

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»*

*Факультет физико-математических и естественных наук*

Рекомендовано МССН  
09.00.00 «Информатика и  
вычислительная техника»

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И**  
**КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

**Рекомендуется для направления**  
09.06.01 - Информатика и вычислительная техника

**Профиль:** «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

(высшее образование – подготовка кадров высшей квалификации)

**Квалификация (степень) выпускника:**  
Исследователь. Преподаватель-исследователь

## 1. Цели и задачи дисциплины:

**Цель курса:** формирование у аспирантов навыков по профилю «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а также универсальных и профессиональных компетенций по проведению научных исследований в области научных исследований по современным методам в математической физике и математическом моделировании.

**К основным задачам** изучения дисциплины относятся:

- изучение современных методов исследования классических моделей математической физики, в том числе метода конечных элементов,
- осмысление роли функционального анализа в исследовании этих моделей,
- овладение навыками решения краевых и начально-краевых задач с использованием специализированного программного обеспечения (ПО).

## 2. Место дисциплины в структуре ООП.

Дисциплина относится к вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)».

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
<b>Универсальные компетенции</b>			
	УК-1	История и философия науки Методология научных исследований Программное обеспечение для проведения научных исследований Современные теоретические проблемы в численных методах	Научные исследования, Научно-исследовательская практика, Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена, Представление научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (диссертации)
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>			
	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3, ОПК-5	История и философия науки Методология научных исследований Методика преподавания информатики и вычислительной техники в высшей школе Современные теоретические проблемы в численных методах	Научно-исследовательская практика, Научные исследования, Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена, Представление научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (диссертации)
<b>Профессиональные компетенции (вид профессиональной деятельности - научно-исследовательский)</b>			
	ПК-1	Методология научных исследований Методика преподавания информатики и вычислительной техники в высшей школе Программное обеспечение для проведения научных исследований	Научно-исследовательская практика Научные исследования Представление научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (диссертации)

		Современные теоретические проблемы в численных методах	
Профессионально-специализированные компетенции специализации			
	-	-	-

УК-1 — способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях;

ОПК-1 — владеть методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности;

ОПК-2 – владеть культурой научного исследования, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных технологий;

ОПК-3 – способность к разработке новых методов исследования и их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в области профессиональной деятельности;

ОПК-5 – способность объективно оценивать результаты исследований и разработок, выполненных другими специалистами и в других научных учреждениях;

ПК-1 — способность самостоятельно проводить научные исследования в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ, применять полученные результаты в научных исследованиях и других областях.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: УК-1, ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3, ОПК-5, ПК-1.

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

**Знать** постановки основных задач математической физики, условия их разрешимости, современные методы их решения.

**Уметь** использовать специализированное программное обеспечение для решения основных задач математической физики, оценивать корректность и точность полученных результатов,

**Владеть** навыками применения специализированного программного обеспечения, ориентированного на применение метода конечных элементов (FEA software).

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет \_\_\_\_\_ 8 \_\_\_\_\_ зачетных единиц.

Вид учебной работы	Очная форма обучения			Заочная форма обучения		
	Всего часов	семестры		Всего часов	семестры	
		3	4		3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	120	60	60	120	60	60
В том числе:	-					
<i>Лекции</i>	40	20	20	40	20	20
<i>Практические занятия (ПЗ)</i>	48	24	24	48	24	24
<i>Семинары (С)</i>						
<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>	32	16	16	32	16	16
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	168	84	84	168	84	84
Общая трудоемкость, час	288	144	144	288	144	144
зач. ед.	8	4	4	8	4	4

