

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Рекомендовано МССН  
38.00.00 «Экономика и управление»,  
подгруппа 4 «Бизнес-информатика»

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

**«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА»**

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

38.03.05 Бизнес-информатика

(указываются код и наименование направления подготовки/специальности)

Квалификация (степень) выпускника

**бакалавр**

(указывается квалификация (степень) выпускника в соответствии с ОС ВО РУДН)

### 1. Цели и задачи дисциплины:

Целями освоения дисциплины является овладение аппаратом теории вероятностей и теории массового обслуживания (ТМО), применяемым в теории телетрафика; изучение основ ТМО; знакомство с методами, применяемыми в ТМО, и результатами, полученными на основе этих методов; освоение принципов применения моделей ТМО для решения прикладных задач анализа показателей качества функционирования сетей телекоммуникаций.

Задачами дисциплины являются освоение студентами элементы теории массового обслуживания, теории случайных процессов, применяемых в теории телетрафика, обучение студентов на примерах простейших моделей составлять системы уравнений равновесия для марковских процессов, описывающих функционирование моделей телекоммуникационных систем массового обслуживания, решать эти уравнения, а также проводить анализ вероятностно-временных характеристик этих моделей.

**2. Место дисциплины в структуре ОП ВО:** Цикл, к которому относится дисциплина: часть, формируемая участниками образовательных отношений, элективная дисциплина, научные исследования в области инфокоммуникаций.

В таблице № 1 приведены предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

#### Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

| № п/п   | Шифр и наименование компетенции | Предшествующие дисциплины        | Последующие дисциплины (группы дисциплин)   |
|---|---------------------------------|----------------------------------|---|
| Универсальные компетенции   |                                 |                                  |   |
|   | -                               | -                                | -   |
| Общепрофессиональные компетенции  |                                 |                                  |   |
|   | -                               | -                                | -   |
| Профессиональные компетенции (вид профессиональной деятельности – научно-исследовательский) |                                 |                                  |   |
|   | ПК-2; ПК-4                      | Прикладные стохастические модели | Имитационное моделирование, Стохастический финансовый анализ, Статистический анализ |
| Профессионально-специализированные компетенции специализации                                |                                 |                                  |   |
|   |                                 |                                  |   |

*ПК-2:* Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;

*ПК-4:* Способность принимать обоснованные управленческие решения в своей профессиональной деятельности.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ПК-2; ПК-4

ПК-2: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности:

- ПК-2.1 Знает базовый математический аппарат, необходимый для решения задач профессиональной деятельности
- ПК-2.2 Умеет применять знания и методы из области математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
- ПК-2.3 Имеет практический опыт решения стандартных математических задач и применяет его в профессиональной деятельности.

ПК-4: Способен принимать обоснованные управленческие решения в своей профессиональной деятельности:

- ПК-4.2 Умеет анализировать и оценивать факторы и условия, влияющие на принятие управленческих решений
- ПК-4.3 Умеет проводить оценку эффективности принятия решения в соответствии с выбранными критериями или выбранными целевыми показателями

В результате изучения дисциплины студент должен

**Знать** аппарат теории вероятностей, применяемый в ТМО; основные понятия и определения ТМО; принципы построения простейших марковских моделей для анализа систем массового обслуживания (СМО);

**Уметь** с помощью аппарата теории вероятностей, теории массового обслуживания и теории телетрафика строить простые модели систем массового обслуживания, для построенных моделей составлять и решать системы уравнений равновесия (СУР), получать вероятностные характеристики моделей, связанные с показателями качества обслуживания; применять численные методы при анализе полученных характеристик моделей.

**Владеть:** способностью решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц.

| Вид учебной работы                    | Всего часов | Семестр (модуль)     |                       |
|---------------------------------------|-------------|----------------------|-----------------------|
|                                       |             | Сем. 5<br>(модуль 9) | Сем. 5<br>(модуль 10) |
| <b>Аудиторные занятия (всего)</b>     | 90          | 36                   | 54                    |
| В том числе:                          |             |                      |                       |
| Лекции                                | 36          | 18                   | 18                    |
| Практические занятия (ПЗ)             |             |                      |                       |
| Семинары (С)                          | 54          | 18                   | 36                    |
| Лабораторные работы (ЛР)              |             |                      |                       |
| <b>Самостоятельная работа (всего)</b> | 162         | 72                   | 90                    |
| Общая трудоемкость                    |             |                      |                       |
| час                                   | 252         | 108                  | 144                   |
| зач. ед.                              | 7           | 3                    | 4                     |

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов дисциплины

*Тема 1. Вероятностный аппарат теории массового обслуживания.*

Характеристические преобразования: характеристическая функция, преобразование Лапласа, преобразование Лапласа-Стилтьеса, производящая функция. Основные вероятностные распределения: экспоненциальное распределение (3 леммы), детерминированное распределение, распределение Пуассона.

