

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ  
(РУДН)**

*Экономический факультет*

**Программа дисциплины**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Направление подготовки

***38.03.01 Экономика***

Квалификация (степень) выпускника

**Бакалавр**

Москва

2021

**1. Цели и задачи дисциплины:** ознакомление с фундаментальными методами дифференциального и интегрального исчислений. Математический анализ является основой для изучения других математических курсов, дает необходимый математический аппарат для изложения экономических дисциплин.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП:**

Учебная дисциплина «Математический анализ» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин; требования к входным знаниям и умениям студента – знание элементарной математики: алгебры, элементарных функций, умение дифференцировать; данная дисциплина является предшествующей для следующих дисциплин: Макроэкономика, Микроэкономика, Теория вероятностей и математическая статистика, Эконометрика, Методы оптимальных решений.

## **3. Требования к результатам освоения дисциплины:**

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

– способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК–1).

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные факты из теории множеств;
- основные факты о монотонных и сходящихся последовательностях;
- основные теоремы о пределах сходящихся числовых последовательностей;
- основные теоремы о пределах функций и правила действий с пределами функций;
- знать основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин;
- основные определения непрерывности функции одной действительной переменной;
- основные свойства функций, непрерывных в точке и на замкнутом промежутке;
- определение производной, её геометрический и экономический смысл;
- определение дифференциала функции одной переменной;
- основные факты о дифференцируемости функций одной действительной переменной;
- правила выполнения рациональных операций с производными;
- основные теоремы дифференциального исчисления;
- определения и правила вычисления неопределенных и определенных интегралов;
- признаки сходимости несобственных интегралов;
- основные понятия и теоремы о числовых и функциональных рядах;

***уметь:***

- применять основные теоремы о пределах сходящихся числовых последовательностей; знать основные факты о монотонных и сходящихся последовательностях;
- раскрывать основные неопределенности при вычислении пределов числовых последовательностей и пределов функций;
- использовать для решения типовых примеров основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин;
- использовать для решения типовых примеров основные определения непрерывности функции одной действительной переменной;
- находить производные элементарных функций, пользуясь её определением;
- находить производные элементарных функций и их композиций, пользуясь табличными производными и правилами дифференцирования;
- находить дифференциалы элементарных функций и их композиций, производить приближенные вычисления с дифференциалами;
- проводить исследование функций одной действительной переменной и проводить построение их графиков;
- находить неопределенные интегралы методами непосредственного интегрирования, методом замены переменной и методом интегрирования по частям;
- исследовать сходимость несобственных интегралов;
- находить частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных;
- находить градиент и производную по направлению функции нескольких переменных;
- находить частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных;
- необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных;
- проводить исследование функции нескольких переменных;
- находить суммы числовых рядов;
- осуществлять приближенные вычисления с помощью рядов Тейлора;

***владеть:***

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации и решения сложных и нестандартных задач;

- культурой постановки, анализа и решения экономических задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком математики и навыками грамотного решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Семестры	
		3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	<b>51</b>	<b>27</b>	<b>24</b>
В том числе:			
Лекции	17	9	8
Практические занятия (ПЗ)			
Семинары (С)	34	18	16
Лабораторные работы (ЛР)			
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	<b>93</b>	<b>36</b>	<b>57</b>
В том числе:			
Курсовой проект (работа)			
Расчетно-графические работы			
Реферат			
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>			
Самостоятельная работа			
Выполнение домашнего задания	93	36	57
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	36	9	27
Общая трудоемкость	часы	180	108
	зачетные единицы	5	3

#### 5. Содержание дисциплины

##### 5.1. Содержание разделов дисциплины

###### 1. Введение. Элементы теории множеств и функций

Предмет математического анализа и его роль в экономической теории. Понятие множества и подмножества. Пустое множество. Множество всех подмножеств множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Соответствие, отношение, бинарное

отношение. Взаимно однозначное соответствие. Эквивалентные множества, счетные и не-счетные множества. Примеры. Элементы математической логики: логические символы, утверждение, следствие, прямая и обратная теоремы, необходимые и достаточные условия. Понятие отображения (функции), его области определения и области значений. Элементарные функции. Обратное отображение. Композиция отображений. Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой, эквивалентность этих множеств. Свойства действительных чисел. Подмножества множества действительных чисел. Ограниченные (сверху, снизу) и неограниченные (сверху, снизу) множества. Наибольший (наименьший) элемент множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Теорема о существовании верхней (нижней) грани. Понятие окрестности действительного числа (точки) и окрестности с выколотым центром. Понятие предельной точки точечного множества на числовой прямой. Внутренние и граничные точки. Множества плотные в себе, совершенные множества. Открытые и замкнутые множества.

