

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН
02.00.00 «Компьютерные
и информационные науки»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Общая алгебра

Рекомендуется для направления подготовки

02.03.01 — Математика и компьютерные науки

(указываются код и наименования направления(ий) подготовки (специальности (ей) и/или профилей (специализаций))

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

1. Цели и задачи дисциплины:

Общая алгебра относится к числу важнейших математических дисциплин, с изучения которой начинается университетский курс высшей математики. Цели, задачи и терминология общей алгебры подверглись существенному пересмотру в прошлом веке, а методы пополнились существенно новыми. Важной вехой стало создание систем компьютерной алгебры, использование которых подразумевает знакомство с основными понятиями и обозначениями, используемыми в современной алгебре. Курс примыкает к курсу компьютерной алгебры, читаемой в следующем модуле. Общая алгебра имеет важные приложения в других математических дисциплинах, таких как математический анализ, теория дифференциальных и разностных уравнений, линейное программирование, математическая логика и теория алгоритмов.

Основная цель курса – овладение обучающимися основными понятиями и обозначениями, используемыми в общей алгебре, на уровне достаточном для овладения системами компьютерной алгебры на пользовательском уровне.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:

Дисциплина входит в обязательную часть блока Б1 «Дисциплины (модули)» учебного плана по направлению 02.03.01 — Математика и компьютерные науки.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

| № п/п | Шифр и наименование компетенции | Предшествующие дисциплины | Последующие дисциплины (группы дисциплин) |
|--|---------------------------------|---------------------------|---|
| Универсальные компетенции | | | |
| | — | — | — |
| Общепрофессиональные компетенции | | | |
| | ОПК-1 | — | Дисциплины ОПОП в соответствии с учебным планом |
| Профессиональные компетенции (вид профессиональной деятельности - научно-исследовательская деятельность) | | | |
| | — | — | — |

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций
ОПК-1

(указываются в соответствии с ОС ВО РУДН)

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры,

аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности:

- ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук
- ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности
- ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные определения и обозначения из области общей алгебры, формулировать основные теоремы, доказывать простейшие утверждения;

уметь:

- использовать полученные знания для проведения вычислений в системах компьютерной алгебры;

владеть:

- навыками выбора компьютерных инструментов для решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических и практических знаний по общей алгебре.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

| № | Вид учебной работы | Всего часов | Семестры, модуль |
|----|---|-------------|---------------------|
| | | | 1 семестр, 1 модуль |
| 1. | Аудиторные занятия (всего) | 72 | 72 |
| | Лекции | 36 | 36 |
| | Практические занятия (ПЗ) | | |
| | Семинары (С) | 36 | 36 |
| | Лабораторные работы (ЛР) | | |
| 2. | Самостоятельная работа студентов (ак. часов) | 72 | 72 |
| 3. | Общая трудоемкость (ак. часов) | 144 | 144 |
| 4. | Общая трудоемкость (зачетных единиц) | 4 | 4 |

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела |
|-------|---------------------------------|---|
| 1 | Коммутативная алгебра | <p>Основные понятия коммутативной алгебры: кольца, поля, идеалы, факторкольца.</p> <p>Кольцо целых чисел Z и его идеалы. Разложение целых чисел на множители. Поле рациональных чисел Q. Поле вещественных чисел R и его реализация в системах</p> |

| | | |
|---|-----------------------|---|
| | | компьютерной алгебры. Ошибка округления. Полиномиальные кольца и их идеалы. Разложение многочленов на множители. Порядок мономов. Алгебраические методы решения систем линейных и нелинейных уравнений. Факторкольцо $Z/(q)$. Конечные поля. Факторкольцо $Q[x]/(f)$. Алгебраические числа. Числовые поля. Поле алгебраических чисел. Поле комплексных чисел. |
| 2 | Теория матриц | Арифметические действия с матрицами. Некоммутативное кольцо квадратных матриц. Определитель. Обратная матрица. Системы линейных уравнений и методы их решения. Метод Гаусса. |
| 3 | Теория конечных групп | Основные понятия теории групп: группа, подгруппа, нормальная подгруппа, факторгруппа, циклическая группа, абелева группа. Симметрические группы и их подгруппы. Перестановки и способы задания подгрупп. Симметрические функции. Элементарные симметрические функции. Симметрические функции корней алгебраического уравнения, теорема Виета. Группы Галуа числовых полей. Решения алгебраических уравнений в радикалах. Разрешимая группа. |

