Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Функциональные пространства

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.03.01. Математика

Квалификация (степень) выпускника Бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины: сформировать представление о комплексе идей и методов теории функциональных пространств, начиная с теории классических пространств Лебега и вплоть до современных концепций идеальных пространств, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению других основных математических курсов. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; отработку приемов решения задач на практических занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Функциональные пространства» относится к элективным дисциплинам по выбору учебного плана. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
	Профессиональные компетенции		
	ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	-	Оптимизация и выпуклый анализ, Функциональный анализ, ВКР
	ПК-1.004: Проведение работ в сфере профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования	-	НИР, ВКР

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций (для направления «Математика и компьютерные науки актуальна только первая компетенция): <u>ПК-1, ПК-1.004</u>

ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области

ПК-1.004: Проведение работ в сфере профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: понятия банахова функционального пространства, пространства Лебега и идеального пространства, понятия ассоциированного пространства, свойства полноты и монотонности нормы функционального пространства, понятия непрерывности и ограниченности операторов и функционалов в функциональном пространстве, основные интегральные неравенства: Гельдера, Минковского, Харди, их обобщения и современные варианты.

Уметь: оценивать нормы базовых функционалов и операторов, находить и оценивать ассоциированные нормы в функциональных пространствах, применять базовые интегральные неравенства для функциональных норм, таких как неравенства Гельдера, Минковского, Харди и их обобщения.

Владеть: основами теории операторов и функционалов в функциональных пространствах, методами оценки норм операторов и функционалов с помощью основных интегральных неравенств.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		С			
Аудиторные занятия (всего)	32	32			
В том числе:					
Лекции	16	16			
Практические занятия (ПЗ)	16	16			
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	76	76			
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы	40	40			
Вид промежуточной аттестации (экзамен)	36	36			
	108	108			

Общая трудоемкость час зач. Ед.	3	3			

5. Содержание дисциплины.

В курсе излагаются некоторые базовые вопросы теории функциональных пространств. Оно может быть полезно также аспирантам и молодым математикам, желающим расширить свое знакомство с теорией функциональных пространств. В качестве основного объекта рассматриваются пространства Лебега. Устанавливаются свойства полноты и доказываются основные классические интегральные неравенства для этих пространств: неравенство Гельдера, неравенство Минковского (неравенство треугольника), неравенство Харди, а также некоторые их обобщения. В отличие от стандартных курсов, посвященных теории нормированных пространств Лебега при , в рассмотрение включены также квазинормированные пространства Лебега при Для них характерно отсутствие ненулевых линейных непрерывных функционалов и специальная форма неравенства треугольника, в котором точная, т.е., наименьшая постоянная строго больше единицы (что препятствует прямому распространению неравенства на неограниченное или бесконечное число слагаемых). Эти свойства обычно приводили к исключению квазинормированных пространств из рассмотрения. Однако, в последнее время, эти пространства, их обобщения и приложения нередко встречаются в математической литературе. Например, для конусов функций с условиями монотонности в таких пространствах построена нетривиальная и содержательная теория двойственности. Некоторые факты этой теории отражены в данном курсе.

У читателей мы предполагаем знание базовых понятий теории меры и интеграла Лебега. При этом изложение, в основном, основано на использовании классической меры Лебега, и отвечающих ему понятий измеримой и интегрируемой по Лебегу функции.

5.1. Содержание разделов дисциплины

Название разделов (тем) дисциплины	**Содержание разделов (тем) дисциплины:**
Общие свойства пространства Lp	Определения и общие свойства пространств Лебега, позволяющие рассматривать его как линейное пространство, в котором определены операции сложения его элементов и умножения их на вещественные числа. Основные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега - теоремы Леви, Фату.
Неравенства Гельдера и Минковского	Неравенство Юнга. Вывод неравенства Гельдера. О точности неравенства Гельдера. Мультипликативное неравенство. Дискретное неравенство Гельдера. Неравенство треугольника

Сходимость в Lp	Связь сходимости в Lp и почти всюду. неравенство Гельдера для 3 функций. Некоторые современные дополнения.
Идеальное пространство	Важные свойства пространств Лебега, в первую очередь, свойства полноты. Весовые пространства Лебега с общими весами выступают как конкретные реализации значительно более общей современной конструкции банаховых функциональных пространств и еще более общих идеальных пространств. Общий подход позволяет установить свойство полноты идеальных пространств, и, следовательно, весовых пространств Лебега.
Обобщенное неравенство Минковского	Обобщенное неравенство Минковского для интегралов и его применение при замене порядка взятия смешанных норм, а также при вычислении нормы оператора свертки.
Классическое весовое неравенство Харди	Классическое неравенство Харди является одним из важных элементов общей теории весовых пространств Лебега со степенными весами. Установлено само неравенство Харди и доказана неулучшаемость всех условий его справедливости. Доказана точность константы в неравенстве Харди, т.е. вычислена точно норма оператора Харди в весовых пространствах Лебега со степенными весами.
Общее весовое неравенство типа Харди	Рассматривается общее весовое неравенство типа Харди и установлены критерии его справедливости (т.е. найдены точные условия на весовые функции, при которых это неравенство имеет место).