*Тема 2. Элементы теории случайных процессов.*

Цепи Маркова: определение, общие свойства, свойство эргодичности. Марковские процессы: определение и основные характеристики, конструктивное описание. Теорема Колмогорова. Процессы рождения и гибели. Условия Карлина-МакГрегора.

*Тема 3. Параметры систем массового обслуживания.*

Система массового обслуживания: структура, нагрузка, алгоритм обслуживания. Случайный поток. Два способа задания случайного потока. ПП. Длительность интервалов для ПП. Входящий поток требований: рекуррентный поток, детерминированный, пуассоновский, эрланговский потоки. Различные распределения длительности обслуживания. Показатели качества обслуживания: длина очереди, время ожидания начала обслуживания, число заявок в СМО, время пребывания заявки в СМО, вероятность потери заявки (по времени, по вызовам).

*Тема 4. Простейшие марковские модели теории телетрафика.*

Модель канала передачи данных: система  $M|M|1|\infty$ . Первая модель Эрланга: система  $M|M|c|0$ . Вторая модель Эрланга: система  $M|M|v|r$ . Модель Энгсета. Система с групповым поступлением заявок. Система  $M|E|1|\infty$ . Системы  $M|H|1|r$  и  $H|M|1|r$ .

*Тема 5. Система  $M|G|1|\infty$ : методы исследования.*

Вложенная цепь Маркова. Виртуальное время ожидания.

*Тема 6. Другие простейшие немарковские модели.*

Система  $M|G|\infty$ . Система  $M|D|n|\infty$ . Система  $G|M|1|\infty$ . Система  $M|G|n|0$ .

### 5.2 Разделы дисциплин и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела дисциплины                      | Лекц. | Практические занятия |         | СРС | Всего час. |
|-------|--|-------|----------------------|---------|-----|------------|
|       |  |       | Лаб. зан.            | ПЗ/Сем. |     |            |
| 1.    | Вероятностный аппарат теории массового обслуживания. | 2     |                      | 2       | 10  | 14         |
| 2.    | Элементы теории случайных процессов.                 | 6     |                      | 6       | 26  | 38         |
| 3.    | Параметры системы массового обслуживания.            | 4     |                      | 2       | 18  | 24         |
| 4.    | Простейшие марковские модели теории телетрафика      | 12    |                      | 20      | 48  | 80         |
| 5.    | Система $M G 1 \infty$ : методы исследования.        | 6     |                      | 12      | 30  | 48         |
| 6.    | Другие простейшие немарковские модели                | 6     |                      | 12      | 30  | 48         |
| Итого |  | 36    |                      | 54      | 162 | 252        |

**6. Лабораторный практикум -- не предусмотрен.**

## 7. Практические занятия (семинары)

| № п/п | № раздела дисциплины | Наименование лабораторных работ  | Трудоемкость (час.) |
|-------|----------------------|--|---------------------|
| 1.    | 1                    | Основные вероятностные распределения: экспоненциальное распределение (3 леммы), детерминированное распределение, распределение Пуассона. Характеристики случайных величин с соответствующими распределениями. Решение задач на основные вероятностные распределения.   | 1                   |
| 2.    | 1                    | Преобразование Лапласа. Производящая функция. Связь между преобразованием Лапласа и преобразованием Лапласа-Стилтьеса. Найти преобразование Лапласа для функции заданного вида.  | 1                   |
| 3.    | 2                    | Для цепи Маркова построить граф переходных вероятностей, выписать матрицу интенсивностей переходов за $n$ шагов, найти стационарное распределение вероятностей.  | 4                   |
| 4.    | 2                    | Для Марковского процесса выписать МИП, записать СДУК, найти стационарное распределение. Для Марковского процесса записать уравнение локального и глобального балансов  | 2                   |
| 5.    | 3                    | Для пуассоновского потока найти вероятности того, что число заявок, поступающих за время $t$ равно $k$ .   | 2                   |
| 6.    | 4                    | Для системы $M M 1 \infty$ провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. СУГБ. СУЛБ. Вывод распределения вероятностей состояний модели. Нахождение временных характеристик.             | 2                   |
| 7.    | 4                    | Для первой модели Эрланга провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. СУГБ. СУЛБ. Вывод распределения вероятностей состояний модели. Нахождение временных характеристик.              | 2                   |
| 9.    | 4                    | Для второй модели Эрланга с конечной очередью провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. СУГБ. СУЛБ. Вывод распределения вероятностей состояний. Нахождение временных характеристик. | 2                   |
| 10.   | 4                    | Для модели Энгсета провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. СУГБ. СУЛБ. Вывод распределения вероятностей состояний модели. Нахождение временных характеристик.                     | 2                   |
| 11.   | 4                    | Для модели с групповым поступлением заявок провести исследование модели: изобразить схему модели,  | 4                   |