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Лекц. | Практические занятия и лабораторные работы | | СРС | Всего час. |
|-------|---------------------------------|-----------|--|----------|-----------|------------|
| | | | ПЗ/С | ЛР | | |
| 1. | Коммутативная алгебра | 20 | 20 | | 36 | 76 |
| 2. | Теория матриц | 8 | 8 | | 18 | 34 |
| 3. | Теория конечных групп | 8 | 8 | | 18 | 34 |
| | Итого: | 36 | 36 | 0 | 72 | 144 |

6. Лабораторный практикум - не предусмотрен

7. Практические занятия (семинары)

| № п/п | № раздела дисциплины | Тематика практических занятий (семинаров) | Трудоёмкость (час.) |
|-------|----------------------|---|---------------------|
| 1 | 1 | Кольца и поля. Кольцо Z , поля Q и R . Полиномиальные кольца. Мономы. Порядок на множестве мономов, lex , $glex$. Степень многочлена. Стандартная форма. | 4 |

| | | | |
|----|--------|--|----|
| 2 | 2 | Арифметические действия с матрицами и столбцами. Определитель. Обратная матрица. Системы линейных уравнений над полями Q и R . | 4 |
| 3. | 1 | Понятие идеала. Главные идеалы. Простые идеалы. Максимальные идеалы. Кольцо главных идеалов Z . Алгоритм Евклида. НОД. Простые числа. Факторкольцо. Факторкольца кольца Z . Китайская задача об остатках. Конечные поля. Разложение на множители в кольце ZZ и в полиномиальных кольцах. | 4 |
| 4. | 1 | Кольцо главных идеалов $k[x]$. Алгоритм Евклида. НОД. Разложение на множители. Факторкольца кольца $k[x]$. Решение простейших уравнений в этих кольцах. Числовые поля. | 4 |
| 5. | 1 | Поле комплексных чисел C . Алгебраические числа. Минимальный многочлен. Гауссовы комплексные числа. Разложение на множители в кольцах $C[x]$ и $R[x]$. | 4 |
| 6. | 2 | Действия с матрицами над конечными полями и над полем C . Решения систем линейных уравнений над конечными полями и полем C . | 4 |
| 7. | 1 | Идеалы полиномиальных колец. Аффинные многообразия. Извлечение корня из идеала. Исключительные идеалы. Решение систем алгебраических уравнений, имеющих конечное число корней. | 4 |
| 8. | 3 | Конечные группы. Симметрические группы. Циклические группы. Подгруппы. Нормальные подгруппы. Перестановки. | 4 |
| 9. | 3 | Симметрические функции. Представление рациональной симметрической функции корней алгебраического уравнения над полем k как элемента поля k . Группы Галуа числовых полей. Разрешимость алгебраического уравнения в радикалах. | 4 |
| | Итого: | | 36 |

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Мультимедийная учебная аудитория для проведения лекционных занятий, учебная аудитория для проведения учебных занятий (в том числе для индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации).

Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для проведения обучающимися самостоятельной работы и компьютерного тестирования обучающихся (при необходимости).

9. Информационное обеспечение дисциплины

а) программное обеспечение:

- продукты Microsoft - операционная система, пакет офисных приложений, MS Teams и др. (подписка Enrollment for Education Solutions (EES)).
- Программное обеспечение со свободной лицензией (free):

ОС Linux, офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0), ПО для просмотра pdf (например, evince (лицензия GPL-2+ CC-BY-SA-3.0)), Sagemath (лицензия GPLv3).

