

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.04.01 «Математика»,
специализация «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»

Квалификация (степень) выпускника

магистр

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины: Дисциплина «Нелинейный анализ и оптимизация» является одной из финальных дисциплин направления подготовки «Математика», подводящих итог всему обучению в магистратуре (и бакалавриате) и подготавливающих студента к защите его выпускной работы, а также к обучению его в аспирантуре. В качестве составной части дисциплина содержит в себе специальный научно-исследовательский семинар кафедры нелинейного анализа и оптимизации, который в свою очередь является основным инструментом в подготовке действующего (работающего) математика-специалиста. Без такого (или подобного) семинара формирование полноценного профессионального математика невозможно. Другими словами, научный семинар, а с ним и дисциплина «Нелинейный анализ и оптимизация» является необходимой составной, если не главной итоговой, частью общего университетского математического образования и целью его является указанное выше окончательное формирование выпускника-специалиста в области математики.

Основная цель курса – овладение обучающимися основными навыками самостоятельной исследовательской работы в области математики, а также работы в группе исследователей. Побочными (но не менее важными) целями являются приобретение навыков изложения собственных результатов; выступления в качестве докладчиков, рецензентов, оппонентов на чужих докладах; написания и подготовки к публикации собственных работ: тезисов, заметок, статей, диссертаций и др.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Нелинейный анализ и оптимизация» относится к вариативной компоненте блока 1 учебного плана. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Профессиональные компетенции			
	ПК-5. Способность управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта	Курсовая работа	Государственный экзамен
	ПК-6. Способность организовывать процессы корпоративного обучения на основе информационных технологий и развития корпоративных баз знаний	-	Государственный экзамен

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ПК-5, ПК-6.

ПК-5. Способность управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта.

ПК-6. Способность организовывать процессы корпоративного обучения на основе информационных технологий и развития корпоративных баз знаний.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать, что такое научная и научно-методическая работа в области математики. В частности, в основных направлениях работы кафедры: нелинейном анализе и оптимизации.

Уметь решать поставленные новые задачи (в соответствии со своим уровнем знаний и умений) в том или ином разделе математики, выбранном им в качестве специализации; ставить новые задачи; готовить доклады, излагающие полученные им результаты, и делать их; готовить к публикации сообщения, тезисы и статьи, содержащие изложение полученных им результатов.

Владеть предметом собственных исследований.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		5	6	7	8
Аудиторные занятия (всего)	32		32		
В том числе:					
Лекции	16		16		
Практические занятия (ПЗ)	16		16		
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	112		112		
В том числе:					
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Реферат					
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	76		76		
Вид промежуточной аттестации (экзамен)	36		36		
Общая трудоемкость	час	144	144		
	зач. Ед.	4	4		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№	Наименование раздела	Содержание раздела (темы)
---	----------------------	---------------------------

п/п	дисциплины	
1.	Вводное занятие	Описание возможных направлений исследований семинара на ближайшее время. Знакомство новых участников с руководителями семинара, их научными интересами и достижениями.
2.	Принцип максимума Понтрягина	Описание и постановка задач оптимального управления. Необходимые условия. Принцип максимума.
3.	Теорема Сарда	Гладкие многообразия и гладкие отображения. Мера. Формулировка теоремы Сарда. Её доказательство
4.	Теоремы о неподвижных точках	Появление задач о неподвижных точках отображений в различных разделах математики. Принцип сжимающих отображений. Теорема Брауэра. Экскурс в алгебраическую топологию. Гомотопии и гомологии.
5.	Элементы теории многозначных отображений.	Изложение результатов руководителей спецсеминара в этой области
6.	Теория Штурма	Появление задачи об отделении корней многочленов в различных разделах математики. Изложение теории Штурма отделения корней многочленов.
7.	Теория правильных графов на поверхностях	Задача поиска правильных объектов. Графы на поверхностях, двойственные и правильные графы. Полное решение задачи на сфере, связь с платоновыми телами. Полное решение задачи для поверхностей небольших эйлеровых характеристик (1, 0, -1 и -2).
8.	Обзор формальной арифметики и аксиоматической теории множеств	Аксиомы Пеано и аксиомы формальной арифметики. Формулировки теорем Гёделя о неполноте и непротиворечивости. Идея доказательства средствами теории алгоритмов. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Континуум-гипотеза.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	Вводное занятие	1	1		14	16
2.	Принцип максимума Понтрягина	2	2		14	18
3.	Теорема Сарда	2	2		14	18
4.	Теоремы о неподвижных точках	2	2		14	18
5.	Элементы теории многозначных отображений.	2	2		14	18
6.	Теория Штурма	2	2		14	18
7.	Теория правильных графов на поверхностях	2	2		14	18
8.	Обзор формальной арифметики и аксиоматической теории множеств	2	2		14	18
	Контроль знаний	1	1			2

