

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.04.01 Математика

магистерская программа «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень выпускника) Магистр

1. Цели и задачи дисциплины: знакомство с основными свойствами и современными методами качественного исследования неклассических задач для уравнений с частными производными, включая эллиптические уравнения с нелокальными краевыми условиями и краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина «Нелокальные краевые задачи» относится к вариативной части блока 1 учебного плана.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Профессиональные компетенции			
	ПК-2 – способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач	-	Научно-исследовательская работа Преддипломная практика, Государственный экзамен
	ПК-3 – способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности	-	Научно-исследовательская работа Преддипломная практика, Государственный экзамен
Универсальные компетенции			
	УК-2 – Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	-	Государственный экзамен
	УК-3 – способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	-	Государственный экзамен

3. Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ПК-2, ПК-3, УК-2, УК-3.

ПК-2 – способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач.

ПК-3 – способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности.

УК-2 – способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла.

УК-3 – способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные типы нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений, постановки краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений, понятие и основные свойства пространств Соболева и весовых пространств, свойство фредгольмовой разрешимости, эффект нарушения гладкости решений.

Уметь: исследовать разрешимость и регулярность решений нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений, а также краевых задач для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений в различных функциональных пространствах.

Владеть: основными качественными методами исследования названных задач, включая теорию банаховых алгебр, технику локализации, метод срезающих функций, метод априорных оценок, построение регуляризаторов, метод продолжения по параметру.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
		1	2		
Аудиторные занятия (всего)	68	36	32		
В том числе:					
Лекции	34	18	16		
Практические занятия (ПЗ)	34	18	16		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	184	108	76		
В том числе:					
Подготовка к опросу	10	10	10		
Домашние задания	20	20	20		
Подготовка к экзамену	24		24		
Другие виды самостоятельной работы	130	78	22		
Общая трудоемкость	час	252	144	108	
	зач. ед.	7	4	3	

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1	Нелокальные краевые задачи. Вводная часть	Используемые в курсе функциональные пространства, интерполяционные неравенства, факты из теории краевых задач для эллиптических уравнений с параметром, а также краевых задач для эллиптических уравнений в негладких областях; происхождение нелокальных краевых задач и их классификация.
2	Задача с носителем	Постановка задачи, интерпретация нелокального условия.

	нелокальных членов внутри области	Пример: решение методом разделения переменных задачи для уравнения Пуассона в круге с нелокальным условием, связывающим след искомой функции на границе круга с ее следом на внутренней окружности. Априорная оценка и разрешимость эллиптической краевой задачи с параметром в нормах пространств Соболева, зависящих от параметра. Доказательство априорной оценки в пространствах Соболева решений задачи для эллиптического уравнения с нелокальным краевым условием в случае, когда носитель нелокальных членов лежит внутри области. Фредгольмова разрешимость в пространствах Соболева, дискретность и секториальная структура спектра нелокальной краевой задачи.
3	Задача с подходом носителя нелокальных членов к границе вне точек сопряжения	Решение модельной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бесконечном плоском угле в пространствах с весом. Переход к ограниченной области, метод локализации. Постановка задачи для уравнения Пуассона с нелокальным условием, связывающими след функции на части границы с ее следом на многообразии, лежащим в замыкании области и имеющим непустое пересечение с границей. Доказательство априорной оценки решений в весовых пространствах. Построение правого регуляризатора в весовых пространствах для оператора нелокальной краевой задачи, метод компенсации нелокальных членов.
4	Задача с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения	Решение модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в бесконечном угле на плоскости с краевым условием, связывающим след искомой функции на стороне угла с ее следом на луче внутри угла. Исследование нелокальной задачи с параметром на отрезке, условия однозначной разрешимости. Постановка нелокальной задачи для эллиптического уравнения в ограниченной плоской области с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения. Доказательство априорной оценки и построение правого регуляризатора. Исследование асимптотики решений вблизи точек сопряжения.
5	Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений. Вводная часть	Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом. Разрешимость и регулярность обобщенных решений. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений в одномерном случае. Сведение краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на отрезке к дифференциальному уравнению с нелокальными краевыми условиями. Эллиптические уравнения второго порядка в цилиндре с нелокальными краевыми условиями.
6	Сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений	Исследование неравенства Гординга для уравнений и систем уравнений с частными производными. Вывод необходимых и достаточных условий. Случай переменных коэффициентов. Метод локализации. Сравнение условий эллиптичности и сильной эллиптичности. Разрешимость и спектральные свойства задачи Дирихле для сильно эллиптической системы дифференциальных уравнений.
7	Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений	Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства. Разбиение области, порожденное разностным оператором. Матричное описание разностных операторов, сравнение с символом разностного оператора. Решение задачи

