

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Обобщенные функции

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

01.03.01 «Математика»

Квалификация (степень) выпускника

бакалавр

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины: сформировать представление о комплексе идей и методов теории обобщенных функций, развить математическую культуру студента и подготовить его к усвоению последующих математических курсов. Реализация указанной цели включает последовательное изложение теоретического материала на лекциях, при котором все основные результаты снабжаются строгими доказательствами; отработку приемов решения задач на практических занятиях; промежуточный и итоговый контроль выявляют степень усвоения полученных навыков.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Обобщенные функции» относится к факультативным дисциплинам. В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Общепрофессиональные компетенции			
	ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Математический анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики	ВКР
Профессиональные компетенции			
	ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	Математический анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики	ВКР Преддипломная практика

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

ПК-1 Способен к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области
В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: понятие обобщенной функции и её носителя, основные действия над обобщенными функциями и их свойства.

Уметь: свободно оперировать изученными абстрактными понятиями, применять изученную теорию при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Владеть: навыками использования полученных знаний при решении теоретических и практических задач, навыками самостоятельного доказательства математических утверждений.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		D
Аудиторные занятия (всего)	36	36
В том числе:		
Лекции	18	18
Практические занятия (ПЗ)	18	18
Семинары (С)		
Лабораторные работы (ЛР)		
Самостоятельная работа (всего)	72	72
В том числе:		
Курсовой проект (работа)		
Расчетно-графические работы		
Реферат		
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>		
Самостоятельная проработка дополнительных материалов по дисциплине	72	72
Общая трудоемкость час.	108	108
	3	3

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела (темы)
1	«Основные понятия теории обобщенных функций»	Основные пространства D , S и E и их свойства. Необходимость введения понятия обобщенной функции. Определение обобщенной функции. Физическая интерпретация некоторых обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Равенство обобщенных функций. Пространства D' , S' и E' и их свойства.

2	«Основные свойства обобщенных функций»	Алгебраические операции над обобщенными функциями и их свойства. Дифференцирование обобщенных функций и его свойства. Свертка обобщенных функций. Тензорное произведение обобщенных функций. Интегральные преобразования обобщенных функций. Приложения к теории уравнений в частных производных. Фундаментальное решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Задача Коши и обобщенные функции.
---	--	---

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Всего час.
1.	«Основные понятия теории обобщенных функций»	9	9		36	54
2.	«Основные свойства обобщенных функций»	9	9		36	54
Всего часов		18	18		72	108

6. Лабораторный практикум не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары):

№ п/п	Темы практического занятия	Трудо-емкость (час.)
1.	Основные пространства D , S и E : сходимости, полнота и вложимость	1
2.	Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Носитель обобщенной функции равенство двух обобщенных функций	2
4.	Пространства обобщенных функций D' , S' и E' и их свойства	2
5.	Коллоквиум	2
6.	Контрольная работа № 1	2
7.	Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях	2

8.	Умножение обобщенных функций	2
9.	Дифференцирование обобщенных функций	2
10.	Тензорное произведение обобщенных функций	2
11.	Свертка обобщенных функций	2
12.	Интегральные преобразования обобщенных функций	2
13.	Фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задача Коши.	2
14.	Контрольная работа №2 (при необходимости – работа над ошибками)	2

8. Курсовые работы не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) Основная литература:

1. Агранович М.С. Обобщенные функции. М.:Издательство МЦНМО, 2008
2. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними (Обобщенные функции, вып.1) М.: Физматгиз, 1958
3. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Пространства основных обобщенных функций (Обобщенные функции, вып.2) М.: Физматгиз, 1958
4. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции, вып.3) М.: Физматгиз, 1958
5. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.,2001

б) Дополнительная литература:

1. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными/ Перевод с англ. М.: Мир 1965.
2. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными/ Перевод с англ. Т.1. Теория распределений и анализ Фурье. Т.2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир 1986-1988.
3. Taylor M.E. Partial Differential Equations I. Basic Theory. Applied Mathematical Sciences 117, 2nd edition, 2011.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

В каждом семестре проводятся по две контрольные работы и одному коллоквиуму. Студентам, набравшим низкие баллы на коллоквиумах и контрольных работах, в обязательном порядке предписывается посещать дополнительные консультации лектора.

11.1 Структура практических занятий

На практических занятиях решаются задачи и упражнения по текущим темам. В течение семестра запланированы две контрольные работы по 2 часа каждая. Контрольная работа №1 проводится ориентировочно на 7 неделе, а контрольная работа №2 проводится ориентировочно на 15 неделе. Также в рамках изучения дисциплины проводится коллоквиум (ориентировочно на 6 неделе перед первой контрольной работой). Результаты контрольных работ, коллоквиума и теста входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний студентов. Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

11.2 Самостоятельная работа студента

Еженедельно студенты получают домашнее задание по текущей теме практического занятия. Следующее практическое занятие начинается с проверки выполненного домашнего задания, вопросов по домашнему заданию и его обсуждения. После этого происходит переход к следующим задачам по текущей или новой теме. На практических занятиях у доски задачи и упражнения решаются в основном кем-то из вызванных студентов. При этом все присутствующие студенты должны контролировать и записывать решение на доске, а также устно отвечать на возникающие при решении вопросы.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) – *прилагается*. Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН/ФГОС ВО.