|     |   |   |    |
|-----|---|---|----|
|     |   | составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. Найти распределение методом производящих функций. Нахождение временных характеристик.   |    |
| 12. | 4 | Для модели $M E 1 \infty$ провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. Найти распределение методом производящих функций. Нахождение временных характеристик.  | 4  |
| 13. | 4 | Для моделей $M H 1 r$ и $H M 1 r$ провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. Найти распределение методом производящих функций. Нахождение временных характеристик.  | 4  |
| 14. | 5 | Для модели СМО $M G 1 \infty$ . Провести исследование модели: изобразить схему модели, составить СП, описывающий модель, выписать пространство состояний СП, изобразить граф интенсивностей переходов. Вывод распределения вероятностей состояний модели при помощи производящей функции. Формула Поллачека-Хинчина. Найти среднюю длину очереди и среднее число заявок в системе. Найти среднее время пребывания заявки в системе. | 12 |
| 15. | 6 | Провести исследование моделей $M G \infty$ , $M D n \infty$ , $G M 1 \infty$ , $M G n 0$ .  | 12 |

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения учебных занятий (в том числе для практического и лекционного типов занятий, индивидуальных и групповых консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации).

Компьютерные (дисплейные) классы с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде Университета для проведения обучающимися самостоятельной работы и компьютерного тестирования обучающихся (при необходимости).

## 9. Информационное обеспечение дисциплины

а) программное обеспечение:

- продукты Microsoft - операционная система, пакет офисных приложений, MS Teams и др. (подписка Enrollment for Education Solutions (EES))
- программное обеспечение со свободной лицензией (free):
  - браузер Chrome (лицензия Google Chrome Terms of Service)
  - медиа-плеер (например, VLC Media Player, лицензия GPL-2)
  - Adobe Reader (лицензия Adobe Software License Agreement)
  - офисный пакет LibreOffice (лицензия MPL-2.0)

б) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

- библиотека РУДН: <http://lib.rudn.ru/>
- ТУИС РУДН: <https://esystem.rudn.ru/>

## 10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

### а) основная литература

1. Башарин Г.П. «Лекции по математической теории телетрафика». – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во РУДН, 2010. – 346 с. <http://lib.rudn.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/782>
2. Башарин Г.П. Графы и цепи Маркова: Учеб. пособие. М.: Изд-во РУДН, 1989. – 34 с. (ЕТ 70)

### б) дополнительная литература

1. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е., Яркина Н.В. Модели для анализа качества обслуживания в сетях связи следующего поколения (Уч. пособие). М.: Изд-во РУДН, 2008. – 137 с. <http://lib.rudn.ru/ProtectedView/Book/ViewBook/654>
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с., ил. ЕТ 56
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Машиностроение, 1979. – 518 с. ЕТ 5
4. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 336 с. ЕТ 12
5. Iversen V.B. Teletraffic engineering and network planning. – ITU-D, January 2015. – 460 p [http://orbit.dtu.dk/files/118473571/Teletraffic\\_34342\\_V\\_B\\_Iversen\\_2015.pdf](http://orbit.dtu.dk/files/118473571/Teletraffic_34342_V_B_Iversen_2015.pdf)
6. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. – М.: МЦНМО. – 2007. – 456 с. ЕТ 1
7. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. – М.: МЦНМО. – 2010. – 559 с. ЕТ 1

## 11. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля):

Учебным планом на изучение дисциплины отводится один семестр (два модуля). В семестре проводятся четыре контрольные работы, четыре домашних задания. Сумма баллов, набранная по итогам всех заданий равняется общему количеству баллов, заработанных студентом в течение семестра. В конце семестра производится итоговый контроль знаний, включающий в себя устный опрос студента по теоретическому материалу дисциплины.

### 11.1 Структура практических занятий

Решение задач по темам, предусмотренным настоящей программой.

### 11.2. Самостоятельная работа студента

Выполнение проверочных (домашних) работ. Подготовка к итоговому контролю знаний.

## 12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

ФОС по дисциплине представлен в приложении к данной программе.

Программа составлена в соответствии с требованиями ОС ВО РУДН.

