

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН
*02.00.00 «Компьютерные и
информационные науки»*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Дифференциальная геометрия и топология

Рекомендуется для направления подготовки

02.03.01 – Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины:

Целью дисциплины является овладение современным математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Универсальные компетенции			
	-	-	-
Общепрофессиональные компетенции			
	ОПК-1	Аналитическая геометрия Общая алгебра Компьютерная алгебра Дискретная математика Математическая логика Теория конечных графов Математический анализ Дифференциальные уравнения Теория вероятностей и математическая статистика Стохастический анализ Функциональный анализ Теоретическая механика	-
Профессиональные компетенции (вид профессиональной деятельности)			
	-	-	-

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1

(указываются в соответствии с ОС ВО РУДН)

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, **дифференциальной геометрии и топологии**, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

- ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

- ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности
- ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия, обозначения и методы дифференциальной геометрии и топологии;
- формулировки утверждений и методы их доказательства;
- корректные постановки классических задач дифференциальной геометрии;
- основные области приложения дифференциальной геометрии.

Уметь:

- решать задачи теоретического характера в дифференциальной геометрии и топологии;
- уметь грамотно пользоваться языком предметной области,
- ориентироваться в постановках классических задач дифференциальной геометрии,
- применять методы дифференциальной геометрии для решения задач,
- ориентироваться в разделах дифференциальной геометрии и уметь анализировать и синтезировать информацию по данному предмету, полученную из разных источников.

Владеть:

- математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии,
- умением видеть прикладной аспект в решении задач дифференциальной геометрии,
- методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр В
Аудиторные занятия (всего)	54	54
В том числе:		
<i>Лекции</i>	18	18
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>	36	36
Самостоятельная работа (всего)	54	54
Общая трудоемкость	час	108
	зач. ед.	3

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Необходимые сведения из алгебры и аналитической геометрии.	Понятие группы. Абелева группа. Примеры групп, в частности группы линейных операторов (матриц). Понятие линейного пространства. Базис линейного пространства. Компоненты вектора. Матрица линейного оператора. Замена базиса. Преобразование компонент

		<p>вектора при замене базиса. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.</p> <p>Евклидово пространство. Матрица Грама и метрический тензор. Определение углов и расстояний с помощью скалярного произведения. Преобразование метрического тензора при замене базиса.</p> <p>Ориентация тройки векторов. Ориентация пространства. Векторное и смешанное произведения. Их геометрический смысл.</p> <p>Алгебра Грассмана. Поливекторы и внешнее произведение как пример алгебры Грассмана. Векторное и смешанное произведение как частный случай внешнего произведения. Ориентированные объем и площадь.</p>
2	Классическая дифференциальная геометрия.	<p>Основы теории кривых на плоскости и в пространстве. Параметрическое представление. Натуральный параметр. Репер Френе, формулы Френе--Серре, кривизна и кручение. Вывод основных формул для случая произвольного параметра. Частный случай для плоскости. Эвольвента, эволюта, подера, эквидистантная кривая.</p> <p>Основы теории поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Нормальная кривизна поверхности. Первая квадратичная форма. Метрика на поверхности. Вторая квадратичная форма. Главные кривизны поверхности. Средняя кривизна и кривизна Гаусса. Классификация поверхностей в зависимости от знака кривизны Гаусса. Внутренняя геометрия поверхностей.</p>
3	Элементы общей дифференциальной геометрии.	<p>Представление о многообразии, как обобщении поверхностей в трехмерном пространстве. Карта, атлас и диффеоморфизмы.</p> <p>Криволинейные системы координат. Преобразование координат. Матрица Якоби и определитель Якоби. Примеры криволинейных систем координат. Базис в виде векторного поля. Метрика на сфере: декартова система координат, сферическая система координат и стереографическая система координат.</p> <p>Псевдоевклидовы пространства. Пространство Минковского. Пример псевдосферы. Метрика на псевдосфере.</p>
4	Тензорная алгебра.	<p>Понятие сопряженного линейного пространства. Ковариантные и контравариантные векторы. Тензорные обозначения, правило суммирования Эйнштейна. Валентность тензоров. Базисные тензоры. Компоненты тензоров. Преобразование компонент тензоров при смене базиса.</p> <p>Симметричные тензоры. Основные свойства. Метрический тензор как иллюстративный пример.</p> <p>Асимметричные тензоры. Косые формы. Внешнее произведение косых форм. Символы Леви-Чевиты. Оператор Ходжа. Еще раз о внешней алгебре. Векторное произведение как внешнее и оператор Ходжа.</p>

