Классическим примером такой модели является задача многих тел [24], которая описывается системой уравнений

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Здесь $\vec{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный в i-ое тело, а r_{ij} — расстояние между i-м и j-м телами. Обозначим скорость i-го тела как

$$\vec{v}_i = (u_i, v_i, w_i) = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$$

тогда система дифференциальных уравнений относительно координат тел и их скоростей принимает вид (1) с алгебраической правой частью:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \quad m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

Задача многих тел, как и все классические динамические системы, богата законами сохранения: законом сохранения импульса, момента импульса и энергии и законом движения центра тяжести системы. Эти законы можно записать как сохранение десяти алгебраических функций координат тел, их скоростей и времени. Эти функции называют классическими алгебраическими интегралами движения. В конце XIX века Брунс доказал, что любой алгебраический интеграл задачи многих тел выражается алгебраически через эти десять классических интегралов [1].

Этих интегралов достаточно для сведения задачи двух тел [26] к квадратурам. Это позволяет выписать решение задачи двух тел в элементарных функциях.

Однако десяти интегралов движения не достаточно для сведения к квадратурам задачи трех тел [1], поэтому ее приходится интегрировать численно.

Метод конечных разностей для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений вошел во всеобщее употребление в начале XX века, современное изложение предмета дано в [27; 28]. В диссертационном исследовании разностная схема интегрирования динамической системы (1) рассматривается как система алгебраических уравнений, которая описывает переход от значения переменной x, взятой в некоторый момент времени t, к значению этой переменной, взятой в следующей момент времени $t + \Delta t$. Это новое значение обозначается как $\hat{x}$, величина Δt называется шагом.

В первой главы описана реализация метода конечных разностей в Sage — пакет fdm for sage. Этот пакет разрабатывается в РУДН. В нем собраны наработки последних лет, в том числе и выполненные в рамках настоящего диссертационного исследования. Основные классы этого пакета написаны М.Д. Малых и Л. Гонсалесом [25]. Реализация численных методов в системе компьютерной алгебры позволяет использовать символьные выражения при описании метода (напр., записывать таблицы Бутчера в радикалах) и работать в различных числовых полях, быстро менять число бит, отводимых на одну десятичную дробь.

Разностная схема сохраняет выражение $g(x_1, \ldots, x_n)$, если из алгебраических уравнений, задающих эту разностную схему, следует, что

$$g(\hat{x}) = g(x).$$

Реализация явного метода Рунге-Кутты написана Л. Гонсалесом [25]. При ее помощи в диссертации повторены известные компьютерные эксперименты. Показано, что явные разностные схемы Рунге-Кутты сохраняют линейные интегралы движения, но не сохраняют квадратичные интегралы. С ростом t они меняются монотонным образом.

В конце первой главы описаны неявные симплектические схемы Рунге-Кутты, которые сохраняют все линейные и квадратичные интегралы в силу теоремы Купера [13]. Инструменты для работы с таблицами Бутчера симплектических методов Рунге-Кутты были разработаны Юй Ин в рамках ее диссертационного исследования [15]. Они добавлены в пакет fdm for sage.

В следующих двух главах, носящих вспомогательный характер, описаны новые инструменты. Они были разработаны для исследования задачи многих тел, но могут быть полезны при исследования других динамической системы.

Во **второй главе** описана реализация метода Калиткина-Ричардсона в пакете fdm, выполненная в рамках настоящего диссертационного исследования. Этот метод позволяет оценить точность интегрирования дифференциальных уравнений [4]. Показано, как по наклону диаграммы Ричардсона определить порядок аппроксимации системы дифференциальных уравнений разностной схемой. Этот инструмент используется далее для проверки реализации численных методов в пакете fdm.