		коэрцитивности (исследование неравенства типа Гординга) для дифференциально-разностных операторов. Получение достаточных условий и необходимых условий сильной эллиптичности в алгебраической форме. Постановка первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, обобщенные решения. Исследование разрешимости и структуры спектра. Исследование гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Внутренняя гладкость в подобластях. Эффект нарушения гладкости при подходе к границе подобласти. Примеры сохранения гладкости в подобластях, а также во всей области.
8	Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов	Функциональные операторы с растяжениями и сжатиями аргументов, их свойства в пространствах Соболева. Описание при помощи преобразования Гельфанда. Модельная краевая задача для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями в звездной области. Эффект появления бесконечномерного ядра/коядра. Задача коэрцитивности для функционально-дифференциального оператора с растяжениями и сжатиями в ограниченной области, содержащей центр сжатий. Получение алгебраического критерия сильной эллиптичности в виде положительности скалярного символа оператора (комбинации преобразований Фурье и Гельфанда). Приложение к дифференциально-разностным операторам. Разрешимость и спектр первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов. Исследование гладкости обобщенных решений в частных случаях. Особенности обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения вблизи начала координат (центра сжатия).

5.3. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекции	Практич. занятия	Лаб.	СРС	Всего часов
1.	Нелокальные краевые задачи. Вводная часть	4	2		6	12
2.	Задача с носителем нелокальных членов внутри области	8	4		12	24
3.	Задача с подходом носителя нелокальных членов к границе вне точек сопряжения	12	6		18	36
4.	Задача с подходом носителя нелокальных членов к точкам сопряжения	12	6		18	36
5.	Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений. Вводная часть	4	2		6	12
6.	Сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений	8	4		12	24

7.	Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений	12	6		18	36
8.	Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов	12	6		18	36

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (час.)
1	1	Интерполяционные неравенства, весовые пространства	2
2	2	Решение методом разделения переменных задачи для уравнения Пуассона в круге с нелокальным условием, связывающим след искомой функции на границе круга с ее следом на внутренней окружности.	2
3	2	Метод продолжения по параметру.	2
4	3	Решение модельной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в бесконечном плоском угле в пространствах с весом.	4
5	3	Метод локализации	2
6	4	Решение модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в бесконечном угле на плоскости с краевым условием, связывающим след искомой функции на стороне угла с ее следом на луче внутри угла.	4
7	4	Примеры нарушения и сохранения гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических задач с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения.	2
8	5	Связь между вариационными задачами для нелокальных функционалов и краевыми задачами для функционально-дифференциальных уравнений.	2
9	6	Анализ неравенства Гординга для дифференциального оператора с частными производными: преобразование Фурье, разбиение единицы, метод локализации для переменных коэффициентов, обобщение на случай системы уравнений высокого порядка.	4
10	7	Исследование разностных операторов в ограниченных областях при помощи матриц	2
11	7	Решение краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на интервале.	2
12	7	Исследование свойств обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения. Построение примеров нарушения/сохранения гладкости.	2
13	8	Решение модельной задачи для эллиптического уравнения с растяжениями/сжатиями аргументов в звездной области.	4
14	8	Задачи на проверку критерия сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения со сжатиями и растяжениями.	2

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи, I. В журнале "Современная математика. Фундаментальные направления", М.: РУДН, 2007 (том 26).
2. *Скубачевский А.Л.* Неклассические краевые задачи, II. В журнале "Современная математика. Фундаментальные направления", М.: РУДН, 2009 (том 33).

б) Дополнительная литература:

1. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.
2. *Гуревич П.Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 23 (2003), 93-126.
3. *Гуревич П.Л.* Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения. Известия РАН. Сер. мат., 67 (2003), 71-110.
4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1996.
5. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional-Differential Equations. I. C*-theory. Harlow: Longman, 1994.

Вся литература имеется в библиотеке РУДН или в электронной библиотеке института.