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	**Название разделов**	***Лекции***	***Семинары***	***СРС***	***Всего***

	(тем) дисциплины				
1	Общие свойства пространства Lp	*2*	*2*	***11***	***15***
2	**Неравенства Гельдера и Минковского**	2	2	11	15
3	**Сходимость в Lp**	2	2	11	15
4	**Идеальное пространство**	2	2	11	15
5	**Обобщенное неравенство Минковского**	2	2	11	15
6	**Классическое весовое неравенство Харди**	2	2	11	15

7	**Общее весовое неравенство типа Харди**	4	4	10	18
	Итого:	16	16	74	108

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	**Название разделов (тем) дисциплины**	***Практические занятия***
1	Общие свойства пространства Lp	*2*
2	**Неравенства Гельдера и Минковского**	2
3	**Сходимость в Lp**	2
4	**Идеальное пространство**	2

5	**Обобщенное неравенство Минковского**	2
6	**Классическое весовое неравенство Харди**	2
7	**Общее весовое неравенство типа Харди**	4
	Итого:	16

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

Литература

а) основная

1. *С. М. Никольский.* Курс математического анализа, т. 2. М.: Наука, все годы издания.

2. *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин*. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, все годы издания.

3. *М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов*. Мера и интеграл. М.: Факториал, все годы издания.

4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, все годы издания.

5. *В. И. Буренков*. Функциональные пространства. Основные интегральные неравенства, связанные с пространствами L_p. М.: РУДН , все годы издания.

6. *В. И. Буренков, М. Л. Гольдман.* Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства» , М.: РУДН, все годы издания.

7. *В. И. Буренков, М. Л. Гольдман.* Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства» , М.: РУДН, все годы издания.

б) дополнительная

1. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, все годы издания.

2. *Леонтьва Т.А., Панферов В.С., Серов В.С.* Задачи по теории функции действительного переменного. М.: МГУ, все годы издания.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1шт., проектор - 1шт., экран - 1шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. Плановые контрольные работы проводятся не менее 1 раза в течение модуля.
3. Разрешается переписывать контрольную работу если по ней получено менее половины планируемых баллов, при этом, по усмотрению преподавателя, аннулируются ранее полученные по этой контрольной работе баллы. Планируется переписывание контрольной работы после разбора типичных ошибок, необходимых консультаций и в период времени не более трёх недель после предыдущей контрольной.
4. При выставлении баллов за посещение занятий учитывается наличие лекционного материала и активная работа студента на семинарах.
5. Отсрочка в переписывании контрольных работ и сдаче домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки. Планируется выполнение контрольных работ не позднее двух недель после выздоровления.
6. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в модуле, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
7. Если в итоге за модуль студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F, и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится по согласованию с деканатом.
8. Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 50 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

Разработчик:
Профессор
Математического института
им. С.М. Никольского М.Л.Гольдман

Директор
Математического института
им. С.М. Никольского А.Л. Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН
На заседании института
« » 2020 г.,
протокол №
Директор института

_______________ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Функциональные пространства

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01. Математика

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Функциональные пространства»

Направление/Специальность: 01.03.01. Математика

Вид задания	Число заданий	Кол-во баллов	Сумма баллов
1. Контрольные работы	2 по 4-6	34	34
2. Домашние задания, работа на семинарах и посещение занятий	не ограничено	16	16
3. Итоговый контроль	3-6	50	50
ИТОГО			100

/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
Аудиторная работа			
	Контрольная работа	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов контрольных работ
3	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Список экзаменационных вопросов
Самостоятельная работа			
1	СРС (домашнее задание)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерный вариант домашнего задания

Фонды оценочных средств:

1. Сборник задач и упражнений
2. Вопросы для самопроверки и обсуждений по темам
3. Задания для самостоятельной работы по темам
4. Тестовые задания по темам (для текущего и промежуточного самоконтроля)
5. Тренинговые задания
6. Перечень вопросов итоговой аттестации по курсу

Сборник задач и упражнений

1. Пусть X - нормированное пространство, $a \in X$, $r > 0$. Докажите, что множество $X \setminus \overline{B}(a,r)$ открыто ($\overline{B}(a,r)$ - замкнутый шар).

2. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_1$ обозначим R_1^n.

3. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_\infty = \max_{1 \le i \le n} | x_i |.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_\infty$ обозначим R_∞^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_\infty \le \| \vec{x} \|_1 \le n \, \| \vec{x} \|_\infty \, .$$

4. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_2$ обозначим R_2^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_\infty \le \| \vec{x} \|_2 \le n^{1/2} \, \| \vec{x} \|_\infty \, .$$

5*. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ формулой

$$\| \vec{x} \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty \, .$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_p$ обозначим R_p^n.

Показать, что

$$\| \vec{x} \|_{\infty} \le \| \vec{x} \|_{p} \le n^{1/p} \ \| \vec{x} \|_{\infty} \ .$$

Указание. При обосновании неравенства треугольника можно следовать схеме:
1. Для любых чисел $x,\ y \ge 0$ установить неравенство Юнга:

$$x\,y \le \frac{x^{p}}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \text{ , где } \ 1< p <\infty\,,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \text{ т.е., } p' = \frac{p}{p-1} \ .$$

2. Опираясь на неравенство Юнга установить неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \ y_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^{p} \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| y_i \right|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

3. Опираясь на неравенство Гельдера вывести неравенство треугольника для нормы

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i + y_i \right|^{p} \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left| x_i \right|^{p} \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} \left| y_i \right|^{p} \right)^{1/p} \ .$$

6. Изобразить единичные круги в пространствах R_p^2 , $p=1,\ p=2,\ p=\infty$.

7. Изобразить единичные шары в пространствах R_p^3 , $p=1,\ p=2,\ p=\infty$.

8.* Установить неравенства между нормами в пространствах R_p^n и R_q^n , $1 \le p< q \le\infty$: для любых векторов $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)\in R^n$

$$\| \vec{x} \|_{q} \le \| \vec{x} \|_{p} \le n^{1/p-1/q} \ \| \vec{x} \|_{q} \ . \qquad (1)$$

Привести примеры векторов, для которых неравенства в (1) превращаются в равенства.

Указания.
1. Для получения левого неравенства в (1), называемого неравенством Йенсена, можно
следовать схеме:
А) При условии $\| \vec{x} \|_{p} = 0$ показать, что $\| \vec{x} \|_{q} = 0$.

Б) При $0 < x \le 1,\ 1\le p < q \le \infty$ показать, что $x^{q} \le x^{p}$. Вывести отсюда, что условие
$\| \vec{x} \|_{p} = 1$ влечет $\| \vec{x} \|_{q} \le 1$ (это частный случай неравенства Йенсена).

В) Опираясь на результат п. Б), получить неравенство Йенсена в общем случае.
2. Для получения правого неравенства в (1) применить в нужном варианте неравенство
Гельдера.

9. Показать, что в линейном нормированном пространстве для любых векторов выполнено обратное неравенство треугольника

$$\left| \| \vec{x} - \vec{y} \| - \| \vec{z} - \vec{y} \| \right| \le \| \vec{x} - \vec{z} \| \ .$$

Каков его геометрический смысл в пространстве геометрических векторов с нормой, равной длине вектора?

В качестве следствия получить неравенство

$$\left| \| \vec{x} \| - \| \vec{z} \| \right| \le \| \vec{x} - \vec{z} \|$$

(разность норм векторов не больше, чем норма разности векторов).

10. Доказать равенство $\operatorname{ess\,sup}\limits_{E} f = \inf \left\{ M \in R: \quad f(x) \le M \,,\ \text{п.в. на } E \right\}$.

11. Доказать, что при $0 < p \le \infty \quad \| f \|_{L_p(E)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$ п.в. на E.

12. Показать, что п.в. на E выполнено неравенство $|f(x)| \le \| f \|_{L_\infty(E)}$.

13. Доказать утверждение: пусть $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varphi \in C(0,\infty)$ - строго убывает, $\int\limits_0^1 \varphi \, dx < \infty$.

Тогда, при любых $a \ge 0$, $b > 0$ справедливо неравенство

$$ab \ge \int\limits_0^a \varphi \, dx - \int\limits_b^\infty \varphi^{-1} \, dy \ ,$$

причем равенство имеет место только при $b = \varphi(a)$.

14. Показать, что при $0 < p < 1$; $a \ge 0$, $b > 0$ справедливо неравенство

$$ab \ge \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \,, \quad p' = \frac{p}{p-1} \ ,$$

причем равенство имеет место только при $a^p = b^{p'}$.