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Функциональный анализ	<p>1. Гильбертовы пространства. Норма. Скалярное произведение. Линейные формы, теорема Рисса.</p> <p>2. Билинейные формы, теорема Лакса-Мильграма. Линейные операторы: ограниченные, самосопряженные, вполне непрерывные.</p> <p>3. Задача на собственные значения. Теорема о полноте системы собственных векторов самосопряженного вполне непрерывного оператора.</p>
2	Эллиптические уравнения	<p>1. Краевые задачи для уравнения Пуассона. Физический смысл краевых условий. Пространства Соболева. Теоремы вложения. Слабая постановка третьей краевой задачи, теорема о существовании и единственности ее решения.</p> <p>2. Первая и вторая краевые задачи, условия разрешимости 2-ой краевой задачи.</p> <p>3. Метод конечных элементов. Кусочно-линейная аппроксимация в пространствах Соболева, оценки точности. Лемма Сеа. Обоснование сходимости метода решения 3-ей краевой задачи для уравнения Пуассона по методу конечных элементов.</p>
3	Параболические уравнения	<p>1. Методы решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Сильная и обобщенная постановки начально краевой задачи. Теоремы о существовании и единственности решения.</p> <p>2. Исследование начально-краевой задачи на отрезке. Метод конечных разностей. Схема Эйлера. Устойчивость.</p>
4	Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения	<p>1. Уравнение колебаний струны. Постановка начально-краевой задачи. Метод Фурье. Метод Даламбера.</p> <p>2. Собственные колебания мембраны. Сильная и обобщенная постановки задачи на собственные значения оператора Лапласа. Свойства собственных значений и собственных функций. Первое собственное значение круга, прямоугольника и равностороннего треугольника. Функции Бесселя нулевого порядка нулевого порядка. Старшие собственные значения круга, прямоугольника и равностороннего треугольника. Функции Бесселя. Приближенное отыскание младших собственных значений по методу конечных элементов.</p> <p>3. Вынужденные колебания мембраны. Сильная и обобщенная постановки начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Метод Фурье и теорема Стеклова. Возбуждение круглой мембраны щипком. Сведение начально-краевой задачи к начальной задаче для системы линейных дифференциальных уравнений по методу конечных элементов. Исследование начальной задачи по явной схема Эйлера или путем разложения по собственным функциям (метод Фурье).</p>

## 5.2 Разделы дисциплин и виды занятий

### Для очной формы обучения

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. и лаб. зан.	СРС	Всего час.
1	Функциональный анализ	8	0	40	48
2	Эллиптические уравнения	12	40	44	96
3	Параболические уравнения	4	8	36	48
4	Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения	16	32	48	96
	<b>ИТОГО</b>	<b>40</b>	<b>80</b>	<b>168</b>	<b>288</b>

### Для заочной формы обучения

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. и лаб. зан.	СРС	Всего час.
1	Функциональный анализ	8	0	40	48
2	Эллиптические уравнения	12	40	44	96
3	Параболические уравнения	4	8	36	48
4	Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения	16	32	48	96
	<b>ИТОГО</b>	<b>40</b>	<b>80</b>	<b>168</b>	<b>288</b>

## 6-7. Лабораторные и практические занятия

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий	Трудоемкость (час.)
1.	2	Аппроксимация функций по МКЭ во FreeFem++	10
2	2	Решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа во FreeFem++, сравнение точного и приближенного решения.	10
3	2	Решение краевой задачи для уравнения Пуассона, реализация краевых условий Дирихле во FreeFem++	10
4	2	Исследование физического явления, моделью которого является краевая задача для уравнения Пуассона	10
5	3	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности во FreeFem++	8
6	4	Колебание струны, сравнение методов Фурье и Даламбера	7
7	4	Первые собственные значения мембраны	7
8	4	Старшие собственные значения круглой мембраны	6
9	4	Вынужденные колебания круглой мембраны, метод Фурье	6
10	4	Вынужденные колебания круглой мембраны, метод Эйлера	6

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийная учебная аудитория для проведения лекционных занятий. Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для выполнения обучающимися практических работ по дисциплине, для проведения обучающимися самостоятельной работы и компьютерного тестирования обучающихся (при необходимости).

## 9. Информационное обеспечение дисциплины.

а.) программное обеспечение:

ОС Linux, офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0), ПО для просмотра pdf (например, evince (лицензия GPL-2+ CC-BY-SA-3.0)), GNU Midnight Commander (Лицензия GNU GPL 3), редакторы emacs (лицензия GPL) или vi (лицензия BSD), FreeFem++ (Лицензия LGPL-2.1), TeXLive (Лицензия GPL-2 LPPL-1.3c TeX), Sagemath (Лицензия GPLv3).

б.) Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

- ТУИС <http://esystem.pfur.ru>
- Сайт библиотеки РУДН <http://lib.rudn.ru/>
- Электронная библиотека РГБ <http://www.rsl.ru/>
- Общероссийский математический портал [mathnet.ru](http://mathnet.ru)
- NIST Цифровая энциклопедия математических функций (<https://dlmf.nist.gov>)

с.) Облачные сервисы:

- CoCalc (<https://cocalc.com>) - веб-платформа для облачных вычислений и управления курсами для вычислительной математики, является частью проекта Sage, поддерживает редактирование рабочих листов Sage, документов LaTeX и блокнотов Jupyter, открывает доступ к экспериментам в консоли Linux (Ubuntu 18.04.2 LTS).
- ShareLaTeX (<https://ru.sharelatex.com>) - онлайн редактор LaTeX, не требует установки, поддерживает совместную работу в реальном времени.