## ***2. Предел и непрерывность функции одной переменной***

Примеры последовательностей. Предел числовой последовательности. Существование предела у ограниченной монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Лемма о существовании предельной точки у ограниченного бесконечного множества на числовой оси. Предел функции одной переменной. Односторонние и двусторонние пределы. Бесконечно малые (бесконечно большие) величины и их связь с пределами функций. Функции одной переменной, не имеющие предела в точке и на бесконечности. Свойства операции предельного перехода. Предельный переход в сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Второй замечательный предел в задаче о начислении процентов. Символы  $o$ -малое и  $O$ -большое и их использование для раскрытия неопределенностей. Непрерывность функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность сложной функции. Верхняя (нижняя) грань, глобальный максимум (минимум) функции в ее области определения. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши о непрерывной на отрезке функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции у строго монотонной функции, непрерывной на отрезке. Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора.

## ***3. Производная и дифференциал функции одной переменной***

Понятие производной функции одной переменной. Геометрическая и экономическая интерпретации производной. Уравнение касательной. Понятие о предельной полезности продукта и предельной производительности ресурса. Понятие об эластичности функции. Понятие дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные основных элементарных функций. Понятие дифференциала функции одной переменной. Геометрическая интерпретация дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной и их свойства. Иллюстрация экономического смысла второй производной.

#### ***4. Исследование дифференцируемых функций одной переменной***

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Задача максимизации прибыли фирмы. Локальный экстремум (внутренний и граничный) функции одной переменной. Необходимое условие внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). Теоремы о среднем значении (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши) и их геометрическая интерпретация. Правило Лопиталю. Формулы Тейлора и Маклорена и их использование для представления и приближенного вычисления значений функций. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости). Точка перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Вертикальные и неvertикальные асимптоты графика функции одной переменной. Исследование функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика. Определение глобального максимума (минимума) функции одной переменной в области ее определения. Решение задачи максимизации прибыли фирмы в терминах объема выпускаемой продукции, а также в случае одного ресурса.

#### ***5. Множества точек и последовательности в $n$ -мерном пространстве. Функции нескольких переменных (ФНП)***

Множество всех двумерных векторов. Геометрическая и экономическая интерпретация двумерных векторов.  $n$ -мерные вектора. Операции сложения  $n$ -мерных векторов и их умножения на действительные числа. Свойства этих операций. Скалярное произведение. Понятие  $n$ -мерного евклидова пространства. Норма  $n$ -мерного вектора и ее свойства. Понятие

окрестности точки, окрестности с выколотым центром. Понятие предельной, внутренней и граничной точек точечного множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Открытые и замкнутые множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Понятие линейной, неотрицательной и выпуклой комбинации точек плоскости и  $n$ -мерного пространства. Выпуклые и невыпуклые множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Понятие расстояния. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника. Множества связные, несвязные, ограниченные, неограниченные. Замкнутость. Компактные множества. Понятие области. Отделимые множества. Понятие направления в точке. Последовательность точек на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Понятие ограниченной и неограниченной последовательности точек. Взаимосвязь с покоординатной сходимостью. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Лемма о предельной точке.

Функции двух переменных. Понятие о множестве (линии) уровня функции двух переменных. Карта множеств уровня функции двух переменных, взаимное расположение линии уровня функции двух переменных. Обобщение на случай функций нескольких переменных. Экономические иллюстрации (функции спроса и предложения, функция полезности, производственная функция). Предел функции нескольких переменных. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные предельные значения. Предел функции по направлению. Повторные предельные значения. Теорема о существовании повторного предела. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и на множестве. Точки непрерывности и точки разрыва функции. Непрерывность функции в точке и по направлению. Взаимосвязь между непрерывностью функции по совокупности переменных и по каждому отдельному направлению. Арифметические операции над непрерывными функциями. Понятие о сложной функции. Непрерывность сложной функции. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши. Равномерная непрерывность.

Частные производные и частные дифференциалы. Градиент ФНП. Дифференцируемость ФНП. Главная линейная часть приращения ФНП. Полный дифференциал ФНП. Достаточное условие дифференцируемости ФНП. Геометрическая и экономическая интерпретация частных производных. Эластичности. Касательная плоскость к графику ФНП. Дифференцируемость сложных ФНП. Инвариантность формы дифференциала ФНП. Однородные функции. Теорема Эйлера об однородных функциях и ее применение в экономической теории. Производная по направлению. Ортогональность градиента и множества уровня ФНП в точке ее дифференцируемости. Частные производные и дифференциалы порядка выше первого. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Матрица Гессе и гессиан.

## **6. Классические методы оптимизации**

Экстремум ФНП (абсолютный, условный, локальный, глобальный). Необходимое условие локального абсолютного экстремума. Знакоопределенность квадратичной формы. Достаточное условие локального абсолютного экстремума. Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции. Функция Лагранжа и множители Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие локального условного экстремума и его геометрическая интерпретация. Достаточное условие локального условного экстремума. Теорема об огибающей. Задача глобальной оптимизации. Примеры применения метода Лагранжа.

## **7. Интегрирование**

Первообразная и неопределенный интеграл. Первая основная теорема интегрального исчисления (о существовании первообразной у непрерывной функции). Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Табличные интегралы. Приемы интегрирования (разложением, заменой переменной и по частям). Интегральная сумма Римана, определенный интеграл и его геометрическая интерпретация. Интегральные суммы Дарбу. Свойства определенного интеграла (связанные с подынтегральной функцией, с отрезком интегрирования). Теорема о среднем значении. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его производная по этому пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вторая основная теорема интегрального исчисления (о существовании определенного интеграла у непрерывной функции). Интегрируемые по Риману функции. Замена переменной и формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Экономические иллюстрации использования понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки сходимости. Понятие двойного интеграла и его геометрическая интерпретация. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Понятие о тройных и  $n$ -кратных интегралах. Несобственные кратные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра.