б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. Сайт библиотеки РУДН <http://lib.rudn.ru/>
2. ТУИС <http://esystem.pfur.ru/>

10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература

1. Введение в коммутативную алгебру / М.Ф. Атья, И. Макдональд; Пер. с англ. Ю.И.Манина. - М. : Факториал Пресс, 2003. - 144 с. : ил. - (20 век. Математика и механика ; Вып.4). - ISBN 5-88688-067-4
2. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц : учебное пособие / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – Москва : Физматлит, 2010. – 560 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83224> (дата обращения: 12.05.2021). – ISBN 978-5-9221-0524-8

б) дополнительная литература

1. Документация к системе компьютерной алгебры Sage: <https://www.sagemath.org/>
2. Панкратьев, Е.В. Элементы компьютерной алгебры : учебник / Е.В. Панкратьев ; Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ". – Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ) : Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 247 с. – (Основы информатики и математики). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233322>
3. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош. — 22-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 432 с. — ISBN 978-5-8114-6851-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/152647>

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один модуль, 9 недель. Ключевым является освоение терминологии на уровне, достаточном для выполнения вычислений в системе компьютерной алгебры Sage. На лекции будут сообщены все необходимые теоретические сведения для выполнения домашнего задания, даны практические демонстрации. Домашнее задание выполняется в системе Sage. Семинар представляет собой обсуждение домашних работ, в ходе которого каждый студент получает 0-10 баллов. Семестр завершается итоговым контролем, проводимым в виде экзамена. Максимально возможная итоговая оценка студента за семестр – 100 баллов.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

ФОС по дисциплине представлен в приложении к данной программе. Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

Разработчик:

доцент кафедры прикладной информатики
и теории вероятностей, д.ф.-м.н.

М.Д. Малых

Руководитель программы

Заведующий кафедрой

прикладной информатики
и теории вероятностей, д.т.н., проф.

К.Е. Самуйлов

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»*

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ **ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

Наименование дисциплины

Общая алгебра

по направлению

02.03.01 — Математика и компьютерные науки

Квалификация (степень) выпускника бакалавр

1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине Общая алгебра

название

Направление: 02.03.01 Математика и компьютерные науки

шифр

название

| Код контр. компетенции или ее части | Раздел | Тема | Наименование оценочного средства | | | Баллы темы | Баллы раздела | | |
|-------------------------------------|---|--|----------------------------------|----------------|------------|------------|---------------|---------|----|
| | | | Текущий контроль | | прог. атт. | | | | |
| | | | Выполнение ДЗ | Ответы у доски | | | | Экзамен | |
| | Коммутативная алгебра | Основные понятия коммутативной алгебры: кольца, поля, идеалы, факторкольца. | 4 | 4 | | 20 | 8 | 48+12 | |
| | | Кольцо целых чисел Z и его идеалы. Разложение целых чисел на множители. Поле рациональных чисел Q . Поле вещественных чисел R и его реализация в системах компьютерной алгебры. Ошибка округления. | 5 | 5 | | | | | 10 |
| | | Полиномиальные кольца и их идеалы. Разложение многочленов на множители. Порядок мономов. Алгебраические методы решения систем линейных и нелинейных уравнений. | 5 | 5 | | | | | 10 |
| | | Факторкольцо $Z/(q)$. Конечные поля. | 5 | 5 | | | | | 10 |
| | | Факторкольцо $Q[x]/(f)$. Алгебраические числа. Числовые поля. Поле алгебраических чисел. Поле комплексных чисел. | 5 | 5 | | | | | 10 |
| | Матрицы | Арифметические действия с матрицами. | 2 | 2 | | | | | 4 |
| | Некоммутативное кольцо квадратных матриц. Определитель. Обратная матрица. | 3 | 3 | | 6 | | | | |
| | Системы линейных уравнений и методы их | 3 | 3 | | 6 | | | | |

| | | | | | | | | |
|--------|--|---|-----------|-----------|--|-----------|-----------|--------------|
| | | решения. Метод Гаусса. | | | | | | |
| Группы | | Основные понятия теории групп: группа, подгруппа, нормальная подгруппа, факторгруппа, циклическая группа, абелева группа. | 3 | 3 | | | 6 | 16+4 |
| | | Симметрические группы и их подгруппы. Перестановки и способы задания подгрупп. Симметрические функции. Элементарные симметрические функции. Симметрические функции корней алгебраического уравнения, теорема Виета. | 3 | 3 | | | 6 | |
| | | Группы Галуа числовых полей. Решения алгебраических уравнений в радикалах. Разрешимая группа. | 2 | 2 | | | 4 | |
| | | Итого: | 40 | 40 | | 20 | 80 | 80+20 |