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Семина	СРС	Всего час.
1.	Необходимые сведения из алгебры и аналитической геометрии.	4	8	13	25
2.	Классическая дифференциальная геометрия.	5	10	13	28
3.	Элементы общей дифференциальной геометрии.	4	8	13	25
4.	Тензорная алгебра.	5	10	15	30
	<i>Всего часов</i>	18	36	54	108

6. Лабораторный практикум _____ не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тема семинарского занятия	Трудоемкость (час.)
1.	1	Повторение необходимых сведений из алгебры: базис линейного пространства, преобразование базиса, компонент вектора, матрицы оператора. Метрический тензор и скалярное произведение.	2
2.	1	Дополнительные сведения из алгебры. Внешняя алгебра (алгебра Грассмана) на примере поливекторов. Вывод формул для векторного и смешанного произведения с помощью операции внешнего произведения. Параметрические уравнения основных кривых.	2
3.	2	Сводка основных понятий и формул. Вычисление репера Френе. Вычисление кривизны и кручения. Параметрическое уравнение эволюты, эвольвенты, подеры.	2
4.	2	Вычисление первой и второй квадратичных форм для различных поверхностей. Вычисление главных кривизн, средней кривизны и кривизны Гаусса.	2
5.	3	Различные системы криволинейных координат. Преобразование из одной в другую. Кривые на поверхностях.	2
6.	3	Метрика на сфере: декартовы координаты, сферические координаты и стереографическая проекция. Метрика на псевдосфере и аналогичный пример трех систем координат.	2
7.	4	Знакомство с тензорными обозначениями. Простейшие примеры. Векторы, ковекторы, тензоры разной валентности. Преобразование компонент тензоров.	2
8.	4	Метрический тензор. Опускание и подъем индексов. Косые формы.	2
9.	4	Повторение. Консультации.	2
	Итого:		18

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения учебных занятий (в том числе для практического и лекционного типов занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации).

Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для проведения обучающимися самостоятельной работы и компьютерного тестирования обучающихся (при необходимости).

9. Информационное обеспечение дисциплины

а) программное обеспечение:

- ОС Linux, офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0), ПО для просмотра pdf (например, evince (лицензия GPL-2+ CC-BY-SA-3.0)), Gnuplot (лицензия LGPL-2.1), dev-python/matplotlib (лицензия BitstreamVera BSD matplotlib MIT OFL-1.1), Scilab (Лицензия CeCILL, свободная, совместимая с GNU GPL v2)

б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

- Сайт библиотеки РУДН <http://lib.rudn.ru/>
- ТУИС <http://esystem.pfur.ru/>

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

- Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Мищенко, А.С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии : учебник / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. - Москва : Физматлит, 2004. - 300 с. - ISBN 978-5-9221-0442-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69322>
- Шаров, Г.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии / Г.С. Шаров, А.М. Шелехов, М.А. Шестакова. - Москва : МЦНМО, 2005. - 112 с. - ISBN 5-94057-207-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63244>

б) дополнительная литература:

- Фиников С. — Курс дифференциальной геометрии. — Москва : URSS, 2017. — 343 с.
- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 1. — Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 336 с. — ISBN 9785453000470.
- Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. В 3 т. Т. 2. — Геометрия и топология многообразий. — 6-е изд. — Москва : УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 304 с. — ISBN 9785453000487.
- Мищенко А. С., Фоменко А. Т. — Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 305 с. — ISBN 9785971026815.
- Мищенко А. С., Фоменко А. Т. — Курс дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : Едиториал УРСС, 2020. — 504 с. — ISBN 9785971067467.
- Новиков С. П., Тайманов И. А. — Современные геометрические структуры и поля. — Москва : МЦНМО, 2005. — 584 с. — ISBN 5940571026.
- Норден А. П. — Теория поверхностей. — 2-е изд. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 264. — (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия)). — ISBN 978597106234.
- Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 1. — Евклидовы пространства и аффинные пространства. Тензорный анализ. Математические основы специальной теории относительности. — Москва : УРСС, 2014. — 352 с. —

ISBN 9785396005778.

- Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. В 2 т. Т. 2. — Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности. — Москва : УРСС, 2014. — 336 с. — ISBN 9785396005785.
- Степанов С. С. — Векторы, тензоры и формы: инструкция по применению. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — ISBN 9785971066910. — URL: http://synset.com/pdf/steps_vec.pdf.
- Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. — Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : ЛЕНАНД, 2016. — 416 с. — ISBN 9785971024484.
- Шаров Г. С., Шелехов А. М., Шестакова М. А. — Дифференциальная геометрия и топология в задачах. — Москва : ЛЕНАНД, 2017. — 121 с. — ISBN 9785971037439.
- Зорич В. А. — Математический анализ. — Т. 1. — 5-е изд. — Москва : МЦНМО, 2007. — 664 с. — ISBN 5940570569.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 1. — Основы алгебры. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574538.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 2. — Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 9785940574545.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 т. Т. 3. — Основные структуры алгебры. — Москва : МЦНМО, 2009. — 272 с. — ISBN 9785940574552.
- Федорчук В. В. — Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. /. — Под ред. Л. А. Николова. — Москва : Издательство Московского университета, 1990. — 328 с. — ISBN 521100941X.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один модуль. Промежуточный контроль знаний предусматривает: проведение контроля знаний (контрольных работ, тестов на теорию и на решение типовых задач).

- Контрольные работы студенты делают в часы, отведённые на самостоятельную работу и сдают преподавателю в рукописном виде (в случае удаленного обучения выкладывают фотографии/скан в ТУИС). Преподаватель может попросить дополнительно разъяснить ход решения той или иной задачи и учесть ответ обучающегося при выставлении оценки за контрольную.
- Тесты выполняются с помощью ТУИС. Сроки сдачи указаны в соответствующем разделе. Проверка происходит автоматически. Студенты могут обратиться к преподавателю если имеют сомнения в правильности автоматической проверки.

11.1 Структура семинарских занятий

Во время семинарских занятий учащиеся решают задачи по темам, изученным во время лекций. Преподаватель также отвечает на возникшие у студентов вопросы по теме дисциплины.

11.2. Методические указания по самостоятельному освоению теоретического материала по дисциплине

Самостоятельная работа студента предусматривает:

- изучение текстовых учебных материалов, видеоматериалов и книг из списка литературы,
- решение задач из контрольных работ,
- прохождение тестов направленных на проверку теоретических знаний
- прохождение тестов, направленных на проверку умения решать типовые задачи.

11.3. Методические указания по подготовке к контрольным мероприятиям

Контрольные мероприятия по дисциплине проводятся в форме контрольных работ и тестов. Вопросы и задания для подготовки к контрольным мероприятиям размещены в соответствующем разделе ТУИС (<http://esystem.pfur.ru>) и ФОС. Сроки выполнения указаны в соответствующих разделах ТУИС.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

ФОС по дисциплине представлен в приложении к данной программе.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

Разработчики:

доцент кафедры прикладной информатики
и теории вероятностей, к.ф.-м.н.



М.Н. Геворкян

Руководитель программы

Заведующий кафедрой
прикладной информатики
и теории вероятностей, д.т.н., проф.



К.Е. Самуйлов

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Дифференциальная геометрия и топология

(наименование дисциплины)

02.03.01 Математика и компьютерные науки

(код и наименование направления подготовки)

бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Дифференциальная геометрия и топология

название

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки/академический бакалавр

шифр

название

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Формы контроля уровня освоения ООП			Баллы раздела
		Контрольная работа	Промежуточный тест	Итоговый тест	
ОК-7, ОПК-1	Необходимые сведения из алгебры и аналитической геометрии.	20	10	20	25
ОК-7, ОПК-1	Классическая дифференциальная геометрия.		10		25
ОК-7, ОПК-1	Элементы общей дифференциальной геометрии.	20	10		25
ОК-7, ОПК-1	Тензорная алгебра.		10		25
ИТОГО		40	40	20	100

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1

(указываются в соответствии с ОС ВО РУДН)

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, **дифференциальной геометрии и топологии**, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

- ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук
- ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности
- ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

Балльно-рейтинговая система оценки уровня знаний

Сводная оценочная таблица дисциплины

Раздел/Тема	Форма контроля уровня освоения ООП			Баллы
	Контрольная работа	Тест	Итоговый тест	
Необходимые сведения из алгебры и аналитической геометрии.	20	10	20	25
Классическая дифференциальная геометрия.		10		25
Элементы общей дифференциальной геометрии.	20	10		25
Тензорная алгебра.		10		25
Итого	40	40	20	100

Таблица соответствия баллов и оценок

Баллы БРС	Традиционные оценки РФ	Оценки ECTS
95 - 100	5	A
86 - 94		B
69 - 85	4	C
61 - 68	3	D
51 - 60		E
31 - 50	2	FX
0 - 30		F
51-100	Зачет	Passed