Итого:	16	16	112	144
--------	----	----	-----	-----

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

№ п/п	Темы практического занятия	Трудо-емкость (час.)
1.	Вводное занятие	1
2.	Принцип максимума Понтрягина	2
3.	Теорема Сарда	2
4.	Теоремы о неподвижных точках	2
5.	Элементы теории многозначных отображений.	2
6.	Теория Штурма	2
7.	Теория правильных графов на поверхностях	2
8.	Обзор формальной арифметики и аксиоматической теории множеств	2

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. Верещагин Н. К., Шень А. Х. «Начала теории множеств», М.: МЦНМО, 2008.
2. Верещагин Н. К., Шень А. Х. «Языки и исчисления», М.: МЦНМО, 2008.
3. под ред. Яблонского С. В. и Лупанова О. Б. «Дискретная математика и математические вопросы кибернетики», т. 1, М.: «Наука», 1974
4. Мендельсон Э. «Введение в математическую логику», М.: «Наука», 1976.
5. Оре О. «Графы и их применение», М., 1963

б) дополнительная литература

1. Верещагин Н. К., Шень А. Х. «Вычислимые функции», М.: МЦНМО, 2008.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. «Элементы теории функций и функционального анализа». Любое издание.
7. Столл Р. «Множества. Логика. Аксиоматические теории». М., «Просвещение», 1968.
8. Манин Ю. И. «Доказуемое и недоказуемое», М., «Советское радио», 1979.
9. Яблонский С. В. «Введение в дискретную математику». Любое издание.
10. Яценко И.В. «Парадоксы теории множеств», М., МЦНМО, 2002.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1 шт., проектор - 1 шт., экран - 1 шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1 шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Студенту рекомендуется пользоваться литературой из списка основной литературы, приведённого выше, и время от времени, при необходимости, обращаться к дополнительной литературе. В процессе чтения математической литературы следует добиваться чёткого понимания каждого предложения. При необходимости следует возвращаться к уже, казалось бы, пройденному и повторять чтение ещё раз. Рекомендуется при этом восполнять все пропущенные автором (сочтённые им очевидными) рассуждения и решать (если таковые имеются) все сопровождающие текст книги или статьи упражнения. В случае особенных затруднений, не решающихся повторным возвращением к прочитанному месту или невозможностью решить то или иное упражнение, студенту рекомендуется незамедлительно обратиться к преподавателю с соответствующим вопросом. Уменьшение числа таких вопросов по простым ситуациям и увеличение числа творческих вопросов у студента говорит о постепенном освоении им в ходе самостоятельной работы следующих компетенций:

ПК-5. Способность управлять проектами, планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта.

ПК-6. Способность организовывать процессы корпоративного обучения на основе информационных технологий и развития корпоративных баз знаний

11.1 Структура практических занятий

В каждом семестре на итоговый контроль знаний отводится 60 баллов, ещё 40 баллов отводится на посещение занятий и выполнение домашних заданий. Итоговая сумма баллов в каждом семестре – 100.

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.
2. Отсрочка в сдаче домашнего задания считается уважительной только в случае болезни студента, что подтверждается наличием у него медицинской справки.
3. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
4. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x, то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества бал-

лов путём повторного одноразового выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится в период с 07.02 по 28.02 (с 07.09 по 28.09) по согласованию с деканатом.

- Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 60 баллов независимо от оценки, полученной в семестре.

11.2 Самостоятельная работа студента

Еженедельно студенты получают домашнее задание по текущей теме практического занятия. Следующее практическое занятие начинается с проверки выполненного домашнего задания, вопросов по домашнему заданию и его обсуждения. После этого происходит переход к следующим задачам по текущей или новой теме.

На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

Разработчик:

**д.ф.-м.н., проф.
профессор Математического института**

им. С.М. Никольского



А.В. Арутюнов

**Директор Математического института
им. С.М. Никольского,
д.ф.-м.н., профессор**



А.Л.Скубачевский

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« » 2021 г.,

протокол №

Директор института

_____ А.Л. Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

Рекомендуется для направления подготовки

01.04.01 Математика

Квалификация (степень) выпускника

Магистр

Квалификация (степень) выпускника

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Нелинейные анализ и оптимизация»

Направление/Специальность: 01.04.01 Математика (специализация «Неклассические задачи анализа и дифференциальных уравнений, математическое моделирование и машинное обучение»)

Раздел	Тема	Формы контроля уровня освоения ООП													Баллы темы	Баллы раздела
		Опрос	Тест	Коллоквиум	Реферат	Выполнение ЛР	Выполнение ДЗ	Выполнение РГР	Выполнение КР	Выполнение КП	Работа на занятии	Работа на Инт. Занятии	Экзамен	Прочие формы контроля		
Нелинейные задачи и оптимизация	Общие понятия											3		3	6	100
	Дифференцируемые функционалы											3		3	6	
	Условия первого порядка в классической задаче вариационного исчисления											3		3	6	
	Уравнение Эйлера в многомерном случае						5					3		3	11	
	Задача со старшими производными											3		3	6	
	Конечномерные гладкие задачи											3		3	6	

Изопериметрическая задача												3		3	6
Задача Лагранжа												3		3	6
Задача с подвижными концами												3		3	6
Условия второго порядка												3		3	6
Уравнение Якоби												3		3	6
Достаточные условия слабого экстремума												3		3	6
Поле функционала						5						3		3	11
Достаточные условия сильного экстремума												3		3	6
Введение в оптимальное управление												3		3	6

Перечень оценочных средств

по дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
1	Домашнее задание	Задание, задаваемое обучающемуся для самостоятельного выполнения. Призвано предупредить забывание нового изученного на уроке материала, усвоение которого носит концентрированный характер	Комплект домашних заданий
2	Экзамен	Форма проверки усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов

Приложение 3

Комплект экзаменационных билетов

по дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

Дисциплина Нелинейный анализ и оптимизация

(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Выпуклые множества и отделимость.

2. Теорема Хана-Банаха.

Составитель _____ А.В. Арутюнов

(подпись)

Директор института _____ А.Л. Скубачевский

(подпись)

« ____ » _____ 20 ____ г.

Дисциплина Нелинейный анализ и оптимизация

(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Опорные гиперплоскости и их свойства.

2. Крайние точки и их свойства. Теорема Крейна-Мильмана.

Составитель _____ А.В. Арутюнов

(подпись)

Директор института _____ А.Л. Скубачевский

(подпись)

« ____ » _____ 20 г.

Дисциплина Нелинейный анализ и оптимизация

(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Выпуклые конусы и их свойства.

2. Касательные векторы и их свойства.

Составитель _____ А.В. Арутюнов

(подпись)

Директор института _____ А.Л. Скубачевский

(подпись)

« ____ » _____ 20 г.

Дисциплина Нелинейный анализ и оптимизация

(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Сопряженные конусы в банаховых пространствах.

2. Необходимые условия экстремума – уравнение Эйлера-Лагранжа.

Составитель _____ А.В. Арутюнов

(подпись)

Директор института _____ А.Л. Скубачевский

(подпись)

« ____ » _____ 20 г.