**Разработчики:**

доцент кафедры  
прикладной информатики  
и теории вероятностей



Т.А. Милованова

**Руководитель программы**  
**Заведующий кафедрой**  
прикладной информатики  
и теории вероятностей,  
д.т.н., проф.



К.Е. Самуйлов



Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА

38.03.05 Бизнес-информатика

(код и наименование направления подготовки)

(наименование профиля подготовки)

бакалавр

Квалификация (степень) выпускника

*Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Основы математической теории телетрафика»  
для направления 38.03.05 Бизнес-информатика*

**Сем 5 (модуль 9)**

| Код контролируемой компетенции или ее части | Контролируемый раздел дисциплины                                    | Контролируемая тема дисциплины                   | ФОСы (формы контроля уровня освоения ООП) |                              |                   | Баллы темы | Рубежный контроль | Баллы раздела |
|---|---|--|---|------------------------------|-------------------|------------|-------------------|---------------|
|   |   |  | Расчетные (практические) задания          | Выполнение контрольных работ | Работа на занятии |            |                   |               |
| ПК-2; ПК-4                                  | Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания | Характеристические преобразования (ПЛ, ПЛС, ПФ). | 5   | 6                            | 1                 | 12         | <b>10</b>         | <b>50</b>     |
|   |   | Цепи Маркова.                                    | 0   | 7                            | 1                 | 8          |                   |               |
|   |   | Марковские процессы..                            | 6   | 7                            | 2                 | 15         |                   |               |
|   |   | Пуассоновский входящий поток                     | 4   | 0                            | 1                 | 5          |                   |               |
| ПК-2; ПК-4                                  | Анализ систем массового обслуживания. Марковские модели             | Система $M M 1 \infty$ .                         | 8   | 6                            | 2                 | 16         | <b>10</b>         | <b>50</b>     |
|   |   | Вторая модель Эрланга: система $M M v r$         | 7   | 7                            | 2                 | 16         |                   |               |
|   |   | Модель Энгсета                                   | 0   | 7                            | 1                 | 8          |                   |               |
|   | <b>ИТОГО</b>  |  | <b>30</b>                                 | <b>40</b>                    | <b>10</b>         | <b>80</b>  | <b>20</b>         | <b>100</b>    |

Сем 5 (модуль 10)

| Код контролируемой компетенции или ее части | Контролируемый раздел дисциплины                        | Контролируемая тема дисциплины   | ФОСы (формы контроля уровня освоения ООП) |                              |                   | Баллы темы | Рубежный контроль | Баллы раздела |
|---|---|--|---|------------------------------|-------------------|------------|-------------------|---------------|
|   |   |  | Расчетные (практические) задания          | Выполнение контрольных работ | Работа на занятии |            |                   |               |
| ПК-2; ПК-4                                  | Анализ систем массового обслуживания. Марковские модели | Система с групповым поступление заявок   | 7   | 5                            | 2                 | 14         | 10                | 50            |
|   |   | Система $M E 1 \infty$ .   | 0   | 5                            | 2                 | 12         |                   |               |
|   |   | Системы $M H 1 r$ и $H M 1 r$ .  | 8   | 10                           | 2                 | 17         |                   |               |
| ПК-2; ПК-4                                  | Анализ систем массового обслуживания. Марковские модели | Система $M G 1 \infty$ : методы исследования.  | 10  | 10                           | 2                 | 22         | 10                | 49            |
|   |   | Система $M G \infty$ . Система $M D n \infty$ . Система $G M 1 \infty$ . Система $M G n 0$ . | 5   | 10                           | 2                 | 17         |                   |               |
|   | <b>ИТОГО</b>  |  | <b>30</b>                                 | <b>40</b>                    | <b>10</b>         | <b>80</b>  | <b>20</b>         | <b>100</b>    |

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций: ПК-2; ПК-4

ПК-2: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности:

- ПК-2.1 Знает базовый математический аппарат, необходимый для решения задач профессиональной деятельности
- ПК-2.2 Умеет применять знания и методы из области математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности
- ПК-2.3 Имеет практический опыт решения стандартных математических задач и применяет его в профессиональной деятельности.

ПК-4: Способен принимать обоснованные управленческие решения в своей профессиональной деятельности:

- ПК-4.2 Умеет анализировать и оценивать факторы и условия, влияющие на принятие управленческих решений
- ПК-4.3 Умеет проводить оценку эффективности принятия решения в соответствии с выбранными критериями или выбранными целевыми показателями