Правила применения БРС

1. Раздел (тема) учебной дисциплины считаются освоенными, если студент набрал более 50 % от возможного числа баллов по этому разделу (теме).
2. Студент не может быть аттестован по дисциплине, если он не освоил все темы и разделы дисциплины, указанные в сводной оценочной таблице дисциплины.
3. По решению преподавателя и с согласия студентов, не освоивших отдельные разделы (темы) изучаемой дисциплины, в течение учебного семестра могут быть повторно проведены мероприятия текущего контроля успеваемости или выданы дополнительные учебные задания по этим темам или разделам. При этом студентам за данную работу засчитывается минимально возможный положительный балл (51 % от максимального балла).
4. При выполнении студентом дополнительных учебных заданий или повторного прохождения мероприятий текущего контроля полученные им баллы засчитываются за конкретные темы. Итоговая сумма баллов не может превышать максимального количества баллов, установленного по данным темам (в соответствии с приказом Ректора № 564 от 20.06.2013). По решению преподавателя предыдущие баллы, полученные студентом по учебным заданиям, могут быть аннулированы.

5. График проведения мероприятий текущего контроля успеваемости формируется в соответствии с календарным планом курса. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
6. Время, которое отводится студенту на выполнение мероприятий текущего контроля успеваемости, устанавливается преподавателем. По завершении отведенного времени студент должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет. Точные сроки устанавливаются в соответствующих разделах страницы курса на портале ТУИС.
7. Использование источников (в том числе конспектов лекций и материалов семинаров) во время выполнения контрольных мероприятий возможно только с разрешения преподавателя.
8. Отсрочка в прохождении мероприятий текущего контроля успеваемости считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки, заверенной круглой печатью в поликлинике № 25, предоставляемой преподавателю не позднее двух недель после выздоровления. В этом случае выполнение контрольных мероприятий осуществляется после выздоровления студента в срок, назначенный преподавателем. В противном случае, отсутствие студента на контрольном мероприятии признается не уважительным.
9. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил 31-50 баллов, т. е. FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом по усмотрению преподавателя аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период проведения пересдач.

Коды компетенций	Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине	
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии , дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	Знать	<ul style="list-style-type: none"> • основные понятия, обозначения и методы дифференциальной геометрии и топологии; • формулировки утверждений и методы их доказательства; • корректные постановки классических задач дифференциальной геометрии; • основные области приложения дифференциальной геометрии •
		Уметь	<ul style="list-style-type: none"> • решать задачи теоретического характера в дифференциальной геометрии и топологии; • уметь грамотно пользоваться языком предметной области, • ориентироваться в постановках классических задач дифференциальной геометрии, • применять методы дифференциальной геометрии для решения задач, • ориентироваться в разделах дифференциальной геометрии и уметь анализировать и синтезировать информацию по данному предмету, полученную из разных источников.
		Владеть	<ul style="list-style-type: none"> • математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии, • умением видеть прикладной аспект в решении задач дифференциальной геометрии, • методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

Примерный перечень оценочных средств

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Контрольная работа	Средство контроля, организованное как аудиторное занятие, на котором обучающимся необходимо самостоятельно продемонстрировать усвоение учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины.	Комплект заданий для контрольных работ
3	Итоговый тест	Оценка работы студента в течение семестра (года, всего срока обучения и др.) и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач.	Примеры заданий/вопросов, пример экзаменационного билета
<i>Самостоятельная работа</i>			
1	Промежуточные тесты	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.	Набор тестовых заданий

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один семестр. В дисциплине предусмотрены домашние задания и контрольные мероприятия в форме контрольных работ. Оценивание результатов освоения дисциплины производится в соответствии с больно-рейтинговой системой. По дисциплине предусмотрен экзамен.-

(*) Итоговый контроль знаний по дисциплине проводится в контрольной работы, но при необходимости экзамен может проводиться в форме письменного ответа на вопросы из билетов.

Критерии оценки по дисциплине

95-100 баллов:

- полное и своевременное выполнение на высоком уровне домашних заданий, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответов на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

86- 94 балла:

- полное и своевременное выполнение на хорошем уровне домашних заданий, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- хорошее владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

69-85 баллов:

- своевременное выполнение на хорошем уровне домашних заданий, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- владение программным обеспечением, умение использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- усвоение основной литературы;

51-68 баллов:

- выполнение на удовлетворительном уровне домашних заданий, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;

- удовлетворительное владение программным обеспечением, умение использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:

- не выполнение, несвоевременное выполнение или выполнение на неудовлетворительном уровне домашних заданий, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое владение программным обеспечением по разделам программы дисциплины, некомпетентность в решении стандартных (типовых) задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение домашних заданий, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса; отказ от ответов по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.