## 10. Учебно-методическое обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин ; под ред. А.А. Самарского. - Москва : Наука, 1978. - 512 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=456957>
2. Пименов, В.Г. Численные методы : учебное пособие : в 2 ч. / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Ю.А. Меленцова. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - Ч. 2. - 107 с. : ил., табл., схем. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7996-1342-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275819>, <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275819>
3. Уравнения математической физики [Текст] : Учебное пособие для студентов-иностранцев / Л.В. Бигуаа, Н.В. Маркова. - М. : Изд-во РУДН, 2019. - 90 с. : ил. - ISBN 978-5-209-09372-5 : 69.20.
4. Примеры и задачи по уравнениям математической физики [Текст/электронный ресурс] : Учебно-методическое пособие / А.В. Краснослободцев. - Электронные текстовые данные. - М. : Изд-во РУДН, 2019. - 88 с. - ISBN 978-5-209-09172-1 : 67.23.
5. Ефремов, Ю. С. Методы математической физики в пакете символьной математики maple : учебное пособие для академического бакалавриата / Ю. С. Ефремов, М. Д. Петропавловский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 300 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05278-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/415876>

## **б) дополнительная литература**

1. Лекции по функциональному анализу [Текст] / Ф. Рисс, Секефальви - Надь Бела; Пер. с франц. Д.А.Василькова; Под ред. С.В.Фомина; Ред. С.А.Теляковский. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Мир, 1979. - 587 с. : ил. - 2.70. [ET 50].
2. Арсеньев А.А. Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. Изд. 2-е, испр. и доп. М., 2009, 2011. <http://window.edu.ru/resource/036/68036/files/arsen.pdf>
3. Краевые задачи математической физики [Текст] : Учебное пособие / О.А. Ладыженская. - М. : Наука, 1973. - 407 с. : ил. - 0.84. [ET 8]
4. Уравнения математической физики [Текст] : Учебное пособие для университетов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - 6-е изд., исправ. и доп. - М. : Изд-во МГУ, 1999. - 798 с. : ил. - ISBN 5-211-04138-0 : 70.00. [ET 2]. То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468275>
5. Лекции по математической физике [Текст] : Учебник по физике / А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов; А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. - М. : Изд-во МГУ, 1993. - 352 с. : ил. - ISBN 5-211-02073-1 : 17.00. [ET 1]
6. Метод конечных элементов [Текст] / Ж. Деклу; Пер. с франц. Б.И.Квасова; Под ред. Н.Н.Яненко. - М. : Мир, 1976. - 95 с. - 0.28. [ET 2]
7. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. — Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2008. — 256 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20414219>
8. Hecht F. Freefem++ / Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie. — 3-е изд. — Paris, 2018. — URL: [www.freefem.org](http://www.freefem.org).
9. Тухфатуллин, Б. А. Численные методы расчета строительных конструкций. Метод конечных элементов : учебное пособие для академического бакалавриата / Б. А. Тухфатуллин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 157 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-08899-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/442338>

## **11. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.**

Первая тема «Функциональный анализ» содержит ряд глубоких теоретических положений, практическое освоение которых будет происходить во время изучения всего курса. В лекционном изложении вопросы первой темы будут вплетены в изложение методов решения задач математической физики. После выполнения лабораторных работ обучающимся рекомендуется вернуться вновь к лекционному материалу и взглянуть на основные теоремы функционального анализа, отвлекшись от конкретных задач. Для более глубокого систематического освоения темы рекомендуется обратиться к лекциям классиков функционального анализа — венгерских математиков Ф. Рисса и Б. С.-Надя, одному из которых принадлежит заметная часть излагаемого материала. Дополнительный материал, который безусловно будет полезен в профессиональной деятельности будущих специалистов в области математического моделирования, можно найти в лекциях А.А. Арсеньева. Усвоение темы оценивается по ответам на теоретические вопросы на двух коллоквиумах и экзамене.

Вторая тема «Эллиптические уравнения» посвящена первой основной модели математической физики — краевой задачи для уравнения Пуассона. Обучающимся следует обратить внимание на то, что эта модель используется в различных предметных областях (принцип универсальности моделей). Третья тема «Параболическое уравнение» будет изложена очень коротко с тем, чтобы освободить место для четвертой «Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения». Такой выбор связан с тем, что объяснить роль задачи на собственные значения в методах решения этих задач проще на примере задачи о собственных колебаниях.

Принципиальным отличием этого курса от классического курса математической физики является систематическое использование метода конечных элементов, в то время как в классических курсах предлагают использовать разделение переменных, разложения в ряд и интегральные уравнения. Метод конечных элементов позволяет существенно расширить класс задач, решение которых обучающиеся могут довести до конца, представив на выходе решение не в виде формул, но в виде легко читаемых графиков.