в) Программное обеспечение – пакет «Maple»

г) Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы - Математический институт

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. В балльно-рейтинговую систему оценки знаний в течение семестра входят работа на занятии, выполнение домашних заданий и проработка текущего материала. Выдается 4 домашних задания на обозначенные в ФОС темы, каждое из которых оценивается из 10 баллов. По указанным разделам проводится опрос, который максимально оценивается 20 баллами.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре. Итоговый контроль содержит 2 задания. На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от количества баллов, полученных в течение семестра.

4. Если после итогового контроля студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. FX, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) – прилагается.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН/ФГОС ВО.

Разработчики:

Профессор МИ

им. С.М. Никольского



Л.Е. Россовский

Директор МИ

им. С.М. Никольского



А.Л. Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« » 2020 г.,

протокол №

Директор института

_____ А.Л. Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные
краевые задачи

Рекомендуется для направления подготовки 01.04.01 Математика

Магистерская программа «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений,
математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника Магистр

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи

Направление/Специальность: 01.04.01 «Математика»

Магистерская программа «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Модуль 1

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства				Баллы	Баллы раздела
			Текущий контроль			Промежуточная аттестация		
			Домашние задания	Контрольная работа	Опрос			
УК-2,3 ПК-2,3	Введение	Типы нелокальных краевых условий для эллиптических уравнений				10	1	2
		Функциональные пространства	10				1	0
УК-2,3 ПК-2,3	Эллиптические задачи с нелокальными условиями внутри	Эллиптические задачи с параметром в ограниченных областях, априорные оценки решений	10				1	3

	области	Разрешимость и индекс в пространствах Соболева эллиптической задачи с нелокальными условиями внутри области	10			10	2	
УК-2,3 ПК-2,3	Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вне множества точек сопряжения	Модельная задача в угле в пространстве с весом	10				1	3
		Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской области с носителем нелокальных членов вблизи границы			20	2		
УК-2,3 ПК-2,3	Нелокальные эллиптические задачи в плоских областях с носителями нелокальных членов вблизи точек сопряжения				2		2	2
	Итого		40		2	40	1	1

Модуль 2

Код контролируемой дисциплины	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства		Баллы	Баллы
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация		

			Домашние задания	Контрольная работа	Опрос	Экзамен		
ПК-2, ПК-3, УК-2, УК-3	Введение	Связь между вариационными задачами для нелокальных функционалов и краевыми задачами для функционально-дифференциальных уравнений	0 1				0 1	0 2
		Эллиптические уравнения второго порядка в цилиндре с нелокальными условиями	0 1				0 1	
ПК-2, ПК-3, УК-2, УК-3	Сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений				0 1			0 1
ПК-2, ПК-3, УК-2, УК-3	Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений	Разностные операторы в ограниченных областях	0 1				0 1	5 3
		Первая краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения			5	20	5 2	
ПК-2, ПК-3,	Краевые задачи для	Модельная задача для эллиптического	0 1				0 1	5 3

УК-2, УК-3	эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов	функционально-дифференциального уравнения со сжатиями/растяжениями в звездной области									
		Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения со сжатиями/растяжениями			5	20	5	2			
	Итого		0	4	0	2	40	00	1	00	1

Перечень оценочных средств
по дисциплине *Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи*

/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Опрос	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний, обучающегося по определенному разделу или теме.	Примерные вопросы
3	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов, список экзаменационных вопросов
<i>Самостоятельная работа</i>			
1	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерные варианты домашнего задания

Приложение 3

Дисциплина Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи

Раздел «Нелокальные краевые задачи»

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.
2. Разрешимость в весовых пространствах модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в плоском угле.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
2. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.

2. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.

2. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.

2. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах.

2. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.

2. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.

2. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах.

2) Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11

1. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.

2. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

1. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.

2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.

Раздел Функционально-дифференциальные уравнения

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

- 1) Теорема об изоморфизме пространств Соболева, осуществляемом разностным оператором.
- 2) Достаточное условие сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в ограниченной области.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

- 1) Фредгольмова и однозначная разрешимость краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на отрезке.
- 2) Необходимое условие сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в ограниченной области, содержащей неподвижную точку (начало координат).