Комплект экзаменационных билетов

Дисциплина: дифференциальная геометрия и топология

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

1. Определение многообразия. Примеры многообразий. Мотивация введения понятия многообразия.
2. Декартовы координаты, криволинейные координаты, метрический тензор.

Составитель М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

1. Преобразование координат. Преобразование метрического тензора, дифференциальных операторов и элементов длины.
2. Риманова метрика.

Составитель М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №3

1. Пространство Минковского. Псевдоевклидова метрика.
2. Линейное пространство и дуальное линейное пространства (т.е. векторное и ковекторное пространства).

Составитель М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №4

1. Понятие тензора. Безкоординатное и координатное определения тензора.
2. Свертка тензоров. Полная свертка тензора.

Составитель М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №5

1. Понятие алгебры. Структурные тензоры алгебры.
2. Алгебра Ли. Скобки Ли.

Составитель

М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой

К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №6

1. Производная Ли. Аксиоматическое определение и свойства.
2. Симметричный и антисимметричный тензоры.

Составитель

М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой

К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №7

1. Дифференциальная форма.
2. Внешнее дифференцирование. Аксиоматическое определение и его свойства.

Составитель

М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой

К.Е. Самуйлов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №8

1. Оператор Ходжа. Соответствие между p -формами и q -векторами в n -мерном пространстве.
2. Символы Леви-Чивиты. Их применение.

Составитель

М.Н. Геворкян

Заведующий кафедрой

К.Е. Самуйлов

Комплект заданий для контрольных работ

по дисциплине Дифференциальная геометрия и топология
(наименование дисциплины)

Примерные задания для контрольных работ

№1, 8б. Вычислить метрики на стандартной единичной сфере S^2 , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в \mathbb{R}^3 в следующих координатных системах:

1. в декартовых координатах (x, y, z) ;
2. в сферических координатах (θ, φ) ;
3. в декартовых координатах (u, v) на плоскости, являющейся образом сферы S^2 при стереографической проекции из северного полюса сферы;
4. в полярных координатах (r, φ) на плоскости, являющейся образом сферы S^2 при стереографической проекции из северного полюса сферы;
5. в комплексных координатах $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ на плоскости, являющейся образом сферы S^2 при стереографической проекции из северного полюса сферы.

№2, 2б. Преобразовать дифференциальный оператор $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ к новым координатам (u, v) , где $u = y + ax$, $v = y - ax$.

№3, 4б. Найти координатные кривые и нерегулярные точки системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемых равенствами $x_1 = \text{sh}u_1 \sin u_2 \cos u_3$, $x_2 = \text{sh}u_1 \sin u_2 \sin u_3$, $x_3 = \text{ch}u_1 \cos u_2$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$

№4, 4б. В координатах (u, v) найти длину кривой $u = v$ если задана метрика

$$G = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{bmatrix} 1 + v^2 & -uv \\ -uv & 1 + u^2 \end{bmatrix}$$

№5, 2б. Найти метрику на конусе (в координатах u, v), заданном параметрически формулами: $\mathbf{r} = (av \cos u, bv \sin u, cv)$.

№6, 2б. Найти компоненты тензора:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4).$$

№7, 3б. Найти компоненту $T_{3'1'2'}$ тензора $\mathbf{T} = e^2 \otimes e^1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + e^3 \otimes e^3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \in \mathbb{T}_2^2(L)_\mathbb{B}$ в новом (штрихованном) базисе $(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})$. Штрихованный базис связан с исходным следующим преобразованием:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№8, 4б. Покажите, что структурные константы c^k_{ij} некоей алгебры L с операцией \circ при

замене базиса преобразуются по тензорному закону. Иначе говоря если

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \quad \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j = c_{ij}^k \mathbf{e}_k \text{ и } L = \langle \mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'} \rangle, \quad \mathbf{e}_{i'} \circ \mathbf{e}_{j'} = c_{i'j'}^{k'} \mathbf{e}_{k'}$$