Разработчик:

Ph.D., ассистент



В.О. Медведев

Директор

Математического института им. С.М. Никольского,



д.ф.-м.н., профессор

А.Л.Скубачевский

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Математический институт имени С.М.Никольского

УТВЕРЖДЕН

На заседании института

« » 2020 г.,

протокол №

Директор института

_____ А.Л.Скубачевский

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

по учебной дисциплине Обобщенные функции

Рекомендуется для направления подготовки

01.03.01 Математика

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Обобщенные функции»

Направление/Специальность: 01.03.01 «Математика»

Код контролируемой компетенции	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства													Баллы темы	Баллы раздела		
			Текущий контроль										Промежуточная аттестация						
			Опрос	СРС (Тест)	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ	Реферат	Выполнение РГР	Экзамен		
ОПК 1, ПК 1	Раздел 1: «Основные понятия теории обобщенных функций»	Тема 1: «Основные пространства D, S и E . Понятие обобщенной функции»	2,5		2,5	10									10			25	50
		Тема 2: «Пространства обобщенных функций D', S' и E' . Их свойства»	2,5		2,5	10									10			25	
ОПК 1,	Раздел 2:	Тема 1: «Основные	2,5		2,5	10								10			25	50	

ПК 1	«Основные свойства обобщенных функций»	операции над обобщенными функциями»																	
		Тема 2: «Приложения к теории уравнений в частных производных»	2,5		2,5	10									10				25
		ИТОГО:	10		10	40								40				100	100

Перечень оценочных средств

по дисциплине Обобщенные функции

п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
<i>Аудиторная работа</i>			
	Опрос	Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу или теме.	Примерные вопросы для опроса
	Контрольная работа	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Комплект вариантов контрольных работ
	Экзамен	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала и выполнения в процессе обучения всех учебных поручений в соответствии с утвержденной программой.	Комплект экзаменационных билетов, список экзаменационных вопросов
	Коллоквиум	Форма проверки качества усвоения студентами теоретического материала в соответствии с утвержденной программой.	Программа коллоквиума
<i>Самостоятельная работа</i>			
	СРС (тест)	Форма проверки качества усвоения студентами учебного материала в соответствии с утвержденной программой.	Примерный вариант теста

(обязательное)

Комплект экзаменационных билетов

по дисциплине Обобщенные функции

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

1. Основное пространство D . Его линейность и сходимости в нем.
2. Определение обобщенной функции. Регулярные обобщенные функции. Равенство обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Носитель дельта-функции Дирака и функции Хевисайда.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 2

1. Основное пространство S . Его линейность и сходимости в нем.
2. Дифференцирование обобщенных функций. Основные свойства обобщенных производных.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 3

1. Пространства обобщенных функций D' и S' . Сходимости в них и их полнота.
2. Свертка обобщенных функций и её основные свойства.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 4

1. Тензорное произведение обобщенных функций и его свойства.
2. Доказательство теоремы о фундаментальном решении линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 5

1. Преобразование Фурье на пространстве S .
2. Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 6

1. Преобразование Фурье обобщенных функций из S' .
2. Доказательство теоремы Мальгранжа-Эренпрайса.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 7

1. Преобразование Фурье свёртки обобщенных функций из S' .
2. Теорема о структуре обобщенных функций с компактным носителем.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

1. Преобразование Фурье основных функций из D и обобщенных функций из D' .
2. Теорема о структуре обобщенных функций сосредоточенных в точке.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 9

1. Преобразование Лапласа обобщенных функций и его основные свойства.
2. Теорема о структуре обобщенных функций из S' .

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 10

1. Пространства E и E' и их свойства.
2. Пространства основных и обобщенных функций в области.

Каждому студенту достается по одному билету из данного перечня. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 20 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Примерные вопросы для опроса

по дисциплине Обобщенные функции

1. Доказать, что дельта-функция Дирака является сингулярной обобщенной функцией.
2. Найти свёртку двух данных обобщенных функций.
3. Вычислить производную данной обобщенной функции.

4. Определить носитель функции Хевисайда.
5. Найти фундаментальное решение заданного уравнения.
6. Доказать заданное тождество.
7. Вычислить преобразование Фурье данной обобщенной функции.
8. Доказать, что дельта-функция Дирака является пределом «шапочек» в смысле обобщенных функций.
9. Привести примеры обобщенных функций медленного роста.
10. Доказать, что функция «шапочка» принадлежит пространству основных функций D .