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

- 1) Гладкость обобщённых решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на отрезке.
- 2) Алгебра операторов сжатия, растяжения и умножения на однородные функции нулевой степени.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

- 1) Достаточные условия дискретности спектра краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения.
- 2) Сильно эллиптическое уравнение с одним функциональным оператором в ограниченной области, удовлетворяющей условию типа звёздности: гладкость обобщённых решений в подобластях.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

- 1) Свойства функционального оператора со сжатиями аргумента на конечном интервале: теоремы об изоморфизмах пространств Соболева.
- 2) Первая краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения: понятие обобщённого решения, фредгольмова разрешимость и дискретность спектра.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

- 1) Разрешимость краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента.
- 2) Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения в цилиндре: гладкость обобщённых решений.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

- 1) Гладкость решений краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения со сжатиями аргумента.
- 2) Фредгольмова разрешимость и дискретность спектра первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

- 1) Разрешимость краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргумента.
- 2) Особенности обобщённых решений первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения внутри области и на границе области.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

- 1) Гладкость обобщённых решений краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргумента.
- 2) Необходимые условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения в ограниченной области.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

- 1) Особенности обобщённых решений в начале координат первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов.
- 2) Классы дифференциально-разностных уравнений, для которых получены одновременно необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 11

- 1) Достаточные условия дискретности спектра краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргумента.
- 2) Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства: символ и матричное представление

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 12

- 1) Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.
- 2) Достаточные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения в ограниченной области.

Каждому студенту достается по одному билету из данного перечня. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 20 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

Раздел «Нелокальные краевые задачи»

1. Нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с параметром и с носителем нелокальных данных внутри области. Постановка задачи. Определение граничного оператора.
2. Априорные оценки решений нелокальных краевых задач с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
3. Разрешимость в пространствах Соболева и спектральные свойства нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с параметром в случае носителя нелокальных данных внутри области.
4. Весовые пространства В.А. Кондратьева в плоском угле. Определение. Преобразования нормы.
5. Свойства весовых пространств в ограниченной области. Теорема о компактности вложения.
6. Интерполяционные неравенства в весовых пространствах.
7. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах. Сведение к краевой задаче с параметром на отрезке.
8. Теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона в плоском угле в весовых пространствах.
9. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах. Априорная оценка решений и следствия из нее.
10. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области в весовых пространствах.
11. Нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона в плоской ограниченной области с носителем нелокальных данных вблизи границы. Априорная оценка решений в весовых пространствах.
12. Фредгольмова разрешимость в весовых пространствах нелокальной краевой задачи для уравнения Пуассона с носителем нелокальных данных вблизи границы.
13. Разрешимость в весовых пространствах модельной нелокальной задачи для уравнения Пуассона в плоском угле.

Раздел «Функционально-дифференциальные уравнения»

- 1 Теорема об изоморфизме пространств Соболева, осуществляемом разностным оператором.
2. Фредгольмова и однозначная разрешимость краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на отрезке.
3. Гладкость обобщённых решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения на отрезке.
4. Достаточные условия дискретности спектра краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения.
5. Разностные операторы в ограниченных областях евклидова пространства: символ и матричное представление.
6. Первая краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения: понятие обобщённого решения, фредгольмова разрешимость и дискретность спектра.
7. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения в цилиндре: гладкость обобщённых решений.
8. Особенности обобщённых решений первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения внутри области и на границе области.
9. Достаточное условие сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в ограниченной области.
10. Необходимые условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения в ограниченной области.
11. Классы дифференциально-разностных уравнений, для которых получены одновременно необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности.
12. Достаточные условия дискретности спектра краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргумента.
13. Алгебра операторов сжатия, растяжения и умножения на однородные функции нулевой степени.
14. Достаточное условие сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в ограниченной области.
15. Необходимое условие сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов в ограниченной области, содержащей неподвижную точку (начало координат).
16. Сильно эллиптическое уравнение с одним функциональным оператором в ограниченной области, удовлетворяющей условию типа звёздности: гладкость обобщённых решений в подобластях.
17. Особенности обобщённых решений в начале координат первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов.

Примерные варианты домашнего задания (из 2-х заданий)

по дисциплине Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи

Раздел «Нелокальные краевые задачи»

1. Вывести интерполяционное неравенство для весовых пространств (5 баллов)
2. Найти спектр нелокальной задачи для оператора второй производной на отрезке (5 баллов).