В **третьей главе** описана реализация симплектического метода Рунге-Кутты в пакете fdm. При вычислении приближенного решения по неявным схемам на каждом шаге возникает система алгебраических уравнений относительно наклонов. Для ее решения необходимо использовать тот или иной численный метод. Это оставляет некоторый произвол в реализации любого неявного метода Рунге-Кутты. В представляемой реализации используется метод простых итераций. В качестве нулевого приближения для наклонов используется уже найденный наклон на предыдущем шаге.

Для простейшего из симплектических методов — метода средней точки — проведено исследование сходимости итерационного метода. Найдены ограничения на величину шага, которые используются далее для всех симплектических методов.

В пакете fdm имеются две реализации неявного метода Рунге-Кутты — функции `irk` и `irk_adaptive`, в первой используется постоянный шаг, во второй — адаптивный. Для решения задачи многих тел далее используется вторая.

Единственным аргументом этой функции является начальная задача, которая описана в стандартном для пакета fdm виде. Помимо него имеются следующие опции:

– `h` — адаптивный шаг, по умолчанию $h = 10^{-1}$,
– `eps` — параметр, характеризующий требуемую близость двух последовательных итераций, по умолчанию $\varepsilon = 10^{-10}$,
– `M` — максимальное число итераций, по умолчанию равно 10^2, при его превышении расчеты останавливаются и выдается ’error: the simple iteration method does not converge’,
– `tableau` — таблица Бутчера, записанная в стандартном для пакета fdm виде,
– `field` — поле, в котором ведутся вычисления, по умолчанию стандартная реализация $\mathbb{R}$ в Sage,
– `v` — выводить прогресс вычислений, по умолчанию `False`, эта функция полезна в тех случаях, когда вычисления занимают много времени.

Функция возвращает численное решение начальной задачи в стандартном для пакета fdm виде.

Рассмотрим внутреннее устройство функции. В первых ее строках

```
[f,x,x0,T]=problem.list()
t0=0
ans=[[t0]+x0]
a=tableau.a(field=field)
b=tableau.b(field=field)
c=tableau.c(field=field)
s=tableau.number_of_stages()
```

извлекаются необходимые для дальнейшего списки и числа:

– список переменных x,
– список f правых частей ОДУ, его элементами служат символьные выражения от x,t,
– числа x_0,t_0,T из поля `field`, характеризующие начальную задачу и отрезок, на котором она рассматривается,
– списки a,b,c элементов таблицы Бутчера,
– число стадий s.

Здесь же создается список `ans` точек приближенного решения и в него записывается начальная точка. Затем в символьном виде вычисляется якобиан J правой части

```
    jac=jacobian(f,x)
```

Производные считаются один раз и в символьном виде, что отличает эту реализацию от реализаций на чистом Python, разработчики которых не имели возможности выполнять дифференцирование без ошибок округления, часто весьма значительных.

Затем следует цикл по времени:

```
while t0<T:
    dt=field(h/jac.subs([t==t0]+[i==j for [i,j] \
       in zip(x,x0)]).norm())
    k=[problem.subs(f,[t0]+x0) for i in range(s)]
    delta = oo
    i=0
    while delta>eps:
        (...)
    t0=t0+dt
    x0=[x0_ + sum([b_*k__ for [b_,k__] in zip(b,k_)
   ])*dt \
        for [x0_,k_] in zip(x0,zip(*k))]
    ans.append([t0]+x0)
```

Здесь t_0 используется как текущее время, а x_0 — текущее значение для x. На каждом шаге вычисляется подходящий шаг Δt по формуле

$$\Delta t = \frac{h}{\|J\|}, \tag{3}$$

где используется найденное ранее символьное выражение для якобиана, и наклон $\vec{k}$, а также определяются значения вспомогательных величин $i = 0$ и $\delta = \infty$. Решение системы нелинейных уравнений для наклонов реализовано в виде цикла `while delta>eps`. После чего делается шаг по времени и определяется новое значение для x_0. Эти значения добавляются в список `ans` и так до тех пор, пока

$t_0 < T$. По достижению этого значения возвращается численное решение начальной задачи.