Программа экзамена

по дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

1. Постановка экстремальных задач и их формализация. Экстремальные задачи с ограничениями. Основные проблемы теории экстремума.
2. Примеры классических экстремальных задач: задача Дидоны, задача о геодезической, транспортная задача. Вариационный принцип Ферма.
3. Экстремальные задачи анализа: задача Чебышева об экstrapоляции, доказательство классических неравенств, неравенства Колмогорова.
4. Элементы нелинейного, выпуклого и многозначного анализа. Выпуклые конусы и теоремы отделимости. Касательный вектор и теорема Люстерника, теорема о неявной функции. Селекторы многозначных отображений.
5. Элементы негладкого анализа, липшицевые отображения. Производная Кларка и ее простейшие свойства.
6. Принцип Лагранжа для гладких задач с ограничениями в банаховых пространствах.
7. Принцип Лагранжа для задач с липшицевым функционалом и липшицевыми ограничениями.
8. Вариационный принцип Экланда и его приложения: теорема об эpsilon-субдифференциале.
9. Классическая задача вариационного исчисления. Условия оптимальности: уравнение Эйлера-Лагранжа, условие Вейерштрасса, условия Лежандра и Якоби.
10. Примеры задач вариационного исчисления: задача о брахистохроне, аэродинамическая задача Ньютона, гармонический осциллятор.
11. Задача Лагранжа. Принцип Лагранжа для нее.
12. Необходимые условия второго порядка в задачах с ограничениями типа равенств и неравенств.
13. Метод возмущения экстремальных задач и доказательство необходимых условий экстремума.
14. Достаточные условия второго порядка в задачах с ограничениями типа равенств и неравенств в бесконечномерных пространствах. Взаимосвязь необходимых и достаточных условий второго порядка.
15. Теорема об обратной функции как реализация принципа Лагранжа и их взаимосвязь.
16. Понятие аномальной экстремальной задачи и методы исследования аномальных задач.
17. Квадратичное отображение как классический пример аномальной задачи. Элементарные свойства квадратичных отображений, основанные на теории экстремума.
18. Приложение необходимых условий экстремума к исследованию бифуркаций нелинейных систем.
19. Устойчивость и чувствительность экстремальных задач с ограничениями. Достаточные условия устойчивости.

Перечень домашних заданий

по дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

1. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$
2. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0.$
3. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t)) dt \rightarrow \min, \quad |\dot{x}(t)| \leq 1, \quad x(0) = 0.$
4. $\int_0^{T_0} (\dot{x}^2(t) + x(t)) dt \rightarrow \min,$
 $|\dot{x}(t)| \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = 0.$
5. $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \min, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 1.$
6. $\int_0^1 t^2 \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$ (пример Вейер-штрасса).
7. $\int_0^1 t^{2/3} \dot{x}^2(t) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$ (пример Гильберга).
8. $\int_0^1 (\dot{x}^2(t) - x(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$
9. $\int_1^2 (t \dot{x}^2(t) - x(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 1.$
10. $\int_0^1 (\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t) + 12tx(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 4.$

Критерии оценки

по дисциплине Нелинейный анализ и оптимизация

Итоговая оценка выставляется по сумме набранных баллов за выполнение домашних заданий, участие в интерактивных занятиях. Для учащихся, которые набрали от 31 до 50 баллов, проводится экзамен (зачет), в рамках которого за ответы на вопросы билетов учащиеся могут набрать недостающее до зачета (51) число баллов.

95–100 баллов:

- полное выполнение домашних заданий;
- активное участие в интерактивных занятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

86–94 балла:

- недостаточно полное выполнение домашних заданий;
- активное участие в интерактивных занятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

69–85 баллов:

- частичное выполнение домашних заданий;
- участие в интерактивных занятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- усвоение основной литературы, рекомендованной программой дисциплины.

51-68 баллов:

- частичное выполнение домашних заданий;
- участие в интерактивных занятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- удовлетворительное умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

31–50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:

- невыполнение домашних заданий;
- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы.

0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение лабораторных заданий; отказ от ответа по программе дисциплины; игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.