1. Показать, что фредгольмовость ограниченного линейного оператора в банаховых пространствах равносильна существованию априорной оценки правого регуляризатора (5 баллов).

2. Вывести интерполяционное неравенство для пространств Соболева (5 баллов).

1. Выяснить, при каких соотношениях между растворами углов в угловых точках и показателями гладкости и веса нелокальная краевая задача для уравнения Пуассона фредгольмова (5 баллов).

2. Привести примеры нарушения компактности вложения весовых пространств (5 баллов).

Раздел «Функционально-дифференциальные уравнения»

1. Образом пространства $\{u \in H^1(0, 2): u(0) = u(2) = 0\}$ под действием разностного оператора $R: L_2(0, 2) \rightarrow L_2(0, 2)$,

$$Ru = u(t) + u(t - 1) + 2u(t + 1),$$

является

а) все пространство $H^1(0, 2)$;

б) пространство $\{v \in H^1(0, 2): v(0) = v(2) = 0\}$;

в) пространство $\{v \in H^1(0, 2): v(0) = v(1), v(2) = 2v(1)\}$;

г) пространство $\{v \in H^1(0, 2): v(0) = 2v(1), v(2) = v(1)\}$.

Правильный ответ: в).

2. Разностный оператор $Ru = u(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}[u(t - 1) + u(t + 1)]$ является положительным оператором в пространстве

а) $L_2(0, 2)$;

б) $L_2(0, 3)$;

в) $L_2(\mathbb{R})$.

Правильный ответ: а).

1. Поиск минимума функционала

$$J(y) = \int_0^2 (y'^2(t) + y'(t)y'(t - 1) - 2f(t)y(t)) dt$$

на пространстве $\{y \in H^1(0, 2): y(0) = y(2) = 0\}$ сводится к решению краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения

$$а) - (y'(t) + y'(t - 1))' = f(t), \quad t \in (0, 2);$$

- б) $-\left(y'(t) + \frac{1}{2}y'(t-1)\right)' = f(t), t \in (0, 2);$
 в) $-\left(y'(t) + y'(t+1)\right)' = f(t), t \in (0, 2);$
 г) $-\left(y'(t) + \frac{1}{2}y'(t-1) + \frac{1}{2}y'(t+1)\right)' = f(t), t \in (0, 2).$

Правильный ответ: г).

2. Спектр дифференциально-разностного оператора $A_R: L_2(0, 2) \rightarrow L_2(0, 2),$

$$A_R u = -(Ru) - u, D(A_R) = \{u \in H^1(0, 2): u(0) = u(2) = 0, Ru \in H^1(0, 2)\},$$

является вещественным при

- а) $Ru = 2u(t) + u(t+1);$
 б) $Ru = u(t) + 2u(t-1) + 2u(t+1);$
 в) $Ru = 2u(t) + u(t-1) - u(t+1).$

Правильный ответ: б).

1. Спектр дифференциально-разностного оператора $A_R: L_2(0, 2) \rightarrow L_2(0, 2),$

$$A_R u = -(Ru)' + u, D(A_R) = \{u \in H^1(0, 2): u(0) = u(2) = 0, Ru' \in H^1(0, 2)\},$$

является полуограниченным при

- а) $Ru = 2u(t) + u(t+1);$
 б) $Ru = u(t) + 2u(t-1) + 2u(t+1);$
 в) $Ru = u(t) + u(t-1) - 2u(t+1).$

Правильный ответ: а), в).

2. При $a^2 b \neq -1$ краевая задача

$$-\left(u'(t) + au'(t-1) + bu'(t+2)\right)' = tu(t), t \in (0, 3),$$

$$u(t) = 0, t \notin (0, 3),$$

- а) не имеет решений;
 б) имеет конечное число линейно независимых обобщенных решений;
 в) имеет бесконечное число линейно независимых обобщенных решений.

Правильный ответ: б)

1. Укажите, какой из следующих операторов является положительным в $L_2(0, +\infty)$:

а) $Ru = u(t) + \frac{1}{3}u(t/2)$;

б) $Ru = u(t) + \frac{1}{3}u(t/2) + \frac{2}{3}u(2t)$;

в) $Ru = u(t) + \frac{1}{2}u(t/2) + u(2t)$.

Правильный ответ: б).