Остается рассмотреть подробнее решение системы для наклонов:

```
while delta>eps:
    kk = [problem.subs(f,[t0 +c[m]*dt] \
        + [x0_ + sum([a_*k__ for [a_,k__] \
        in zip(a[m],k_)])*dt \
        for [x0_,k_] in zip(x0,zip(*k))]) for m in
    range(s)]
    delta=(matrix(kk)-matrix(k)).norm()
    if i>M:
        print('error: (...)')
        break
    i=i+1
    k=kk
```

Здесь в первой строе вычисляется следующая итерация, затем вычисляется норма разности предыдущей и следующей итераций, обозначенная как δ. Вычисления ведутся до тех пор, пока $\delta > \varepsilon$ и прерываются, если число итераций i превосходит M.

В **четвертой главе** описано новое семейство консервативных разностных схем для задачи многих тел. Здесь сформулирована важнейшая задача диссертационного исследования: для задачи многих тел составить разностную схему, которая сохраняет все ее алгебраические интегралов точно и инвариантна относительно перестановок тел и обращении времени.

Для решения этой задачи используется метод квадратизации энергии: описана замена переменных, после которой все интегралы движения задачи многих тел становятся линейными или квадратичными и поэтому их сохраняет любая симплектическая схема Рунге-Кутты. Для отыскания такой замены, М.Д. Малых предложил ввести в рассмотрение помимо координат и скоростей тел дополнительные переменные: расстояния между телами

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$$

и обратные расстояния между телами

$$r_{ij}\rho_{ij} = 1.$$

Система (2) записана как система уравнений 1-го порядка относительно неизвестных

$$x_1, \dots, z_n, u_1, \dots, w_n, r_{12}, \dots, r_{n-1,n}, \rho_{12}, \dots, \rho_{n-1,n}.$$

В диссертации показано, что эта система состоит из трех связанных подсистем: системы для координат

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{4}$$

системы для скоростей

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma \frac{m_i m_j \rho_{ij}}{r_{ij}^2} \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i \right), \quad i = 1, \dots, n \tag{5}$$

системы для расстояний

$$\dot{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j), \quad i,j = 1, \dots, n; \; i \neq j. \tag{6}$$

и системы для обратных расстояний

$$\dot{\rho}_{ij} = -\frac{\rho_{ij}}{r_{ij}^2} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j), \quad i,j = 1, \dots, n; \; i \neq j. \tag{7}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1 (Али Баддур, 2021)**.** Система (4)-(7) обладает 10 классическими интегралами задачи многих тел и дополнительными интегралами

$$r_{ij}^2 - (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 - (z_i - z_j)^2 = \text{const}, \quad i \neq j \tag{8}$$

и

$$r_{ij} \rho_{ij} = \text{const}, \quad i \neq j. \tag{9}$$

Поскольку все классические интегралы задачи многих тел и дополнительные интегралы в новых переменных — квадратичные, любая симплектическая разностная схема Рунге-Кутты сохраняет эти интегралы точно.

При вычислении приближенного решения, на каждом шаге будут определятся новые значения не только для координат и скоростей тел, но и для вспомогательных величин r_{ij} и ρ_{ij}. Если в начальный момент были заданы только координаты и скорости тел, а вспомогательные переменные определены равенствами

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad \rho_{ij} = \frac{1}{r_{ij}},$$

то эти равенства сохраняются при дальнейших шагах точно, поскольку вспомогательные интегралы (8) и (9) — квадратичные. Поэтому величины r_{ij} и ρ_{ij} не теряют своего исходного смысла расстояний между телами и обратных расстояний между телами.