15. Пусть $f \in L_p(E)$, $g \in L_{p'}(E)$; $0 < p < 1$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$; $g \ne 0$ на E. Показать, что имеет место обращение неравенства Гельдера:

$$\int\limits_E |f \, g| \, dx \ge \| f \|_{L_p(E)} \| g \|_{L_{p'}(E)} .$$

16. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E),\ 1 \le p \le \infty \quad \Rightarrow \quad f + g \in L_p(E), \quad \| f + g \|_{L_p(E)} \le \| f \|_{L_p(E)} + \| g \|_{L_p(E)}$$

постоянная 1- точная.

17. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E),\ 0 < p < 1 \quad \Rightarrow \quad f + g \in L_p(E), \quad \| f + g \|_{L_p(E)} \le 2^{1/p-1} \left(\| f \|_{L_p(E)} + \| g \|_{L_p(E)}\right.$$

постоянная $2^{1/p-1}$- точная.

18. Показать, что в модифицированном неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E),\ 0 < p < 1 \ \Rightarrow\ f + g \in L_p(E),\ \| f + g \|_{L_p(E)} \le \left(\| f \|^p_{L_p(E)} + \| g \|^p_{L_p(E)} \right)^{1/p}$$

постоянная 1 - точная.

19*. Показать, что формула вычисления нормы линейного функционала

$$A_g(f) = \int_E f\, g\, dx, \quad f \in L_p(E), \quad (1 \le p \le \infty,\ 1/p + 1/p' = 1),$$

именно,

$$\| A_g \| = \| g \|_{L_{p'}(E)},$$

сохраняет силу при $\| g \|_{L_{p'}(E)} = \infty$.

20. Показать, что для измеримой функции g

$$\| g \|_{L_{p'}(E)} = \sup \left\{ \left| \int_E \varphi\, g\, dx \right| : \ \varphi \in L_p(E);\ \| \varphi \|_{L_p(E)} \le 1 \right\},$$

причем, если $g \ge 0$, то

$$\| g \|_{L_{p'}(E)} = \sup \left\{ \int_E \varphi\, g\, dx : \ 0 \le \varphi \in L_p(E);\ \| \varphi \|_{L_p(E)} \le 1 \right\}.$$

21. В пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ введем для функций $x \in C[a,b]$

$$\| x \|_2 = \left(\int_a^b | x(t) |^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\| x \|_C = \max_{t \in [a,b]} | x(t) | \ ?$$

22. Можно ли в пространстве $C[a,b]$ ввести нормы по формулам

1) $$\| x \| = \max_{t \in [a, (a+b)/2]} | x(t) |,$$

или

2) $$\| x \| = \max_{t \in [a,b]} | x(t) | + \max_{t \in [a,b]} | x'(t) | \ ?$$

23. В пространстве $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ введем для функций $x \in C^1[a,b]$ норму Соболева

$$\| x \|_{2,1} = \left(\int_a^b | x(t) |^2\, dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b | x'(t) |^2 dt \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ ?$$

24. Показать, что величина $\|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ является нормой в пространстве $C^1[a,b]$. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \ ?$$

25. При $1\le p\le\infty$ показать, что множество последовательностей

$$l_p = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k\in N} : \ \|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1\le p<\infty;$$

$$l_\infty = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k\in N} : \ \|\vec{x}\|_\infty = \sup_{k\in N} |x_k| < \infty \right\}, \quad p=\infty;$$

образует линейное нормированное пространство.

26. Можно ли в пространстве l_q при $1\le p<q\le\infty$ ввести норму $\|\vec{x}\|_p$?

27*. А) При $1\le p<q\le\infty$ показать, что $\|\vec{x}\|_q \le \|\vec{x}\|_p$ (неравенство Йенсена для последовательностей)

Б) В пространстве l_p при $1\le p<q\le\infty$ введем норму $\|\vec{x}\|_q$. Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли эта норма эквивалентна исходной норме $\|\vec{x}\|_p$?

28. Привести пример последовательности функций, сходящейся по норме $L_p(E), 0<p<\infty$, но не сходящейся почти всюду на E. Возможен ли такой пример в $L_\infty(E)$?

29. Показать, что из последовательности, сходящейся по норме $L_p(E), 0<p<\infty$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E.

30. Привести пример последовательности функций, сходящейся почти всюду на E но не сходящейся по норме $L_p(E), 0<p\le\infty$.

31. Докажите, что линейный оператор удовлетворяет условию Липшица тогда и только тогда, когда этот оператор непрерывен.

32. Докажите, что линейный ограниченный оператор переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную.