# Балльно-рейтинговая система оценки уровня знаний

## Сводная оценочная таблица дисциплины

Работа в семестре

Максимальное число баллов, набранных в семестре – 100  
Сводная оценочная таблица дисциплины (3 курс, 5 сем, модуль 9)

| №            | Раздел  | Тема   | Формы контроля уровня освоения ООП |                              |                   | Баллы темы | Рубежный контроль | Баллы раздела |
|--------------|---|--|------------------------------------|------------------------------|-------------------|------------|-------------------|---------------|
|              |   |  | Расчетные (практические) задания   | Выполнение контрольных работ | Работа на занятии |            |                   |               |
| <b>1</b>     | Элементы теории случайных процессов и теории массового обслуживания | Характеристические преобразования (ПЛ, ПЛС, ПФ). | 5                                  | 6                            | 1                 | <b>12</b>  | <b>10</b>         | <b>50</b>     |
|              |   | Цепи Маркова.                                    | 0                                  | 7                            | 1                 | <b>8</b>   |                   |               |
|              |   | Марковские процессы..                            | 6                                  | 7                            | 2                 | <b>15</b>  |                   |               |
|              |   | Пуассоновский входящий поток                     | 4                                  | 0                            | 1                 | <b>5</b>   |                   |               |
| <b>2</b>     | Анализ систем массового обслуживания.                               | Система $M M 1 \infty$ .                         | 8                                  | 6                            | 2                 | <b>16</b>  | <b>10</b>         | <b>50</b>     |
|              |   | Вторая модель Эрланга: система $M M \nu r$       | 7                                  | 7                            | 2                 | <b>16</b>  |                   |               |
|              |   | Модель Энгсета                                   | 0                                  | 7                            | 1                 | <b>8</b>   |                   |               |
| <b>Итого</b> |   |  | <b>30</b>                          | <b>40</b>                    | <b>10</b>         | <b>80</b>  | <b>20</b>         | <b>100</b>    |

Максимальное число баллов, набранных в семестре – 100  
Сводная оценочная таблица дисциплины (3 курс, 5 сем, модуль 10)

| №        | Раздел                  | Тема                                    | Формы контроля уровня освоения ООП |                              |                   | Баллы темы | Рубежный контроль | Баллы раздела |
|----------|-------------------------|---|------------------------------------|------------------------------|-------------------|------------|-------------------|---------------|
|          |                         |   | Расчетные (практические) задания   | Выполнение контрольных работ | Работа на занятии |            |                   |               |
| <b>1</b> | Анализ систем массового | Система с групповым поступлением заявок | 7                                  | 5                            | 2                 | <b>14</b>  | <b>10</b>         | <b>51</b>     |
|          |                         | Система $M E 1 \infty$ .                | 0                                  | 5                            | 2                 | <b>7</b>   |                   |               |

|              |  |   |           |           |           |           |           |            |
|--------------|--|---|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 2            | обслуживания.<br>Марковские модели.<br>Анализ систем массового обслуживания.<br>Немарковские модели. | Системы $M H 1 r$ и $H M 1 r$ .   | 8         | 10        | 2         | 20        |           |            |
|              |  | Система $M G 1 \infty$ : методы исследования.   | 10        | 10        | 2         | 22        |           |            |
|              |  | Система $M G \infty$ .<br>Система $M D n \infty$ .<br>Система $G M 1 \infty$ .<br>Система $M G n 0$ . | 5         | 10        | 2         | 17        | 10        | 49         |
| <b>Итого</b> |  |   | <b>30</b> | <b>40</b> | <b>10</b> | <b>80</b> | <b>20</b> | <b>100</b> |

**Таблица соответствия баллов и оценок**

| Баллы БРС | Традиционные оценки РФ | Оценки ECTS |
|-----------|------------------------|-------------|
| 95 - 100  | 5                      | A           |
| 86 - 94   |                        | B           |
| 69 - 85   | 4                      | C           |
| 61 - 68   | 3                      | D           |
| 51 - 60   |                        | E           |
| 31 - 50   | 2                      | FX          |
| 0 - 30    |                        | F           |
|           | Зачет                  | Passed      |

### **Правила применения БРС**

1. Раздел (тема) учебной дисциплины считается освоенной, если студент набрал более 50% от числа баллов, предусмотренных за данный раздел (тему) (Приказ Ректора № 564 от 20.06.2013, пункт 4.8).
2. Студент не может быть аттестован по дисциплине, если им не освоены все темы всех разделов дисциплины, указанные в Сводной оценочной таблице. (Приказ Ректора № 564 от 20.06.2013, пункт 4.9).
3. По решению преподавателя и с согласия студентов, не освоивших отдельные разделы (темы) дисциплины, в течение учебного семестра могут быть повторно проведены мероприятия текущего контроля успеваемости (контрольные работы) или выданы дополнительные задания по этим разделам (темам). При этом студентам за данную работу засчитывается минимально возможный положительный балл. (Приказ Ректора № 564 от 20.06.2013, пункт 4.10).
4. При выполнении студентом дополнительных учебных заданий, или повторного прохождения мероприятий текущего контроля, полученные им баллы засчитываются в конкретные темы. При этом предыдущие баллы, полученные по учебным заданиям, обнуляются. Итоговая сумма баллов не может превышать максимального количества баллов, установленного по данным темам (в соответствии с приказом ректора № 564 от 20.06.2013 г.)
5. Контрольные работы, тестирование проводятся только во время аудиторных занятий по дисциплине в соответствии с программой дисциплины и расписанием учебных занятий. (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункт 4.6).
6. Студент, набравший менее 30% от максимально возможного на момент рубежной аттестации количества баллов, считается неуспевающим по данной дисциплины. (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункт 4.14).