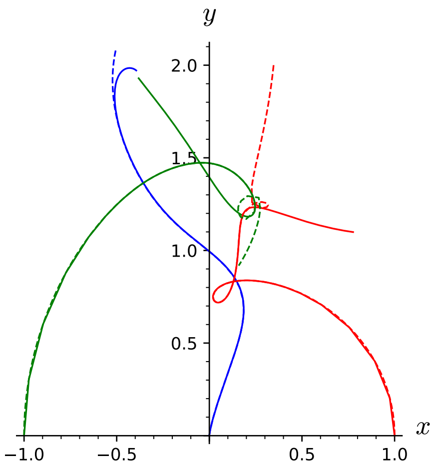


Рис. 1 — Тест с существенным сближением тел. Траектории трех тел при $0 < t < 2$, полученные по двухстадийной схеме с дополнительными переменными, адаптивный шаг $h = 1$, изображены сплошными линиями, а траектории, полученные по схеме Рунге-Куттты 4-го порядка с постоянным шагом $\Delta t = 0.02$, — пунктиром.

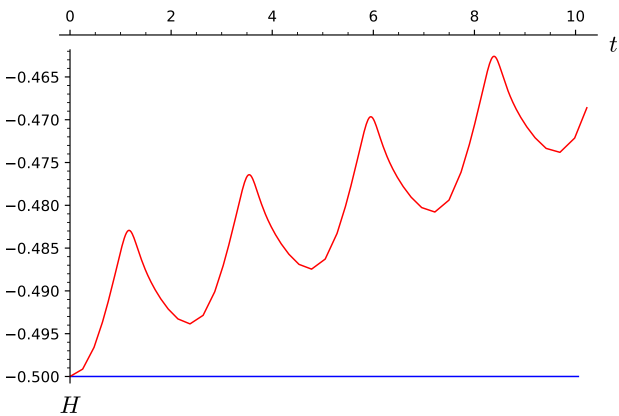


Рис. 2 — Задача двух тел. Изменение интеграла H при расчетах по схеме средней точки с адаптивным шагом $h = 1$ при введении дополнительных переменных (синий) и без введения дополнительных переменных (красный).

Таким образом, симплектический метод Рунге-Кутты, примененный к задаче многих тел, в формулировку которой ведены дополнительные переменные, сохраняет все алгебраические интегралы движения и инвариантен относительно перестановок тел. Схема средней точки, очевидно, инварианта относительно обращения времени.

<u>**Пятая глава**</u> посвящена тестированию семейства консервативных разностных схем для задачи многих тел. В третьей главе была представлена реализация неявного метода Рунге-Кутты в системе fdm, которая поддерживает работу с любыми таблицами Бутчера. Для экспериментов в пятой главе используется симплектический метод Рунге-Кутты 4-го порядка с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Результаты вычислений сравниваются

– с результатами вычисления по явной схеме Рунге-Кутты того же порядка,
– с результатами вычисления, выполненными по тому же симплектическому методу Рунге-Кутты, но примененному к системе без введения дополнительных переменных.

Представлены результаты тестирования на следующих задачах:

1. задача двух тел,
2. плоская задача трех тел равной массы:
   а) периодические решения (случаи Лагранжа и Эйлера, «восьмерка» Мура),
   б) траектории с петельками,
   в) тест с существенным сближением тел.

Компьютерные эксперименты подтвердили возможность организации вычислений по таким схемам. В экспериментах интегралы движения не могли сохраняться точно, поскольку на каждом шаге система алгебраических уравнений решалась численно. Вместо этого наблюдалось сохранение всех алгебраических интегралов с заданной точностью.

Компьютерные эксперименты показали, что с ростом времени:

– траектории, вычисленные по явному и по симплектическому методам Рунге-Кутты, отдаляются друг от друга все заметнее с потерей какого либо сходства (см. рис. 1),
– траектории, вычисленные по симплектическому методу Рунге-Кутты с и без введения дополнительных переменных, совпадают с графической точностью.