33. Докажите, что всякий линейный оператор переводит выпуклое множество в выпуклое множество. Верно ли, что образ замкнутого множества при линейном непрерывном операторе замкнут?

Вопросы для самопроверки и обсуждений по темам

1. Сформулируйте определение (квази)нормированного пространства.
2. Сформулируйте определение (квази)нормы. Приведите примеры нормы, квазинормы.
3. Сформулируйте определение открытого и замкнутого множества.
4. Сформулируйте определения сходящейся и фундаментальной последовательностей.
5. Что такое (квази)банахово пространство? Приведите примеры банахова и квазибанахова пространства.
6. Сформулируйте определение линейного оператора (функционала).
7. Сформулируйте понятие двойственного пространства.
8. Приведите описание двойственного пространства для пространства Лебега $L_p, \quad p>0$.
9. Докажите неравенство Юнга.
10. Приведите неравенство Гельдера. Что означает его точность?
11. Какова дискретная форма неравенства Гельдера?
12. Сформулируйте неравенство Йенсена.
13. Вывести неравенство Минковского при $1 \le p \le \infty$. Что означает его точность?
14. Вывести неравенство Минковского при $0 < p < 1$. Что означает его точность?
15. Что означает сходимость по норме в пространстве Лебега? Какова ее связь со сходимостью почти всюду?
16. Сформулируйте теорему Рисса-Фишера о полноте пространства Лебега.
17. Сформулируйте неравенство Минковского для рядов при $1 \le p \le \infty$.
18. Сформулируйте неравенство Минковского для рядов при $0 < p < 1.$.
19. Сформулируйте неравенство Минковского для интегралов и его применение для оценки свертки при $1 \le p \le \infty$.
20. Сформулируйте теорему о перестановке порядка в смешанной норме.
21. Сформулируйте неравенство Харди. Что означает его точность?
22. Покажите неулучшаемость условий справедливости неравенства Харди.
23. Как понимается плотность ступенчатых функций в пространстве Лебега?
24. Сформулируйте результат о непрерывности нормы в пространстве Лебега.
25. Сформулируйте понятие компакта в линейном нормированном пространстве. Каков критерий компактности множества в пространстве Лебега?
26. Сформулируйте понятие компакта в линейном нормированном пространстве. Каков критерий компактности множества в пространстве непрерывных функций?
27. Сформулируйте основные свойства усреднений функций по Соболеву.
28. Сформулируйте результат о плотности бесконечно дифференцируемых финитных функций в пространстве Лебега для открытой области.

Задания для самостоятельной работы по темам

1. Доказать, что множество в нормированном векторном пространстве открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

2. Показать, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

3.Показать, что имеет место строгое вложение $l_p \subset l_q$ при $0 < p < q \le \infty$.

4. Показать, что на множестве конечной меры E имеет место строгое вложение $L_q(E) \subset L_p(E)$

при $0 < p < q \le \infty$. Насколько существенно требование конечности меры?

5. Можно ли в пространстве l_p ввести норму по формуле

$$\| \{x_k\} \|_p = \left(\sum_k |x_k|^q \right)^{1/q}, \ 0 < q, \ p \le \infty, \ q \ne p ?$$

Ответ обосновать.

5. Пусть дано некоторое множество E и функции $f, g : E \to \mathbf{R}$. Докажите, что

$$\operatorname{ess}\sup_{x \in E} \big(f(x) + g(x) \big) \le \operatorname{ess}\sup_{x \in E} f(x) + \operatorname{ess}\sup_{x \in E} g(x).$$

6. Рассмотрим весовое пространство $L_{p\,\sigma}(E)$ измеримых функций, для которых

$$\| f \|_{L_{p\sigma}(E)} = \left(\int_E |f|^p \, \sigma \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Здесь σ - измеримая, почти всюду положительная функция. Показать, что $\| f \|_{L_{p\sigma}(E)}$ является нормой при $1 \le p < \infty$, квазинормой при $0 < p < 1$.

7*. Доказать, что пространство $L_{p\,\sigma}(E)$ является (квази)банаховым.

8. Дать описание двойственного пространства к пространству $L_{p\,\sigma}(E)$

9. Показать, что на любом измеримом множестве E при условии, что $\sigma \in L(E)$, имеет место вложение $L_{q\sigma}(E) \subset L_{p\sigma}(E)$ при $0 < p \le q < \infty$.

10. Показать, что пространство $L_{p\,\sigma}(E)$ является сепарабельным банаховым при $1 \le p < \infty$.

11. Вывести дискретные неравенства Гельдера и Минковского из их интегральных аналогов.