7. Студент, набравший за работу в семестре менее 30% от максимально возможного количества баллов (меньше 24 баллов), не допускается к итоговому контролю знаний. (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункт 4.19).
8. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем. Сдача заданий позже установленного срока приводит к понижению баллов.
9. Контрольная работа переписывается один раз в течение двух недель с момента написания по согласованию преподавателя и студента без понижения баллов. Перед написанием контрольной работы или перед переписыванием проводится консультация с разбором типичных заданий и (или) типичных ошибок в этих заданиях.  
Во время контрольной работы студентам запрещается использовать конспекты семинарских и лекционных занятий (если это не разрешено преподавателем), а также мобильные и компьютерные устройства (**Приказ Ректора № 598 от 22.06.2012**). В случае нарушения со стороны студента преподаватель имеет право оценить результаты контрольной работы в ноль баллов.
10. Расчетные (практические) задания выдаются каждому студенту индивидуально два раза в семестр, и на их выполнение отводится указанное преподавателем время.
11. Рубежный контроль знаний содержит два вопроса. На подготовку студенту отводится не более одного часа, после чего производится устный опрос. Список вопросов к рубежному контролю должен быть вывешен на странице кабинета преподавателя и (или) выдан студентам не позднее, чем за три недели до проведения мероприятия.
12. На рубежном контроле знаний запрещается использовать учебные материалы (если не разрешено преподавателем), мобильные и компьютерные устройства. Студенту, пойманному за списыванием либо использующему мобильные (компьютерные) устройства, автоматически ставится ноль баллов за рубежный контроль знаний. (Приказ Ректора № 797 от 27.09.2012).
13. Если в итоге за семестр студент получил менее 31 балла, то студенту выставляется оценка F и студент должен повторить эту дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил от 31 до 50 баллов (FX), то студенту разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов. Ликвидация задолженности возможна не более двух раз, причем первая пересдача проводится в период сессии до начала каникул (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункты 8.2-8.3). Вторая пересдача по дисциплине проводится в течение четырех недель с начала следующего учебного семестра (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункт 8.7) и принимается комиссией, назначаемой деканом факультета (Приказ Ректора № 258 от 25.03.2013, пункты 8.8-8.11).

## Критерии оценки по дисциплине

### **95-100 баллов:**

- полное выполнение контрольных, проверочных, домашних работ;
- высокий уровень культуры исполнения контрольных, проверочных, домашних работ;
- активное участие в мероприятиях, предусмотренных программой дисциплины;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- выраженная способность самостоятельно и творчески решать поставленные задачи;
- полная самостоятельность и творческий подход при изложении материала по программе дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной программой дисциплины и преподавателем.

### **86- 94 балла:**

- полное выполнение контрольных, проверочных, домашних работ;
- высокий уровень культуры исполнения контрольных, проверочных, домашних работ;
- систематизированное, глубокое и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- способность самостоятельно решать поставленные задачи в нестандартных производственных ситуациях;
- усвоение основной и дополнительной литературы, нормативных и законодательных актов, рекомендованных программой дисциплины и преподавателем.

### **69-85 баллов:**

- частичное выполнение контрольных, проверочных, домашних работ;
- хороший уровень культуры исполнения контрольных, проверочных, домашних работ;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- способность самостоятельно решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- усвоение основной литературы;

### **51-68 баллов:**

- частичное выполнение контрольных, проверочных, домашних работ;
- систематизированное и полное освоение навыков и компетенций по всем разделам программы дисциплины;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;
- удовлетворительное усвоение основной литературы;

### **31 - 50 баллов – НЕ ЗАЧТЕНО:**

- частичное выполнение контрольных, проверочных, домашних работ;
- недостаточно полный объем навыков и компетенции в рамках программы дисциплины;
- неумение использовать в практической деятельности научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными стилистическими и логическими ошибками;
- способность решать проблемы в рамках программы дисциплины;

- удовлетворительное усвоение основной литературы;

**0-30 баллов, НЕ ЗАЧТЕНО:**

- отсутствие умений, навыков, знаний и компетенции в рамках программы дисциплины;
- невыполнение контрольных, проверочных, домашних работ; отказ от ответа по программе дисциплины;
- игнорирование занятий по дисциплине по неуважительной причине.