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций _____ ОПК-1
(в соответствии с ОС ВО РУДН):

ОПК-1. Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности:

- ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук
- ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности
- ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

Балльно-рейтинговая система оценки уровня знаний

Сводная оценочная таблица дисциплины

| Тема | Формы контроля уровня освоения ООП | | | Баллы темы | Экзамен | Баллы темы |
|-----------------------|------------------------------------|----|--|------------|---------|------------|
| | Д.р. | С. | | | | |
| Коммутативная алгебра | 20 | 20 | | 40 | 10 | 50 |
| Теория матриц | 10 | 10 | | 20 | 5 | 25 |
| Теория конечных групп | 10 | 10 | | 20 | 5 | 25 |
| Итого: | 40 | 40 | | 80 | 20 | 100 |

Таблица соответствия баллов и оценок

| Баллы БРС | Традиционные оценки РФ | Оценки ECTS |
|-----------|------------------------|-------------|
| 95 - 100 | 5 | A |
| 86 - 94 | | B |
| 69 - 85 | 4 | C |
| 61 - 68 | 3 | D |
| 51 - 60 | | E |
| 31 - 50 | 2 | FX |
| 0 - 30 | | F |
| 51-100 | Зачет | Passed |

Правила применения БРС

1. По курсу предусмотрены 9 домашних заданий, выполняемых в системе компьютерной алгебры Sage, каждая оценивается в 5 баллов максимум. Д.з. сдаются в электронном виде через систему ТУИС. График подачи домашних работ формируется в соответствии с календарным планом курса. Дата и время, которое отводится студенту на выполнение письменной работы, устанавливается преподавателем.
2. Семинары представляют собой расширенное обсуждение д.з., по результатам которого ставится еще 5 баллов за каждую сделанную д.р.
3. Невыполненные по уважительной причине домашние работы могут быть выполнены в конце модуля по согласованию с преподавателем.
4. Студент допускается к итоговому контролю знаний с любым количеством баллов, набранным в семестре.
5. Студент, набравший за семестр 51 балл и более, от участия в итоговом контроле знаний (экзамена) освобождается, при этом за экзамен автоматически добавляется набранным баллам еще 20.
6. Итоговая контрольная работа содержит 3 вопроса из перечня теоретических вопросов по курсу. Итоговая контрольная работа проводится письменно, на итоговый контроль знаний отводится 1 час, письменная работа оценивается от 0 до 20 баллов независимо от оценки, полученной в семестре. Оценка выставляется по результатам собеседования.
7. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то ему выставляется

оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т. е. FX, то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

| п/п | Наименование оценочного средства | Краткая характеристика оценочного средства | Представление оценочного средства в фонде |
|-------------------------------|----------------------------------|---|--|
| <i>Аудиторная работа</i> | | | |
| 1 | Экзамен | Оценка работы студента в течение семестра (года, всего срока обучения и др.) и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач. | Примеры заданий/вопросов, пример экзаменационного билета |
| <i>Самостоятельная работа</i> | | | |
| 1 | Домашняя работа | Задачи и задания позволяющие оценивать и диагностировать знания фактического материала и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; задачи и задания позволяющие оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием причинно-следственных связей; задачи и задания позволяющие оценивать и диагностировать умения интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения. | Фонд практических заданий |

Комплект экзаменационных билетов

Дисциплина Общая алгебра
(наименование дисциплины)

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1 (образец)

1. Дайте определение кольцу матриц размера 2 на 2.
2. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x + 3y + 3z = 1. \end{cases}$$

4. ФОРМЫ ПРОМЕЖУТОЧНОГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Промежуточный и итоговый контроль проводится в форме письменных контрольных работ, содержанием которых является решение практических задач. Каждая контрольная работа оценивается в 20 баллов. В семестре предусмотрено 3 контрольные работы.

Также студенты получают баллы за выполнение практических работ и ответов у доски. Каждая выполненная практическая работа оценивается в 2 балла. За каждый ответ у доски, студент получает 1 балл (максимум 10 баллов за семестр).