Классические линейные и квадратичные интегралы задачи многих тел сохраняются точно на решениях, найденных по симплектическому методу Рунге-Кутты, в силу теоремы Купера. При этом не важно, введены ли дополнительные переменные или нет. Это подтверждает компьютерный эксперимент. Например, в опытах с задачей двух тел изменение линейных интегралов остается на уровне ошибки округления, а изменения квадратичного интеграла L остаются в пределах 10^{-11} как при введении дополнительных переменных, так и без их введения.

Однако, если не ввести дополнительные переменные, то интеграл энергии не будет сохраняться, если не ввести дополнительные переменные, что хорошо видно на рис. 2. Если же ввести дополнительные переменные, то изменение интеграла энергии остается в пределах 10^{-10}. Масштаб рис. 2 не позволяет заметить это изменение.

Предложенный метод существенно сложнее явного метода Рунге-Кутты, недостатки которого хорошо проявились в тесте, когда энергия внезапно меняется. По затрате ресурсов предложенный метод близок к симплектическим методам Рунге-Кутты. В сравнении с ним, удается удерживать изменение энергии на заданном уровне ценой незначительного усложнения метода.

В **Заключении** приведены основные результаты работы.

В настоящем диссертационном исследовании для задачи многих тел были построены разностные схемы, которые сохраняет все ее алгебраические интегралы точно и инвариантна относительно перестановок тел. Предложенный способ позволяет строить схемы сколь угодно большого порядка аппроксимации, в тексте выписаны явно схемы 2, 4 и 6 порядков. Схема 2-го порядка — схема средней точки — инвариантна и относительно обращения времени.

На основе этих разностных схем был разработан численный метод исследования моделей движения многих тел, этот метод был реализован в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения компьютерных экспериментов в пакете fdm for sage.

Компьютерные эксперименты подтвердили, что предложенный метод позволяет удерживать изменение классических алгебраические интегралы задачи многих тел на заданном уровне, а по затрату ресурсов близок к симплектическим методам Рунге-Кутты.

Правильность теоретических предсказаний относительно порядков аппроксимации была проверена по методу Ричардсона-Калиткина, для чего в пакет fdm for sage были добавлена оригинальная реализация этого метода.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus

A1. *Baddour, A.* On periodic approximate solutions of dynamical systems with quadratic right-hand side [Text] / A. Baddour, M. Malykh, L. Sevastianov // J. Math. Sci. — 2022. — Vol. 261. — P. 698—708.

A2. *Baddour, A.* On difference schemes for the many-body problem preserving all algebraic integrals [Text] / A. Baddour, M. Malykh // Phys. Part. Nuclei Lett. — 2022. — Vol. 19. — P. 77—80.

A3. On the quadratization of the integrals for the many-body problem [Text] / Y. Ying [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 24. — URL: https://www.mdpi.com/2227-7390/9/24/3208.

В изданиях из списков РУДН и ВАК РФ

A4. *Baddour, A.* Richardson–Kalitkin method in abstract description [Text] / A. Baddour, M. D. Malykh // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2021. — Vol. 29, no. 3. — P. 271—284. — URL: https://journals.rudn.ru/miph/article/view/27531.

A5. Numerical determination of the singularity orderof a system of differential equations [Text] / A. Baddour [et al.] // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. — 2020. — Vol. 28, no. 1. — P. 17—34. — URL: https://journals.rudn.ru/miph/article/view/23694.

В сборниках трудов конференций

A6. Dynamic systems with quadratic integrals [Text] / A. Baddour [et al.] // Polynomial computer algebra. — St. Petersburg, 2020. — URL: https://pca-pdmi.ru/2020.

A7. Dynamical systems with a quadratic right-hand side [Text] / A. Baddour [et al.] // Polynomial computer algebra. — St. Petersburg, 2021. — URL: https://pca-pdmi.ru/2021.