### Примерный перечень оценочных средств

| п/<br>п                              | Наименование<br>оценочного<br>средства | Краткая характеристика оценочного<br>средства  | Представление<br>оценочного<br>средства в фонде          |
|--------------------------------------|--|--|--|
| <i><b>Аудиторная работа</b></i>      |  |  |  |
| 1.                                   | Контрольная работа                     | Средство контроля, организованное как аудиторное занятие, на котором обучающимся необходимо самостоятельно продемонстрировать усвоение учебного материала темы, раздела или разделов дисциплины.   | Вопросы по темам/разделам дисциплины                     |
| 2.                                   | Работа на занятии                      | Средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.  | Вопросы по темам/разделам дисциплины                     |
| 3                                    | Зачет                                  | Оценка работы студента в течение семестра (года, всего срока обучения и др.) и призван выявить уровень, прочность и систематичность полученных им теоретических и практических знаний, приобретения навыков самостоятельной работы, развития творческого мышления, умение синтезировать полученные знания и применять их в решении практических задач. | Примеры заданий/вопросов, пример экзаменационного билета |
| <i><b>Самостоятельная работа</b></i> |  |  |  |
| 1                                    | Домашняя работа                        | Средство проверки умений применять полученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.  | Комплект заданий для выполнения типового расчета         |

# Комплект экзаменационных билетов

Дисциплина **ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА**  
(наименование дисциплины)

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1 (образец)

1. Преобразование Лапласа, определение. Производящая функция случайной величины, определение, свойства. Преобразование Лапласа-Стилтьеса случайной величины, определение, свойства.

2. Модель Энгсета (система с конечным числом источников): стационарное распределение очереди, среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;

Составитель

Т.А. Милованова

Заведующий кафедрой

К.Е. Самуилов

### Критерии оценки:

Первый вопрос в экзаменационном билете выбирается из первого раздела, второй вопрос в экзаменационном билете выбирается из второго раздела. Полнота и правильность ответа на каждый вопрос оценивается преподавателем из 10 баллов.

### ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ:

#### СЕМ. 5 (МОДУЛЬ 9)

##### РАЗДЕЛ I

1. Преобразование Лапласа, определение. Производящая функция случайной величины, определение, свойства. Преобразование Лапласа-Стилтьеса случайной величины, определение, свойства.
2. Экспоненциальное распределение. Лемма «отсутствие последствия».
3. Цепь Маркова. Определение, матрица переходных вероятностей, уравнения Колмогорова-Чепмена. Стационарная цепь Маркова. Система уравнений равновесия.
4. Марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Определение, матрица интенсивностей переходов и ее свойства. Система дифференциальных уравнений Колмогорова.
5. Конструктивное описание Марковского процесса. Стационарное распределение Марковского процесса. Система уравнений равновесия. Глобальный и локальный балансы.
6. Процесс размножения и гибели, определение, матрица интенсивностей переходов, уравнение локального и глобального балансов. Решение для стационарных вероятностей состояний. Условия Карлина и МакГрегора.
7. Входящий поток, способы его задания. Простейший (пуассоновский) входящий поток.

## РАЗДЕЛ II.

1. Система  $M/M/1/\square$ :
  - а) стационарное распределение очереди, среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;
  - б) стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе;
  - в) формулы Литтла.
2. Первая модель Эрланга.
  - а) стационарное распределение очереди; средняя длина очереди, стационарная вероятность потери (первая формула Эрланга);
3. Вторая модель Эрланга (емкость накопителя конечна).
  - а) стационарное распределение очереди; стационарная вероятность немедленного обслуживания, средняя длина очереди, стационарная вероятность потери;
  - б) стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.
4. Вторая модель Эрланга (емкость накопителя бесконечна).
  - а) стационарное распределение очереди; стационарная вероятность немедленного обслуживания, средняя длина очереди;
  - б) стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.
5. Модель Энгсета (система с конечным числом источников):
  - а) стационарное распределение очереди, среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;
  - б) стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания требования в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

## Сем. 5 (модуль 10)

### РАЗДЕЛ I

1. Система с групповым поступлением заявок.
  - а) стационарное распределение очереди; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;
  - б) стационарное пребывание заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.
2. Система  $M/E/1/\square\square$ 
  - а) стационарное распределение очереди; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;
  - б) стационарное пребывание заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.
3. Системы  $M|H|1|r$  и  $H|M|1|r$ .
  - а) стационарное распределение очереди; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди;
  - б) стационарное пребывание заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