Итоговый контроль проводится в форме экзамена, содержанием которого является теоретический вопрос и задача, и оценивается в 20 баллов максимум.

5. ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Перечень задач контрольной работы № 1

- 1) правило Крамера
- 2) действия с матрицами
- 3) однородная система
- 4) задача на собственные значения
- 5) вычисление обратной матрицы

Перечень задач контрольной работы № 2

- 1) вычисление с.з.
- 2) функции от матриц
- 3) экстремальные значения кв. форм на ед. сфере
- 4) точки экстремума квадратичных функций
- 5) МНК

Перечень задач контрольной работы № 3

1. Вычислите определитель 3 на 3.
2. Решите неоднородную систему с определителем, отличным от нуля.0
3. Вычислите ранг однородной системы.
4. Проверьте выполнение критерия Кронекера-Капелли.
5. Найдите собственные значения матрицы.

6. ПЕРЕЧЕНЬ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Тема 1. Матрицы и действия с ними

Вычислите

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^3$$

Прямым вычислением проверьте, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Прямым вычислением проверьте, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите, если произведение определено:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицы, обратные к следующим

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Тема 2. Определители и обратные матрицы

Вычислите следующие определители.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислите

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}^T,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-2}$$

Найдите матрицы, обратные к матрицам

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c.)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

d.)

Для какой из этих матриц указать обратную невозможно?

Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

используя 5 свойств определителя по столбцам.

Тема 3. Резольвента

1. Найдите резольвенты след. матриц:

a.) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

b.)

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

c.)

Укажите особые точки найденных резольвент.

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x + 2y + az = 0 \\ 4x + 5y + 2az = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения?

3. Решите задачу на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите задачу на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Решите задачу на собственные значения для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тема 4. Приведение матрицы к диагональному виду

1. Приведите матрицы к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

•

2. Вычислите

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

3. Вычислите

$$\sin \begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 2\pi & \pi \end{pmatrix}$$

4. (*) Решите матричное уравнение

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тема 5. Системы линейных уравнений

1. Решите по правилу Крамера систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x + z = 0, \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

по правилу Крамера и одним из школьных методов. Сравните ответы.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 1, \\ x + z + t = 0, \\ 2x - z - t = 1, \\ x + y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

по правилу Крамера. Для вычисления определителей 4-го порядка воспользуйтесь MS Math или любой другой CAS.

4. Выясните, совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 3 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

5. Определите размерность множества решений системы

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3 \\ 2x + z = 4 \\ 2y + z = -2 \end{cases}$$

6. Опишите геометрически множество решений след. систем

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

a.)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x = 3 \end{cases}$$

b.)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

c.)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

d.)

7. Можно ли подобрать параметры a, b, c таким образом, чтобы плоскости

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + cz = 1 \end{cases}$$

пересекались вдоль некоторой прямой?

8. Выясните, пересекаются ли прямые, заданные системами

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

9. Найдите проекции прямой

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

Тема 6. Квадратичные формы и задача на собственные значения

1. Составьте матрицы квадратичных форм:

$$x^2 + (x - y)^2$$

a.)

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b.)

2. Укажите, в каких пределах меняются значения след. квадратичных форм на единич-

ной окружности $x^2 + y^2 = 1$:

$$a = x^2 - 2xy + y^2$$

a.)

$$a = x^2 - 3y^2$$

b.)

$$a = 2x^2 + 2y^2$$

с.)

3. Укажите, в каких пределах меняются значения след. квадратичных форм на единичной сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$a = x^2 + 2xy - 2xz + y^2 - 3z^2$$

а.)

$$a = xy + xz + yz$$

б.)

$$a = x^2 - y^2 + 2z^2 + 3xy$$

с.)

Тема 7. Параболоиды

Найдите точки экстремума следующих функций. Укажите какой именно экстремум имеется в найденных точках (min/max, строгий/нестрогий, глобальный/локальный).

$$z = x^2 + 4xy - 8y^2 - 2x + 2y + 3$$

1.

$$z = x^2 + 2xy + y^2$$

2.

$$z = -x^2 - xy - y^2 - 2x - 4y + 3$$

3.