12*. Вывести неравенство Харди для сопряженного оператора

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) \, dy$$

из неравенства Харди для оператора

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy.$$

13. Доказать плотность в $L_p(E)$, $0 < p < \infty$, простых функций (т.е. ступенчатых функций с конечным числом значений).

14. Доказать, что L_p - (квази)норма непрерывна по сдвигу при $0 < p < \infty$.

15. Показать, что в конечномерном пространстве замкнутое ограниченное множество есть компакт. Привести пример замкнутого ограниченного множества в бесконечномерном пространстве, не являющегося компактом

Перечень рефератов и/или курсовых работ по темам

1. Неравенство Юнга для сверток
2. Функции распределения и убывающие перестановки. Общие свойства.
3. Интегральные средние убывающих перестановок.
4. Представление нормы в пространстве Лебега через функцию распределения и убывающую перестановку.
5. Теорема Харди об экстремальных свойствах убывающих перестановок.
6. Классические весовые пространства Лоренца. Общие свойства.
7. Пространства Марцинкевича.
8. Максимальный оператор Харди- Литтлвуда.
9. Оценки убывающей перестановки максимальной функции.
10. Интегральные свойства максимального оператора Харди- Литтлвуда.
11. Теоремы Лебега о дифференцировании.
12. Аксиоматика банаховых функциональных норм.
13. Понятие банахова функционального пространства. Общие свойства. Примеры.
14. Ассоциированные банаховы функциональные пространства. Примеры.
15. Принцип двойственности в теории банаховых функциональных пространств.
16. Перестановочно инвариантные пространства. Примеры.
17. Формула для ассоциированной нормы к перестановочно инвариантной норме.
18. Неравенство Харди для общих весовых функций.

Тестовые задания по темам

1. Обладает ли величина $\|\cdot\|_{L_p}$ всеми свойствами нормы

   а) при $0 < p < 1$? Ответ: нет

   б) при $1 \le p < \infty$? Ответ: да

   в) при $p = \infty$? Ответ: да.

2. При каких условиях неравенство Юнга $a\,b \le \int_0^a \varphi\,d\,x + \int_0^b \varphi^{-1}\,d\,y$ превращается в равенство:

   $$1).\ b = \varphi(a);\quad 2).\ b < \varphi(a);\quad 3)\ b > \varphi(a)?$$

   Ответ: 1.

3. Является ли неравенство Гельдера точным?

   Ответ: да.

4. Является ли пространство L_p .монотонным по параметру p

   а) на множестве конечной меры? Ответ: да;

   б) на множестве бесконечной меры? Ответ: нет.

5. Является ли пространство l_p монотонным по параметру p ?

   Ответ: да

6. Существует ли ненулевой линейный непрерывный функционал в пространстве L_p, $0 < p < 1$?

   Ответ: нет.

7. Существует ли ненулевой линейный непрерывный функционал в пространстве L_p, $1 \le p \le \infty$?

   Ответ: да.

8. Можно ли выразить норму линейного непрерывного функционала в пространстве L_p, $p \ge 1$ в терминах самих пространств L_p ?

   Ответ: да.

9. Какова точная постоянная в неравенстве Минковского при $p \ge 1$?

   а) равна 1: б) равна 2; в) равна $2^{1/p-1}$.

   Ответ: а.

10. Какова точная постоянная в неравенстве Минковского при $0 < p < 1.$?

    а) равна 1: б) равна 2; в) равна $2^{1/p-1}$.

Ответ: в.

11. Следует ли из сходимости в пространстве L_p, $0 < p \leq \infty$, сходимость почти всюду?

Ответ: нет

12. Следует ли из сходимости почти всюду сходимость в пространстве L_p, $0 < p \leq \infty$?

Ответ: нет.

13. Следует ли из сходимости последовательности по норме ее фундаментальность?

Ответ: да

14. Верно ли, что фундаментальность и сходимость эквивалентны между собой?

А) в любом нормированном пространстве. Ответ: нет.

Б) В полном нормированном пространстве. Ответ: да.

В) В любом квазинормированном пространстве. Ответ: нет.

Г). В полном квазинормированном пространстве. Ответ: да.

15. Является ли пространство L_p, $0 < p \leq \infty$, полным?

Ответ: да.

16. Распространяется ли неравенство Минковского в L_p на суммы ряда при $p \geq 1$?

Ответ: да.

17. Верно ли неравенство Минковского L_p для суммы ряда при $0 < p < 1$?

Ответ: нет.

18. Являются ли не улучшаемыми условия справедливости классического неравенства Харди?

Ответ: да.

19. Является ли точной постоянная в классическом неравенстве Харди ?

Ответ: да.