Неотъемлемой частью освоения тем 2-4 является выполнение лабораторных работ в среде FreeFem++. Обучающимся следует обращать особое внимание на то, как абстрактные конструкции вплетаются в синтаксис языка FreeFem++. Лабораторные работы можно выполнять в дисплейных классах РУДН, где уже установлено и настроено все необходимое программное обеспечение, или дома, установив самостоятельно FreeFem++ (поддерживаются все популярные десктопные операционные системы). При возникновении вопросов следует прежде всего обращаться к пособию Жуков М. Ю. и Ширяева Е. В., затем к весьма подробной документации по FreeFem++, написанной Эштом. Отчет о выполненной лабораторной работе выполняется в издательской системе TeX.

Усвоение тем 2, 4 оценивается на двух коллоквиумах по теме 1 и 2 и темам 1 и 4 соответственно, а также по выполнению лабораторных работ. Усвоение темы 3 оценивается по выполнению лабораторной работы. Экзамен содержит теоретические вопросы по всем темам.

## **12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю).**

ФОС по дисциплине представлен в приложении к данной программе.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

### **Разработчики:**

доцент кафедры прикладной информатики  
и теории вероятностей, д.ф.-м.н.

М.Д. Малых

**Директор направления**  
**Заведующий кафедрой**  
прикладной информатики и теории вероятностей,  
д.т.н., проф.

К.Е. Самуйлов



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

**Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей**

# **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

## **ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И  
КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

09.06.01 - Информатика и вычислительная техника

*(указываются код и наименования направления(ий)*

*подготовки (специальности (ей) и/или профилей (специализаций)*

**Направленность программы**

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

*(наименование образовательной программы в соответствии с направленностью (профилем))*

Квалификация (степень) выпускника

Исследователь. Преподаватель-исследователь.

*Квалификация (степень) выпускника*

**Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

название

Направление: 09.06.01 - Информатика и вычислительная техника, Профиль: «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

шифр

название

Код контр. компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	ФОСы (формы контроля уровня освоения ООП)					Баллы раздела	
			Аудиторная работа		Самостоятельная работа		Экзамен		
			Выполнение ЛР	Коллоквиумы	Оформление ЛР	ДЗ			
УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-5; ПК-1	Функциональный анализ	Гильбертова пространства и линейные формы	0	5	0	0	10	48	
		Линейные операторы	0	5	0	0			
	Эллиптические уравнения	Метод конечных элементов	4	5	1	0			
		Третья краевая задача для уравнения Пуассона	4		1	1			
		Первая и вторая краевая задача для уравнения Пуассона	8		2	2			
	Параболические уравнения	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке	0	0	0	2	10		52
		Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в произвольной двумерной области	4		1	0			
		Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения	Колебания струны		4	5			
	Собственные колебания мембраны		8	2	2				
Вынужденные колебания мембраны	8		2	1					
		<b>Итого:</b>	<b>40</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>100</b>	

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций

УК-1; ОПК-1; ОПК-2; ОПК-3; ОПК-5; ПК-1  
(в соответствии с ОС ВО РУДН)

УК-1 — способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях;

ОПК-1 — владеть методологией теоретических и экспериментальных исследований в области профессиональной деятельности;

ОПК-2 – владеть культурой научного исследования, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных технологий;

ОПК-3 – способность к разработке новых методов исследования и их применению в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в области профессиональной деятельности;

ОПК-5 – способность объективно оценивать результаты исследований и разработок, выполненных другими специалистами и в других научных учреждениях;

ПК-1 — способность самостоятельно проводить научные исследования в области математического моделирования, численных методов и комплексов программ, применять полученные результаты в научных исследованиях и других областях.

# Балльно-рейтинговая система оценки уровня знаний

Сводная оценочная таблица дисциплины

Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	ФОСы (формы контроля уровня освоения ООП)				экзамен	Баллы раздела
		Аудиторная работа		Самостоятельная работа			
		Выполнение ЛР	Коллоквиумы	Оформление ЛР	ДЗ		
Функциональный анализ	Гильбертова пространства и линейные формы	0	5	0	0	10	48
	Линейные операторы	0	5	0	0		
Эллиптические уравнения	Метод конечных элементов	4	5	1	0		
	Третья краевая задача для уравнения Пуассона	4		1	1		
	Первая и вторая краевая задача для уравнения Пуассона	8		2	2		
Параболические уравнения	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности на отрезке	0	0	0	2	10	52
	Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в произвольной двумерной области	4		1	0		
Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения	Колебания струны	4	5	2	2	10	52
	Собственные колебания мембраны	8		2	2		
	Вынужденные колебания мембраны	8		2	1		
	<b>Итого:</b>	<b>40</b>	<b>20</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>100</b>

Таблица соответствия баллов и оценок

Баллы БРС	Традиционные оценки РФ	Оценки ECTS
95 - 100	5	A
86 - 94		B
69 - 85	4	C
61 - 68		D
51 - 60	3	E
31 - 50		FX
0 - 30		F
51-100	Зачет	Passed