## **8. Числовые, функциональные и степенные ряды**

Понятие о числовых рядах. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимое условие сходимости ряда. Признаки сходимости для знакопостоянных и знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Функциональные ряды. Сходимость и равномерная сходимость функционального ряда. Непрерывность суммы функционального ряда, почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Степенные ряды. Промежуток и радиус сходимости степенного ряда. Формула для вычисления радиуса сходимости. Понятие ряда Тейлора и аналитической функции. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической. Приближенные вычисления с помощью рядов Тейлора. Понятие о рядах Фурье. Теорема о представлении функции в виде ее ряда Фурье.

### 5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Макроэкономика		+	+	+	+	+	+	
2.	Микроэкономика		+	+	+	+	+	+	
3.	Теория вероятностей и математическая статистика	+	+	+	+	+		+	+
4.	Эконометрика		+			+			+
5.	Методы оптимальных решений		+	+	+	+	+	+	

### 5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Се-мин.	СРС	Все-го
1.	Введение. Элементы теории множеств и функций.	1	-	-	2	4	7
2.	Предел и непрерывность функции одной переменной.	1	-	-	2	4	7
3.	Производная и дифференциал функций одной переменной.	1	-	-	2	4	7
4.	Исследование дифференцируемых функций одной переменной.	3	-	-	6	12	21

5.	Множества точек и последовательности в n-мерном пространстве. Функции нескольких переменных.	3	-	-	6	12	21
6.	Классические методы оптимизации.	3	-	-	6	20	29
7.	Интегрирование.	3	-	-	6	20	29
8.	Числовые, функциональные и степенные ряды.	2	-	-	4	17	23
	Итого:	17	-	-	34	93	144

## 6. Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость (часы/зачетные единицы)
1.			
2.			
3.			
...			

## 7. Примерная тематика курсовых проектов (работ) \_\_\_\_\_

---

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. — М.: Юнити-Дана, 2010.
2. Кремер Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов. — М.: Юнити-Дана, 2010.
3. Ключин В.Л. Высшая математика для экономистов. — М.: ИНФРА-М, 2009.
4. Ключин В.Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения. — М.: РУДН, 2005.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Лань, 2009.

б) дополнительная литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 2009.
2. Зорич В.А. Математический анализ. — М.: МЦНМО, 2007.
3. Ермаков В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. — М.: ИНФРА-М, 2007.
4. Волкова И.О., Крутицкая Н.Ч., Шагин В.Л. Математический анализ (с экономическими приложениями). Функции одной переменной.— М.: ВШЭ, 1998.
5. Замков О.О., Черемных Ю.Н., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике: Учебник. — М.: Дело и Сервис, 1999.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. — М.: Дело, 2000.
7. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике. Часть 2. Математический анализ. — М.: ИНФРА-М, 2011.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов. / Под ред. Ермакова В.И. — М.: ИНФРА-М, 2009.
9. Шипачев В.С. Математический анализ. — М.: Высшая школа, 2009.
10. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. — М.: Проспект, 2006.
11. Математический анализ для экономистов. / Под ред. А.А. Гриба и А.Ф. Тарасюка. — М.: ФИЛИН, 2001.
12. Chiang A. C. Fundamental Methods of Mathematical Economics. N.Y.: McGraw Hill, 1984.
13. Sydsaeter K., Hammond P.J. Mathematics for Economic Analysis. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1995.
14. Simon C.P., Blume L. Mathematics for economists. N.Y., London: Norton, 1994.

#### **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

- учебные аудитории (кабинеты) с рабочими местами для проведения лекций (по числу студентов в потоке) и для проведения семинаров (по числу студентов в отдельных группах);
- доска;
- стационарный персональный компьютер с пакетом программ Microsoft Office;
- мультимедийный проектор;
- допускается использование переносной аппаратуры (ноутбук и проектор);
- экран (стационарный или переносной напольный).

№ ауд.	Наименование оборудованных учебных кабинетов	Перечень основного оборудования
17	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 2 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 2 шт.
101	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 2 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 2 шт.
103	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 1 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 1 шт.
105	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 1 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 1 шт.
Конф. зал	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 1 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 1 шт.
Зал 3	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 1 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 1 шт.
Зал 4 библ.	Учебная аудитория	Мультимедиа проектор – 1 шт., звуковая трибуна – 1 шт., экран – 1 шт.

#### **10. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:**

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде двух контрольных работ и домашних заданий. Продолжительность контрольных работ — 80 минут. Итоговый контроль осуществляется в виде итогового испытания с теоретической и практической частью.

#### **Разработчики:**

доцент  
Должность,

Математический институт им. С.М. Никольского  
название кафедры,

Н.Г. Павлова  
инициалы, фамилия