20. Является ли L_p - норма непрерывной относительно сдвига ?

Ответ: да.

21. Какое из следующих утверждений верно?
1. Любое ограниченное множество компактно
2. Любое замкнутое множество компактно
3. Любое ограниченное замкнутое множество компактно
4. Любое компактное множество ограниченно и замкнуто

Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно
1. является дополнением к открытому множеству
2. не является открытым
3. содержит в себе все свои внутренние точки
4. не содержит изолированных точек

Теорема Арцела является

1. критерием непрерывности функции
2. критерием липшицевости функции
3. критерием компактности подмножества пространства непрерывных функций
4. критерием компактности подмножества пространства суммируемых функций

Теорема Колмогорова- Рисса является

1. критерием непрерывности функции
2. критерием липшицевости функции
3. критерием компактности подмножества пространства непрерывных функций
4. критерием компактности подмножества пространства суммируемых функций

4.4.3. Доказать неравенство Гёльдера для весовых пространств $L^p_\sigma(E)$, $1 < p < \infty$.

4.4.4. Доказать неравенство Минковского для функций $f(x)$, $g(x) \in L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, т.е. неравенство

$$||f+g||_{L_p(E)} \leqslant ||f||_{L_p(E)} + ||g||_{L_p(E)}.$$

Знак равенства в этом неравенстве будет тогда и только тогда, когда или $g = 0$ почти всюду или $f = \alpha g$, $\alpha \geqslant 0$.

4.4.5. Доказать неравенство Минковского для весовых пространств $L^p_\sigma(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4.4.6. Доказать, что пространство $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, является полным нормированным пространством.

4.4.7. Доказать, что весовое пространство $L^p_\sigma(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, является полным нормированным пространством.

4.4.8. Доказать, что пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с метрикой $\rho(f,g) = \left(\int\limits_{[a,b]} |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, не является полным.

4.4.9. Показать, что пространство $L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, является сепарабельным пространством.

4.4.10. Показать, что весовое пространство $L^p_\sigma(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, является сепарабельным пространством.

4.4.11. Являются ли пространства $L_\infty(E)$ и $L^\infty_\sigma(E)$ сепарабельными пространствами?

4.4.12. Доказать, что при $p_1 > p_2 > 1$ имеет место вложение

$$L_{p_1}[a,b] \subset L_{p_2}[a,b].$$

4.4.13. Справедливо ли вложение

$$L_{p_1}(E) \subset L_{p_2}(E)$$

для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^N$?

4.4.14. Пусть множество E — конечной меры. Доказать, что имеет место вложение $L_{p_1}(E) \subset L_{p_2}(E)$, $p_1 > p_2$.

4.4.15. Доказать, что справедливо вложение

$$L^{p_1}_\sigma(E) \subset L^{p_2}_\sigma(E), \quad p_1 > p_2,$$

при условии, что функция $\sigma(x) \in L(E)$, а E — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^N$.

4.4.16. Доказать, что если функция $f(x) \in L_{p_1}(E) \cap L_{p_2}(E)$, то $f(x) \in L_p(E)$ для любого $p : p_1 \leqslant p \leqslant p_2$, где E — произвольное измеримое множество в $\mathbb{R}^N$.

4.4.17. Для любого $\delta > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ символом $L^p_\delta(\mathbb{R}^N)$ обозначим следующее весовое пространство: $L^p_\delta(\mathbb{R}^N) = \{f : f \in$ $\in L_p(|x| \leqslant R)$ для любого $R > 0$ и $\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p (1 + |x|)^{\delta p}\, dx\right)^{1/p} <$ $< \infty\}$. Доказать, что справедливо следующее вложение:

$$L^p_\delta(\mathbb{R}^N) \subset L_1(\mathbb{R}^N) \cap L_p(\mathbb{R}^N)$$

для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\delta > \dfrac{N}{p'}$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

4.4.18. Привести пример функции, не эквивалентной нулю и принадлежащей пространству $L_p[a, +\infty)$ для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4.4.19. Для любого $p > 1$ привести пример функции $f(x) \in$ $\in L_p(0, +\infty)$, но не принадлежащей пространству $L_{p-\varepsilon}(0, +\infty)$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

4.4.20. Для любого $p > 1$ привести пример функции $f(x) \in$ $\in L_p(0, +\infty)$, но не принадлежащей пространству $L_{p-\varepsilon}(0, +\infty)$ и $L_{p+\varepsilon}(0, +\infty)$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$.

4.4.21. Пусть $p > 1$ и $f(x) \in L_p[a, b]$. Пусть, кроме того, для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{[a,b]} x^n f(x)\, dx = 0\,.$$

Доказать, что $f(x) = 0$ п. в. на $[a, b]$.