## **Правила применения БРС**

1. Раздел (тема) учебной дисциплины считаются освоенными, если обучающийся набрал более 50 % от возможного числа баллов по этому разделу (теме).
2. Обучающийся не может быть аттестован по дисциплине, если он не освоил все темы и разделы дисциплины, указанные в сводной оценочной таблице дисциплины.
3. По решению преподавателя и с согласия обучающегося, не освоивших отдельные разделы (темы) изучаемой дисциплины, в течение учебного семестра могут быть повторно проведены мероприятия текущего контроля успеваемости или выданы дополнительные учебные задания по этим темам или разделам. При этом обучающимся за данную работу засчитывается минимально возможный положительный балл (51 % от максимального балла).
4. При выполнении обучающимся дополнительных учебных заданий или повторного прохождения мероприятий текущего контроля полученные им баллы засчитываются за конкретные темы. Итоговая сумма баллов не может превышать максимального количества баллов, установленного по данным темам (в соответствии с приказом Ректора № 564 от 20.06.2013). По решению преподавателя предыдущие баллы, полученные обучающимся по учебным заданиям, могут быть аннулированы.
5. График проведения мероприятий текущего контроля успеваемости формируется в соответствии с календарным планом курса. Обучающиеся обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
6. Время, которое отводится обучающемуся на выполнение мероприятий текущего контроля успеваемости, устанавливается преподавателем. По завершение отведенного времени обучающийся должен сдать работу преподавателю, вне зависимости от того, завершена она или нет.
7. Использование источников (в том числе конспектов лекций и лабораторных работ) во время выполнения контрольных мероприятий возможно только с разрешения преподавателя.
8. Отсрочка в прохождении мероприятий текущего контроля успеваемости считается уважительной только в случае болезни обучающегося, что подтверждается наличием у него медицинской справки, заверенной круглой печатью в поликлинике № 25, предоставляемой преподавателю не позднее двух недель после выздоровления. В этом случае выполнение контрольных мероприятий осуществляется после выздоровления обучающегося в срок, назначенный преподавателем. В противном случае, отсутствие обучающегося на контрольном мероприятии признается не уважительным.
9. Обучающийся допускается к итоговому контролю знаний с любым количеством баллов, набранных в семестре.
10. Итоговый контроль знаний оценивается из 20 баллов независимо от числа баллов за семестр.
11. Если в итоге за семестр аспирант получил менее 51 балла, то аспиранту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путем повторного одноразового выполнения предусмотренных контрольных мероприятий, при этом по усмотрению преподавателя аннулируются соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период теоретического обучения в сроки по согласованию с деканатом.

## Примерный перечень оценочных средств

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Лабораторная работа	Система практических заданий, направленных на формирование практических навыков у обучающихся	Фонд практических заданий
2	Коллоквиум	Средство контроля усвоения учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины, организованное как учебное занятие в виде собеседования преподавателя с обучающимися.	Вопросы по темам/разделам дисциплины
	Экзамен	Оценка работы студента в течение семестра (года, всего срока обучения и др.) и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач.	Примеры заданий/вопросов, пример экзаменационного билета
<i>Самостоятельная работа</i>			
1	Подготовка отчетов по результатам выполнения лабораторных работ	Форма проверки качества выполнения обучающимися лабораторных работ в соответствии с утвержденной программой.	Фонд практических заданий в рамках лабораторного практикума по дисциплине
2	Выполнение домашних заданий	Различают задачи и задания: а) репродуктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; б) реконструктивного уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; в) творческого уровня, позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.	Комплект разноуровневых задач и заданий

## Критерии оценки по дисциплине

*95-100 баллов:*

- полное и своевременное выполнение на высоком уровне лабораторных работ с оформлением отчетов, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса, успешная сдача экзамена;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответов на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

*86- 94 балла:*

- полное и своевременное выполнение на хорошем уровне лабораторных работ с оформлением отчетов, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса, успешная сдача экзамена;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- хорошее владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, нормативных и законодательных актов, рекомендованных программой дисциплины и преподавателем.

*69-85 баллов:*

- своевременное выполнение на хорошем уровне лабораторных работ с оформлением отчетов, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса, сдача экзамена с существенными замечаниями;
- хороший уровень культуры исполнения лабораторных работ;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- владение программным обеспечением, умение использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;

- способность самостоятельно решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- усвоение основной литературы;

*51-68 баллов:*

- выполнение на удовлетворительном уровне лабораторных работ с оформлением отчетов, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- удовлетворительное владение программным обеспечением, умение использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

*31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:*

- не выполнение, несвоевременное выполнение или выполнение на неудовлетворительном уровне лабораторных работ, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое владение программным обеспечением по разделам программы дисциплины, некомпетентность в решении стандартных (типовых) производственных задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

*0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:*

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение лабораторных заданий, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса; отказ от ответов по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.