A8. *Baddour, A.* On the usage of the midpoint method in theory of dynamical systems [Text] / A. Baddour, M. D. Malykh, Yu Ying // Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems 2021 (ITTMM 2021). — Moscow, 2021. — URL: https://events.rudn.ru/event/107/.

Список литературы

1. *Уиттекер, Э. Т.* Аналитическая динамика [Текст] / Э. Т. Уиттекер. — 2-е изд. — Москва : УРСС, 2004.
2. *Геворкян, М. Н.* Анализ составных симплектических методов и симплектических методов Рунге-Кутта на длительных интервалах времени [Текст] : дис. … канд. / Геворкян М. Н. — Российский университет дружбы народов, 2013.
3. *Blinkov, Y. A.* On computer algebra aided numerical solution of ODE by finite difference method [Текст] / Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt // International Conference Polynomial Computer Algebra / под ред. N. N. Vassiliev. — St. Peterburg : VVM, 2019. — С. 29—31.
4. Вычисления на квазиравномерных сетках [Текст] / Н. Н. Калиткин [и др.]. — Москва : Физматлит, 2005.

5. *Belov, A. A.* Geometrically adaptive grids for stiff Cauchy problems [Текст] / A. A. Belov, N. N. Kalitkin, I. P. Poshivaylo // Doklady Mathematics. — 2016. — Т. 93, № 1. — С. 112—116.

6. *Belov, A. A.* Nonlinearity Problem in the Numerical Solution of Superstiff Cauchy Problems [Текст] / A. A. Belov, N. N. Kalitkin // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2016. — Т. 8, № 6. — С. 638—650.

7. Explicit methods for integrating stiff Cauchy problems [Текст] / A. A. Belov [и др.] // Doklady Mathematics. — 2019. — Т. 99, № 2. — С. 230—234.

8. *Корпусов, М. О.* Аналитико-численное исследование процесса горения в нелинейной среде [Текст] / М. О. Корпусов, Д. В. Лукьяненко, А. Д. Некрасов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2018. — Т. 58, № 9. — С. 1553—1563.

9. О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями [Текст] / М. О. Корпусов [и др.] // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 2. — С. 43—78.

10. *Васильев, Н. Н.* Вычислительная сложность задачи Коши для задачи трёх тел [Текст] / Н. Н. Васильев, Д. А. Павлов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 448. — С. 80—95.

11. *Сурис, Ю. Б.* Сохранение симплектической структуры при численном решении гамильтоновых систем [Текст] / Ю. Б. Сурис // Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: сборник научных трудов / под ред. С. С. Филиппов. — Москва : Ин-т прикладной математики АН СССР, 1988. — С. 138—144.

12. *Suris, Y. B.* Hamiltonian methods of Runge-Kutta type and their variational interpretation [Текст] / Y. B. Suris // Math. Model. — 1990. — Т. 2. — С. 78—87.

13. *Cooper, G. J.* Stability of Runge–Kutta methods for trajectory problems [Текст] / G. J. Cooper // IMA J. Numer. Anal. — 1987. — Т. 7. — С. 1—13.

14. *Hairer, E.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations [Текст] / E. Hairer, G. Wanner, C. Lubich. — Berlin Heidelberg New York : Springer, 2000.

15. *Юй Ин.* Численно-аналитические методы в задачах математического моделирования [Текст] : дис. … канд. / Юй Ин. — Российский университет дружбы народов, 2020.

16. *Greenspan, D.* Completely Conservative and Covariant Numerical Methodology for N-Body Problems With Distance-Dependent Potentials [Текст] / D. Greenspan. — 1992. — eprint: http://hdl.handle.net/10106/2267. — Technical Report no. 285.

17. *Greenspan, D.* Completely conservative, covariant numerical methodology [Текст] / D. Greenspan // Computers & Mathematics with Applications. — 1995. — Т. 29, № 4. — С. 37—43.

18. *Greenspan, D.* Completely conservative, covariant numerical solution of systems of ordinary differential equations with applications [Текст] / D. Greenspan // Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. — 1995. — Т. 65. — С. 63—87.