а базисы преобразуются как $\mathbf{e}_{i'} = a_{i'}^l \mathbf{e}_l$ и $\mathbf{e}_j = b_j^{l'} \mathbf{e}_{l'}$, то

$$c_{i'j'}^{k'} = a_{i'}^l a_{j'}^m c_{lm}^r b_r^{k'}$$

№9, 46. Пусть на пространстве $L = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \rangle$ задан метрический тензор с матрицей

$$G = [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Провести подъем и опускание индексов для тензора, где $L^* = \langle e^1, e^2, e^3, e^4 \rangle$

$$T = (e^1 + e^2) \otimes (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) - (e^1 + e^3) \otimes \mathbf{e}_3$$

№10, 26. Найти производную функции $f = x^2 - y^2$ в точке $P = (5, 4)$ по направлению кривой $\gamma: x^2 - y^2 = 9$.

№11, 26 Найти производную функции f по направлению градиента этой же функции в произвольной точке $P = (x, y, z)$.

№12, 46 Найти уравнение интегральных кривых следующего векторного поля:

$$\mathbf{X} = (x - 3y) \frac{\partial}{\partial x} + (3x + y) \frac{\partial}{\partial y}$$

№13, 46 Используя понятие тензора объясните, почему при преобразовании базиса линейного пространства, матрица линейного оператора и матрица билинейной формы преобразуются по разным законам? Дать развернутый ответ поясняя его формулами.

Критерии оценки:

Оценивается полнота и правильность выполнения заданий, а также полнота освоения пройденного материала

Комплект разноуровневых задач (заданий)

по дисциплине Дифференциальная геометрия и топология
(наименование дисциплины)

Примерные задания для домашних работ

Задание 1. Построить график кривой

Для кривой:

$$\begin{cases} x = t - \frac{1}{t} \\ y = t^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

заданной параметрически, построить график. Для построения можно использовать любые программы и библиотеки для визуализации данных, например Gnuplot, Python (Matplotlib), Scilab, Maxima, Octave и т.д. Также можно выполнить задание вручную, нарисовав кривые от руки.

Задание 2 Группы, линейные и евклидовы пространства

- Покажите, что относительно операции сложения $+$ группой являются множество рациональных чисел \mathbb{Q} и проверьте группу на коммутативность;
- Покажите, что относительно операции умножения « \cdot » группой являются $\mathbb{R}/\{0\}$ — множество действительных чисел исключая 0 и проверьте на коммутативность.
- Покажите, что множество \mathbb{R} над \mathbb{R} является линейными пространствами.
- Как преобразуется матрица квадратичной формы при замене координат (переходе от одного базиса к другому)?
- Как преобразуется скалярное произведение при замене координат?
- Как преобразуется длина вектора при замене координат?
- Покажите, что скалярное произведение является билинейной формой.

Задание 3 Координатные линии и особые точки

Для обобщенной полярной системы координат, определяемой равенством

$$\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2},$$

где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 < \pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

найдите координатные линии и особые точки.

Задание 4 Визуализация репера Френе для двумерного случая

Для кривой, из задания №1, построить касательный и нормальный векторы в произ-

вольной точки. Для построения можно использовать любые программы и библиотеки для визуализации данных, например Gnuplot, Python (Matplotlib), Scilab, Maxima, Octave и т.д.

Задание 5 Визуализация соприкасающейся окружности и эволюты

Для кривой, из задания №1, построить для произвольной точки соприкасающуюся окружность и вектор радиуса кривизны. Для всех точек изобразить эволюту. За анимацию передвижения конца вектора радиуса кривизны по эволюте дополнительные баллы.

Задание 6 Геометрия поверхностей в \mathbb{R}^2

Найти первую и вторую квадратичные формы, главные кривизны, гауссову и среднюю кривизну поверхности.

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 3u + 3uv^2 - u^3 \\ v^3 - 3v - 3u^2v \\ 3(u^2 - v^2) \end{pmatrix}$$

Задание 7 Выписать компоненты тензора

Выписать в явном виде все компоненты тензора (например, $T_{34}^{12} = 2$), определите валентность и тип тензора. Сколько ковекторов и векторов он принимает в качестве аргумента?

$$T = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

Задание 8 Значение тензора

Найдите значение тензора на указанном наборе аргументов

Дан тензор $T = e^1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3(e^1 + e^2) \otimes \mathbf{e}_2$ найти значение $T(\mathbf{u}; v)$,

если $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $v = e^1 - e^2 + e^3$.

Критерии оценки

Оценивается полнота и правильность выполнения заданий, полнота освоения пройденного материала, умение пользоваться дополнительными источниками.