# Коллоквиумы и экзамен

Усвоение теоретических вопросов тем 1,2 и 4 контролируется путем проведения двух коллоквиумов и экзамена.

## Коллоквиум № 1

### Перечень вопросов по теме 1.

1. Линейное пространство. Линейная и билинейная форма. Скалярное произведение. Норма.
2. Линейное пространство столбцов длины  $N$ . Скалярное произведение. Линейная форма. Норма линейной формы.
3. Бесконечномерное линейное пространство. Гильбертово пространство. Ограниченная линейная форма и ее представление (теорема Рисса).
4. Пространство Соболева  $W^1_2$ . Скалярное произведение. Норма. Ограниченные линейные формы. Теорема Рисса и ее использование при исследовании разрешимости третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.

### Перечень вопросов по теме 2.

1. Сформулируйте первую краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
2. Сформулируйте вторую краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
3. Сформулируйте третью краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
4. Модель, описывающая стационарное распределение температуры в ограниченном пространстве. Физический смысл краевых условий.
5. Принцип максимума для гармонических функций и его физический смысл.
6. Модель, описывающая стационарное электрическое поле в лейденской банке.
7. Модель, описывающая потенциальные течения в трубе переменного сечения.
8. Что такое пространство конечных элементов?
9. Какова точность аппроксимации гладкой функции конечными элементами?
10. Опишите порядок решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона по методу конечных элементов.
11. Какому пространству принадлежит приближенное решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, найденное по методу конечных элементов? В каких нормах оценивают отклонение от точного решения? Что такое априорные и апостериорные оценки точности того или иного численного метода?
12. Сформулируйте и докажите лемму Сеа.
13. Какова роль леммы Сеа в обосновании сходимости метода конечных элементов?

## Коллоквиум № 2

### Перечень вопросов по теме 1.

1. Матрицы как линейные операторы в пространстве столбцов. Норма матрицы. Билинейная форма и ее представление (теорема Лакса-Милграма).
2. Операторы в гильбертовом пространстве. Норма оператора. Билинейная форма и ее представление (теорема Лакса-Милграма).
3. Запись третьей краевой задачи для уравнения Пуассона при помощи операторов.
4. Симметричные матрицы. Задача на собственные значения. Теорема о полноте системы собственных векторов.
5. Симметричные матрицы большого порядка. Задача на собственные значения и методы ее численного решения. ПО для решения этой задачи.
6. Задача на собственные значения для самосопряженного матричного пучка. Колебания системы связанных маятников.
7. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры таких операторов в пространстве Соболева  $W^1_2$ .
8. Вполне непрерывные операторы. Примеры таких операторов в пространстве Соболева  $W^1_2$ .
9. Задача на собственные значения для вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема о полноте системы собственных векторов.

### Перечень вопросов по теме 4.

1. Собственные колебания струны.
2. Вынужденные колебания струны. Метод Фурье.
3. Вынужденные колебания струны. Метод Даламбера.
4. Запись задачи о собственных колебаниях мембраны в классическом виде, обобщенном виде и как задачи на собственные значения.
5. Опишите порядок решения задачи о собственных колебаниях мембраны по методу конечных элементов.
6. Свойства собственных частот мембраны.
7. Свойства собственных функций мембраны. Теорема Стеклова.
8. Задача о вынужденных колебаниях мембраны, ее решение в виде ряда по собственным функциям.
9. Задача о вынужденных колебаниях мембраны, ее решение по методу Эйлера.

## Экзамен

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов по темам 1-2 и 3-4 соответственно.

### Перечень вопросов по теме 1.

1. Линейное пространство. Линейная и билинейная форма. Скалярное произведение. Норма.
2. Линейное пространство столбцов длины  $N$ . Скалярное произведение. Линейная форма. Норма линейной формы.
3. Бесконечномерное линейное пространство. Гильбертово пространство. Ограниченная линейная форма и ее представление (теорема Рисса).
4. Пространство Соболева  $W^1_2$ . Скалярное произведение. Норма. Ограниченные линейные формы. Теорема Рисса и ее использование при исследовании разрешимости третьей краевой задачи для уравнения Пуассона.
5. Матрицы как линейные операторы в пространстве столбцов. Норма матрицы. Билинейная форма и ее представление (теорема Лакса-Милграма).
6. Операторы в гильбертовом пространстве. Норма оператора. Билинейная форма и ее представление (теорема Лакса-Милграма).
7. Запись третьей краевой задачи для уравнения Пуассона при помощи операторов.
8. Симметричные матрицы. Задача на собственные значения. Теорема о полноте системы собственных векторов.
9. Симметричные матрицы большого порядка. Задача на собственные значения и методы ее численного решения. ПО для решения этой задачи.
10. Задача на собственные значения для самосопряженного матричного пучка. Колебания системы связанных маятников.
11. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Примеры таких операторов в пространстве Соболева  $W^1_2$ .
12. Вполне непрерывные операторы. Примеры таких операторов в пространстве Соболева  $W^1_2$ .
13. Задача на собственные значения для вполне непрерывного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема о полноте системы собственных векторов.