19. *Greenspan, D.* N-Body Problems and Models [Текст] / D. Greenspan. — World Scientific, 2004.

20. *Simo, J. C.* Assessment of Energy-momentum and Symplectic Schemes for Stiff Dynamical Systems [Текст] / J. C. Simo, M. A. González // American Society of Mechanical Engineers. — 1993.

21. *Graham, E.* A note on the equivalence of two recent time-integration schemes for N-body problems [Текст] / E. Graham, G. Jelenić, M. A. Crisfield // Communications in Numerical Methods in Engineering. — 2002. — Т. 18. — С. 615—620.

22. *Yang, X.* Efficient linear schemes with unconditional energy stability for the phase field elastic bending energy model [Текст] / X. Yang, L. Ju // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2016. — Нояб. — Т. 315.

23. *Yang, X.* Linear and Unconditionally Energy Stable Schemes for the binary Fluid-Surfactant Phase Field Model [Текст] / X. Yang, L. Ju // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — Янв. — Т. 318.

24. *Маршал, К.* Задача трех тел [Текст] / К. Маршал. — Москва-Ижевск,R & C, 2004.

25. *Гонсалес, Л.* О новом пакете для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в Sage [Текст] / Л. Гонсалес, М. Д. Малых // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. Материалы Всероссийской конференции с международным участием. Москва, РУДН, 16–20 апреля 2022 г. — Москва : РУДН, 2022. — URL: https://events.rudn.ru/event/136/.

26. *Холшевников, К. В.* Задача двух тел: Учеб. пособие [Текст] / К. В. Холшевников, В. Б. Титов. — СПб : СПбГУ, 2007.

27. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы [Текст] / Н. Н. Калиткин. — 2-е изд. — БХВ-Петербург, 2011.

28. *Hairer, E.* Solving Ordinary Differential Equations I [Текст] : Nonstiff Problems / E. Hairer, G. Wanner, S. P. Nørsett. — 3-е изд. — Springer, 2008.

Баддур Али
Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел

Предложен новый подход к построению разностных схем любого порядка для задачи многих тел, которые сохраняют все ее алгебраические интегралы движения. Введены дополнительные переменные, а именно расстояния и обратные расстояния между телами, и выписана система дифференциальных уравнений относительно координат, скоростей и дополнительных переменных. В этом случае система теряет гамильтонову форму, но все классические интегралы движения рассматриваемой задачи многих тел, а также новые интегралы, связывающие координаты тел и дополнительные переменные, описываются линейными или квадратичными многочленами в этих новых переменных. Поэтому любая симплектическая схема Рунге-Кутты сохраняет эти интегралы точно. Приводятся обоснование предлагаемого подхода. Для иллюстрации теории представлены результаты численных экспериментов для задачи двух и трёх телах на плоскости. Для проведения компьютерных экспериментов оригинальный пакет FDM for Sage дополнен новыми функциями.

Baddour Ali Adel
Conservative difference schemes for many-body motion models

A new approach to the construction of difference schemes of any order for the many-body problem that preserves all its algebraic integrals is proposed herein. We introduced additional variables, namely distances and reciprocal distances between bodies, and wrote down a system of differential equations with respect to the coordinates, velocities, and the additional variables. In this case, the system lost its Hamiltonian form, but all the classical integrals of motion of the many-body problem under consideration, as well as new integrals describing the relationship between the coordinates of the bodies and the additional variables are described by linear or quadratic polynomials in these new variables. Therefore, any symplectic Runge–Kutta scheme preserves these integrals exactly. The evidence for the proposed approach is given. To illustrate the theory, the results of numerical experiments for the two-body and three-body problem on a plane are presented. For computer experiments, the original package FDM for Sage is supplemented with new functions.

Баддур Али

Исследование консервативных разностных схем в моделях движения многих тел

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________