4.4.22. Пусть $f(x) \in L_1[a, b]$ и для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{[a,b]} x^n f(x)\, dx = 0\,.$$

Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ п. в. на $[a, b]$?

4.4.23. Пусть $p \geqslant 1$ и $f(x) \in L^p_\sigma[a, b]$. Пусть также для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_{[a,b]} x^n f(x) \sigma(x)\, dx = 0$$

и функция $\sigma(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Доказать, что $f(x) = 0$ п. в. на $[a, b]$.

4.4.24. Пусть $f(x) \in L_2(0,+\infty)$ и для каждого $n = 1,2,\ldots$

$$\int\limits_{(0,+\infty)} x^n f(x)\,dx = 0\,.$$

Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ п. в. на $(0,+\infty)$?

4.4.25. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty,+\infty)$ и для каждого $n = 1,2,\ldots$

$$\int\limits_{(-\infty,+\infty)} x^n f(x)\,dx = 0\,.$$

Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ п. в. на $(0,+\infty)$?

4.4.26. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a,+\infty)$ к функции $f(x)$ и для каждого $n = 1,2,\ldots$ $f_n(x) \in L_1[a,+\infty)$. Следует ли отсюда, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ в пространстве $L_1[a,+\infty)$? Верно ли это утверждение для каждого отрезка $[a,b]$?

4.4.27. Доказать, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в пространстве $L_p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а E — произвольное измеримое множество, то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ по мере на E.

4.4.28. Пусть $1 \leqslant p_1 < p_2$ и множество E — конечной меры. Показать, что из сходимости последовательности функций в пространстве $L_{p_2}(E)$ вытекает сходимость последовательности в пространстве $L_{p_1}(E)$.

4.4.29. Привести пример последовательности функций, сходящейся к нулю в пространстве $L_{p_1}(0,1)$, но не сходящейся ни к какому пределу в пространстве $L_{p_2}(0,1)$, $p_2 > p_1$.

4.4.30. Пусть $1 \leqslant p_1 < p_2$ и множество E — бесконечной меры. Вытекает ли из сходимости последовательности функций в пространстве $L_{p_2}(E)$ сходимость последовательности в пространстве $L_{p_1}(E)$?

4.4.31. При каких значениях α функция $f(x)$, определенная по формуле

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1\,, \\ 0, & x = 0\,, \end{cases}$$

будет принадлежать $L_p[0,1]$, $L_\infty[0,1]$?

4.4.32. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ принадлежит пространству $L_1(0,\frac{1}{2})$, но не принадлежит никакому $L_p(0,\frac{1}{2})$ при $p > 1$.

4.4.33. Привести пример функции f, принадлежащей пространству $L_p(E)$ для любого $p \geqslant 1$, но не принадлежащей $L_\infty(E)$.

4.4.34. Доказать обобщенное неравенство Минковского (см. введение к настоящему параграфу).

4.4.35. Пусть функция $f \in L_p[a,b]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и равна нулю вне $[a,b]$. Символом $\varphi_h(x)$ обозначим следующую функцию:

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\,.$$

Доказать, что справедливо неравенство

$$||\varphi_h||_{L_p[a,b]} \leqslant ||f||_{L_p[a,b]}\,.$$

4.4.36. Доказать, что при $h \to 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{h\to 0} ||\varphi_h - f||_{L_p[a,b]} = 0\,.$$

4.4.37. Пусть функция $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Будут ли верны утверждения задач 4.4.35 и 4.4.36?

4.4.38. Пусть функция $f \in L_p(\mathbb{R})$, функция $g \in L_{p'}(\mathbb{R})$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $1 < p < \infty$. Символом $\varphi(x) = (f * g)(x)$ обозначается свертка функций f и g, которая имеет вид

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt\,.$$

Доказать, что φ — равномерно непрерывная функция на $\mathbb{R}$.

4.4.39. Верно ли утверждение предыдущей задачи для случая $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, а $g(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$?

4.4.40. Используя обобщенное неравенство Минковского, показать, что свертка φ функций f и g корректно определена для $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $g \in L_1(\mathbb{R})$. Показать также, что $\varphi(x) \in L_p(\mathbb{R})$ и имеет место неравенство

$$||\varphi||_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant ||g||_{L_1(\mathbb{R})} \cdot ||f||_{L_p(\mathbb{R})}\,.$$

4.4.41. Пусть функция $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. Доказать, что f непрерывна в смысле L_p, т.е.

$$\lim_{h\to 0} ||f(x+h) - f(x)||_{L_p(\mathbb{R})} = 0\,.$$