### Перечень вопросов по теме 2.

1. Сформулируйте первую краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
2. Сформулируйте вторую краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
3. Сформулируйте третью краевую задачу для уравнения Пуассона в классической и обобщенной форме. Эквивалентны ли эти формулировки?
4. Модель, описывающая стационарное распределение температуры в ограниченном пространстве. Физический смысл краевых условий.
5. Принцип максимума для гармонических функций и его физический смысл.
6. Модель, описывающая стационарное электрическое поле в лейденской банке.

7. Модель, описывающая потенциальные течения в трубе переменного сечения.
8. Что такое пространство конечных элементов?
9. Какова точность аппроксимации гладкой функции конечными элементами?
10. Опишите порядок решения третьей краевой задачи для уравнения Пуассона по методу конечных элементов.
11. Какому пространству принадлежит приближенное решение третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, найденное по методу конечных элементов? В каких нормах оценивают отклонение от точного решения? Что такое априорные и апостериорные оценки точности того или иного численного метода?
12. Сформулируйте и докажите лемму Сеа.
13. Какова роль леммы Сеа в обосновании сходимости метода конечных элементов?

### **Перечень вопросов по теме 3.**

1. Классическая и обобщенная постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке. Теорема о существовании и единственности решения. Разложение решения в ряд Фурье.
2. Классическая и обобщенная постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в двумерной области. Разложение решения по собственным функциям.
3. Классическая и обобщенная постановки начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в двумерной области. Метод Эйлера.

### **Перечень вопросов по теме 4.**

1. Собственные колебания струны.
2. Вынужденные колебания струны. Метод Фурье.
3. Вынужденные колебания струны. Метод Даламбера.
4. Запись задачи о собственных колебаниях мембраны в классическом виде, обобщенном виде и как задачи на собственные значения.
5. Опишите порядок решения задачи о собственных колебаниях мембраны по методу конечных элементов.
6. Свойства собственных частот мембраны.
7. Свойства собственных функций мембраны. Теорема Стеклова.
8. Задача о вынужденных колебаниях мембраны, ее решение в виде ряда по собственным функциям.
9. Задача о вынужденных колебаниях мембраны, ее решение по методу Эйлера.

# Комплект разноуровневых задач (заданий)

## 1. Задания репродуктивного уровня

В качестве заданий репродуктивного уровня предлагаются задачи для самопроверки и обсуждения по темам курса.

- Решить первую, вторую или третью краевую для уравнения Лапласа задачу в круге по методу Фурье.
- Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке
- Описать возбуждение струны щипком заданной формы.
- Описать возбуждение струны ударом молоточка заданной формы.
- Найти наименьшую собственную частоту прямоугольной мембраны. Выписать соответствующую ему собственную функцию.
- Найти наименьшую собственную частоту круглой мембраны. Выписать соответствующую ему собственную функцию.
- Описать по методу Фурье возбуждение круглой мембраны под действием удара молоточком по ее центру.

## 2. Задания реконструктивного уровня

В качестве заданий реконструктивного уровня предполагаются задания лабораторного практикума.

### Раздел «Эллиптические уравнения»

#### Лабораторная работа № 1. Аппроксимация функций по МКЭ во FreeFem++

Задание: дана двумерная область и функция, требуется в среде FreeFem++

- 1) описать область и ее триангуляцию
- 2) ввести пространство конечных элементов
- 3) аппроксимировать в этом пространстве заданную функцию.
- 4) вывести график получившейся функции
- 5) сравнить его с графиком заданной функции, нарисованной в Sage или любом другом графопостроителе.

#### Лабораторная работа № 2. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа во FreeFem++, сравнение точного и приближенного решения.

Задание: дана классическая постановка третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в круге. Требуется:

- 1) решить эту задачу по методу Фурье
- 2) записать обобщенную постановку заданной задачи
- 3) написать программу на языке FreeFem++ для решения этой задачи
- 4) нарисовать график приближенного решения
- 5) вычислить норму приближенного решения и норму разности приближенного решения и аппроксимации точного решения в пространстве конечных элементов.