4.

$$z = x^2 + 2x - y^2 + 2x - 1$$

5.

Тема 8. Метод наименьших квадратов

По территориям региона приводятся данные за 199X г.

| Номер региона | Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., x | Среднедневная заработная плата, руб., y |
|---------------|--|---|
| 1 | 78 | 133 |
| 2 | 82 | 148 |
| 3 | 87 | 134 |
| 4 | 79 | 154 |
| 5 | 89 | 162 |
| 6 | 106 | 195 |
| 7 | 67 | 139 |
| 8 | 88 | 158 |
| 9 | 73 | 152 |
| 10 | 87 | 162 |
| 11 | 76 | 159 |
| 12 | 115 | 173 |

Подберите по МНК коэффициенты зависимости $y = kx + b$.

Тема 9. Элементы высшей алгебры

1. Без привлечения компьютера, докажите, что число 5 простое.
2. Без привлечения компьютера, разложите следующие многочлены на множители в кольце $\mathbb{Q}[x]$. Укажите кратность каждого из множителей.
 - a.) $x^2 - 3x + 2$
 - b.) $x^2 + 3x + 1$
 - c.) $x^2 + 1$
 - d.) $(x^2 - 3x + 2)^2 (x^2 + 1)^3$
 - e.) $x^4 + 3x^2 + 1$
3. Без привлечения компьютера, разложите след. многочлены на множители в кольце $\mathbb{R}[x]$. Укажите кратность каждого из множителей.
 - a.) $x^2 - 3x + 2$
 - b.) $x^2 + 3x + 1$
 - c.) $x^2 + 1$
 - d.) $(x^2 - 3x + 2)^2 (x^2 + 1)^3$
 - e.) $x^4 + 3x^2 + 1$

Тема 10. Комплексные числа

1. Приведите к стандартному виду число $(1 + i)/(2 + i) + 1/i$. Найдите его модуль.
2. Найдите решение системы по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x + iy + z = 1, \\ ix - 3y + iz = 2, \\ x + iy + z = 3. \end{cases}$$

Ответ приведите к стандартному виду.

3. Найдите все решения системы
 - a.) $ix + 2y + z = 2, x + iz = 0, x + y + z = 1$
 - b.) $ix + 2y + z = 2, x + iz = 0, (1 + i)x + 2y + (1 + i)z = 2$
 - c.) $ix + 2y + z = 2, x + iz = 0, (1 + i)x + 2y + (1 + i)z = 1$

Ответ приведите к стандартному виду.

4. При каких комплексных значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 1, \\ ax - 3y + az = 2, \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

не имеет решения?

5. Без использования компьютера разложите следующие многочлены на линейные множители.
 - a.) $x^2 + 2x + 4$,
 - b.) $x^4 + 2x^2 + 4$,
 - c.) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ (многочлен имеет корень $x = 1$ кратности 2)

7. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

95-100 баллов:

- полное и своевременное выполнение на высоком уровне лабораторных работ и домашних заданий, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответов на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем;

86- 94 балла:

- полное и своевременное выполнение на хорошем уровне лабораторных работ и домашних заданий, успешное прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- хорошее владение программным обеспечением, умение эффективно использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, нормативных и законодательных актов, рекомендованных программой дисциплины и преподавателем;

69-85 баллов:

- своевременное выполнение на хорошем уровне лабораторных работ и домашних заданий, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- хороший уровень культуры исполнения лабораторных работ;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- владение программным обеспечением, умение использовать его в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- усвоение основной литературы;

51-68 баллов:

- выполнение на удовлетворительном уровне лабораторных работ и домашних заданий, прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- удовлетворительное владение программным обеспечением, умение использовать его

- в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:

- не выполнение, несвоевременное выполнение или выполнение на неудовлетворительном уровне лабораторных работ и домашних заданий, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса;
- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- слабое владение программным обеспечением по разделам программы дисциплины, некомпетентность в решении стандартных (типовых) производственных задач;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение лабораторных заданий и домашних заданий, не прохождение контрольных мероприятий, предусмотренных программой курса; отказ от ответов по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.