Примерные варианты контрольных работ

по дисциплине Обобщенные функции

Контрольная работа № 1 (10 баллов за каждую задачу)

Вариант 1

№ 1. Пусть f – локально интегрируемая функция. Доказать, что $\int f(x)\phi(x)dx$ - линейный непрерывный функционал на пространстве D .

№ 2. Доказать, что $\delta(x-n) \rightarrow 0$ в $D'(\mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$.

Вариант 2

№ 1. Доказать, что $e^x \in D'(\mathbb{R})$.

№ 2. Вычислить предел в $D'(\mathbb{R})$ от $\varepsilon/(\pi(x^2+\varepsilon^2))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

.

Контрольная работа № 2 (10 баллов за каждую задачу)

Вариант 1

№ 1. Показать, что $\delta * f = f * \delta = f$.

№ 2. Вычислить преобразование Фурье функции $\delta^{(k)}(x)$.

Вариант 2

№ 1. Показать, что $\delta^{(k)} * f = f^{(k)}$.

№ 2. Вычислить преобразование Фурье функции $\text{sign}(x)$.

Программа коллоквиума

по дисциплине Обобщенные функции

- Основные пространства D , S и E и их основные свойства.
- Понятие обобщенной функции. Примеры обобщенных функций и их физическая интерпретация.
- Понятие носителя обобщенной функции.
- Пространства обобщенных функций D' , S' и E' .

Каждому студенту достается по одному вопросу из данного перечня. Ответ на каждый вопрос оценивается от 0 до 10 баллов в зависимости от полноты и правильности ответа.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

1. Основные пространства D , S и E : полнота, сходимости и вложимость.
2. Необходимость введения понятия обобщенной функции. Определение обобщенной функции. Физическая интерпретация некоторых обобщенных функций.
3. Понятие носителя обобщенной функции. Равенство двух обобщенных функций.
4. Пространства обобщенных функций D' , S' и E' . Их свойства.
5. Алгебраические операции над обобщенными функциями и их свойства.
6. Дифференцирование обобщенных функций и его свойства.
7. Свертка обобщенных функций и её свойства.
8. Тензорное произведение обобщенных функций.
9. Преобразование Фурье обобщенных функций.
10. Преобразование Лапласа обобщенных функций.
11. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных.
12. Задача Коши и обобщенные функции.

Задания репродуктивного и реконструктивного уровня

1. Примеры заданий репродуктивного уровня

В качестве заданий репродуктивного уровня предлагаются вопросы для самопроверки и обсуждения по темам курса.

Раздел 1. «Основные понятия теории обобщенных функций»

Тема 1. «Основные пространства D , S и E . Понятие обобщенной функции»

- Выяснить, есть ли среди заданных последовательностей сходящиеся в D , S и E
- Проверить, является ли заданная функция основной из D, S или E
- Дать физическую интерпретацию заданным обобщенным функциям.

Тема 2. «Пространства обобщенных функций D' , S' и E' . Их свойства»

- Выяснить, есть ли среди заданных последовательностей сходящиеся в D' , S' и E'
- Найти предел последовательности в D'
- Определить носитель данной обобщенной функции.

Раздел 2. «Основные свойства обобщенных функций»

Тема 1. «Основные операции над обобщенными функциями»

- Продифференцировать заданную обобщенную функцию
- Доказать тождество
- Найти общее решение данного ОДУ в D'
- Найти тензорное произведение данных обобщенных функций
- Найти свертку данных обобщенных функций
- Вычислить преобразование Фурье данной обобщенной функции
- Вычислить преобразование Лапласа данной обобщенной функции.

Тема 2. «Приложения к теории уравнений в частных производных»

- Найти фундаментальное решение данного уравнения в частных производных в данном пространстве
- Доказать, что данная функция является фундаментальным решением данного уравнения в частных производных
- Решить задачу Коши.

2. Примеры заданий реконструктивного уровня

В качестве заданий реконструктивного уровня предполагаются исследовательские задания по указанным выше разделам

- Исследовать сходимость данной последовательности функций в D , S и E
- Исследовать сходимость данной последовательности обобщенных функций в D', S' и E'

- Доказать, что данная обобщенная функция является сингулярной
- Доказать данное тождество
- Найти наибольшую область, в которой поставленная задача Коши имеет единственное решение, и найти это решение.

Критерии оценки

по дисциплине Обобщенные функции

Итоговая оценка выставляется по сумме набранных баллов за практические занятия и экзамен.

95-100 баллов:

- активное участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

86- 94 балла:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- умение эффективно использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

69-85 баллов:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;

- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- усвоение основной литературы, рекомендованной программой дисциплины.

51-68 баллов:

- участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- удовлетворительное умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:

- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое умение использовать методику программы дисциплины в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- удовлетворительное усвоение основной литературы.

0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение лабораторных заданий; отказ от ответа по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.