**Лабораторная работа № 3.** Решение краевой задачи для уравнения Пуассона, реализация краевых условий Дирихле во FreeFem++

Задание: дана классическая постановка первой краевой задачи для уравнения Пуассона. Требуется:

- 1) записать обобщенную постановку заданной задачи,
- 2) написать программу на языке FreeFem++ для решения этой задачи, используя условия третьего рода,
- 3) написать программу на языке FreeFem++ для решения этой задачи, используя конструкцию `+op`,
- 4) сравнить так полученные приближенные решения.

**Лабораторная работа № 4.** Исследование физического явления, моделью которого является краевая задача для уравнения Пуассона

Задание:

- 1) выбрать какое-либо явление, математической моделью которого служит краевая задача для уравнения Пуассона
- 2) написать программу на языке FreeFem++ для решения этой задачи,
- 3) ответ проиллюстрировать графиком.

**Раздел «Параболические уравнения»**

**Лабораторная работа № 5.** Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности во FreeFem++

Задание: дана классическая постановка начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в двумерной области. Требуется:

- 1) записать обобщенную постановку заданной задачи,
- 2) записать схему Эйлера по  $t$ ,
- 3) написать программу на языке FreeFem++ для решения этой задачи,
- 4) ответ проиллюстрировать графиком.

**Раздел «Гиперболические уравнения и задачи на собственные значения»**

**Лабораторная работа № 6.** Колебание струны, сравнение методов Фурье и Даламбера

Задание: дана классическая постановка начально-краевой задачи, описывающей возбуждение колебаний струны ударом молоточка произвольной формы.

- 1) записать аналитически решение этой задачи по методу Фурье
- 2) записать аналитически решение этой задачи по методу Даламбера
- 3) сравнить эти решения в любой системе компьютерной алгебры, напр., в Sage.
- 4) ответ проиллюстрировать графиком.

**Лабораторная работа № 7. Первые собственные значения мембраны**

Задание: дана мембрана (двумерная область). Требуется:

- 1) записать обобщенную постановку задачи на собственные значения,
- 2) написать программу на языке FreeFem++ для отыскания наименьшей собственной частоты этой мембраны,
- 3) нарисовать график соответствующей ей собственной функции.

#### **Лабораторная работа № 8.** Старшие собственные значения круглой мембраны

Задание: дана круглая мембрана (круг радиуса 1). Требуется:

- 1) записать обобщенную постановку задачи на собственные значения,
- 2) написать программу на языке FreeFem++ для отыскания первых 10 наименьших собственных частот этой мембраны,
- 3) нарисовать график соответствующих им собственной функции.
- 4) в лекционном курсе найти выражения для собственных частот и функций круглой мембраны,
- 5) написать в системе Sage программу для вычисления этих частот и построения графиков этих функций,
- 6) сравнить результаты, полученные в FreeFem++ и Sage.

#### **Лабораторная работа № 9.** Вынужденные колебания круглой мембраны, метод Фурье

Задание: начально-краевая задача, описывающая вынужденные колебания круглой мембраны.

- 1) выписать формулы для разложения решения этой задачи в ряд по собственным функциям,
- 1) написать программу на языке FreeFem++ для отыскания первых 10 наименьших собственных частот этой мембраны,
- 2) в среде FreeFem++ вычислить первые 10 коэффициентов Фурье для решения заданной начально-краевой задачи
- 4) нарисовать график решения заданной задачи, урезав ряд Фурье до первых 10 членов.

#### **Лабораторная работа № 10.** Вынужденные колебания круглой мембраны, метод Эйлера

Задание: начально-краевая задача, описывающая вынужденные колебания круглой мембраны.

- 1) выписать обобщенную формулировку заданной начально-краевой задачи,
- 1) провести дискретизацию по  $t$  по методу Эйлера,
- 2) в среде FreeFem++ написать программу для решения так дискретизованной задачи,
- 4) нарисовать график решения заданной задачи.

#### **Методические указания и шкала оценок.**

Порядок выполнения лабораторной работы заключается в следующем:

- Ознакомиться с разделами методических указаний к лабораторной работе.
- Выполнить задания по лабораторной работе.
- Составить отчёт в издательской системе LaTeX.

Отчёт должен содержать следующие элементы:

- Титульный лист с указанием номера лабораторной работы и ФИО обучающегося
- Формулировка задания работы.
- Описание результатов выполнения задания:
  - листинги программ,
  - графики найденных решений.
- Выводы, согласованные с заданием работы.
- Ответы на контрольные вопросы.

### **Критерии оценки выполнения домашних заданий и заданий по лабораторным работам**

Оценивается полнота выполнения работы, оформление результатов, полнота ответов на контрольные вопросы, если это предусмотрено заданием.