8. Поиск минимума функционала

$$J(y) = \int_0^{3T} (y'(t) + 2y'(t/3))^2 dt$$

на множестве функций $y \in H^1(0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям $y(0) = 1, y(t) = 0 (t \geq T)$, сводится к решению краевой задачи для уравнения

а) $-(y'(t) + 2y'(t/3))' = 0, t \in (0, T)$;

б) $-(y'(t) + \frac{1}{2}y'(3t))' = 0, t \in (0, T)$;

в) $-(13y'(t) + 2y'(t/3) + 6y'(3t))' = 0, t \in (0, T)$;

г) $-(y'(t) + 2y'(t/3) + 6y'(3t))' = 0, t \in (0, T)$.

2. Краевая задача

$$\begin{aligned} -(y'(t) + 5y'(t/2))' &= 0, t \in (0, 1), \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

имеет

а) единственное тривиальное решение;

б) конечное число линейно независимых обобщенных решений;

в) бесконечное число линейно независимых обобщенных решений.

Правильный ответ: в).

1. Для какой из следующих краевых задач (краевые условия везде одинаковы и имеют вид $y(0) = 0, y(t) = 0, t \geq 1$, а $f \in L_2(0, 1)$) всякое обобщенное решение обязательно принадлежит $H^2(0, 1)$:

а) $-(y'(t) - \frac{1}{2}y'(t/2))' + 3y(t) = f(t), t \in (0, 1)$;

б) $-(y'(t) + \frac{1}{2}y'(2t))' = f(t), t \in (0, 1)$;

в) $-(y'(t) + 2y'(t/2))' = f(t), t \in (0, 1)$?

Правильный ответ: а).

2. Для каких из следующих краевых задач (краевые условия везде одинаковы и имеют вид $y(0) = 0, y(1) = 0, t \geq 1, a f \in L_2(0, 1)$) обобщенное решение единственно:

а) $-(y'(t) + y'(t/3))' = f(t), t \in (0, 1),$

б) $-(y'(t) + 10y'(3t))' = f(t), t \in (0, 1),$

в) $-\left(y'(t) + \frac{1}{10}y'(3t)\right)' = f(t), t \in (0, 1)?$

Правильный ответ: б), в).

Каждый пункт домашнего задания оценивается 5 баллами.

Примеры вопросов к опросу

по дисциплине Функционально-дифференциальные уравнения и нелокальные краевые задачи

Раздел «Нелокальные краевые задачи»

1. Что такое метод локализации?
2. Для каких типов нелокальных краевых условий модельная задача является нелокальной?
3. Дайте определение нормы в весовом пространстве.
4. Почему нелокальные задачи в случае подхода носителя нелокальных членов к границе рассматриваются в пространствах с весом?
5. Дайте определение обобщенного решения нелокальной краевой задачи.
6. Может ли обобщенное решение нелокальной краевой задачи при подходе носителя нелокальных членов к точкам сопряжения сохранять гладкость?
7. Как считаются коэффициенты в асимптотике решения нелокальной краевой задачи вблизи точки сопряжения?

Раздел «Функционально-дифференциальные уравнения»

1. Сравните условия эллиптичности скалярного уравнения и системы дифференциальных уравнений.
2. Что можно сказать про количество классов разбиения ограниченной области, порожденной группой целочисленных сдвигов?
3. Что можно сказать про количество подобластей внутри одного класса?
4. Как проверяется положительная определенность разностного оператора, действующего на функции во всем пространстве и в ограниченной области?
5. Что такое проблема коэрцитивности?
6. Приведите пример, когда необходимые условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения совпадают с достаточными.
7. Какова структура множества, на котором обобщенные решения краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения могут иметь особенности?
8. Может ли гладкость обобщенного решения краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения сохраняться во всей области?

9. Почему обычный метод локализации не работает для уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов?

10. Какие свойства операторов сжатия и умножения на однородные функции нулевой степени позволяют построить символьное исчисление для соответствующей операторной алгебры?

11. Почему метод сведения к системе эллиптических дифференциальных уравнений не всегда удобен при исследовании краевых задач для уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов?

12. В каких точках может нарушаться гладкость обобщенного решения краевой задачи для сильно эллиптического уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов?

13. Каковы особенности исследования функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов в случае переменных коэффициентов?

Правильный ответ на каждый вопрос оценивается двумя баллами.