## РАЗДЕЛ II

1. Система  $M|G|1|\infty$ 
  - а) Вложенная цепь Маркова. Стационарные вероятности состояний по вложенной цепи Маркова, применение для их вычисления производящей функции. Формула Поллачека-Хинчина.
  - б) Виртуальное время ожидания. Уравнение Такача. Стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе.
2. Система  $M|G|\infty$ .
  - а) Стационарное распределение числа заявок в системе.
3. Система  $M|D|n|\infty$ .
  - а) вложенная цепь Маркова, стационарные вероятности состояний.
4. Система  $G|M|1|\infty$ .
  - а) вложенная цепь Маркова, стационарные вероятности состояний по вложенной цепи Маркова.
  - б) стационарное распределение времени пребывания заявки в системе.
5. Система  $M|G|n|0$ .
  - а) система уравнений, описывающих марковский процесс, стационарное распределение числа заявок в системе.

# Комплект заданий для выполнения домашней работы

по дисциплине Основы математической теории телетрафика  
(наименование дисциплины)

## Образцы домашних работ:

### Сем 5 (модуль 9)

#### Домашняя работа 1

**Задача 1** (5 баллов).

- 1) (1 балл) Найти преобразование Лапласа функции  $f(x)$ .
- 2) (2 балла) По данной производящей функции найти распределение случайной величины.
- 3) (2 балла) По данному преобразованию Лапласа-Стилтьеса найти функцию распределения случайной величины.

**Задача 2** (6 баллов). Марковский процесс задан матрицей интенсивностей переходов (смотрите варианты).

8. Выписать СДУК.
9. Выписать СУР.
10. Выписать УГБ.
11. Выписать УЛБ.
12. Найти стационарные вероятности для Марковского процесса.

**Задача 3** (4 балла). В систему массового обслуживания поступает  $\lambda$  заявок в час (см. варианты).

- 1) Найдите вероятность того, что за время  $t$  минут в систему поступит ровно  $k$  заявок.
- 2) Найдите вероятность того, что за время  $t$  минут в систему поступит менее  $k$  заявок.
- 3) Найдите вероятность того, что за время  $t$  минут в систему поступит по крайней мере  $k$  заявок.
- 4) Среднее число заявок, поступивших за время  $t$ .

#### Критерии оценки:

Оценивается правильность и полнота решения задач. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую задачу указано в скобках в образце.

#### Домашняя работа 2

**Задача 1** (7 баллов)

В системе  $M/M/1/\infty$  за обслуживание без ожидания каждый клиент платит  $C$  руб. Если ожидание обслуживания длится  $x$  единиц времени, то оплата за обслуживание составляет  $Ce^{-sx}$ . Интенсивность поступающего потока зависит от  $C$  и равна  $\lambda = \lambda(C) = \Lambda \cdot e^{-\gamma C}$ . Интенсивность обслуживания постоянна и равна  $\mu$ .

1. Вычислите следующие характеристики обслуживания:
  - а) вероятность немедленного обслуживания  $\beta$ ;
  - б) математическое ожидание и дисперсию числа заявок в системе;
  - в) математическое ожидание и дисперсию длины очереди;
  - г) математическое ожидание и дисперсию времени ожидания начала обслуживания;
  - д) математическое ожидание и дисперсию времени пребывания в системе.
2. Определите с точностью до десятых величину  $C_{\text{опт}}$ , обеспечивающую наибольшую прибыль (наибольшую суммарную оплату, полученную от клиентов в единицу времени)

### Задача 2. (8 баллов)

Для второй модели Эрланга (СМО  $M/M/v/r$ ) с интенсивностью входящего потока  $\lambda$  и интенсивностью обслуживания  $\mu$

2. Решить следующую оптимизационную задачу (2 балла):

**Вариант 1; 8; 15; 22; 29.** Найти  $v$  по заданной вероятности потери  $\pi$ .

**Вариант 2; 9; 16; 234.** Найти  $r$  по заданной вероятности потери  $\pi$ .

**Вариант 3; 10; 17; 24.** Найти  $v$  по заданному среднему времени  $w$  ожидания начала обслуживания принятого в систему требования.

**Вариант 4; 11; 18; 25.** Найти  $r$  по заданному среднему времени  $w$  ожидания начала обслуживания принятого в систему требования.

**Вариант 5; 12; 19; 26.** Найти  $v$  по заданной вероятности немедленного обслуживания  $\beta$ .

**Вариант 6; 13; 20; 27.** Найти  $v$  по заданному среднему времени  $v$  пребывания в системе принятого в систему требования.

**Вариант 7; 14; 21; 28.** Найти  $r$  по заданному среднему времени  $v$  пребывания в системе принятого в систему требования.

3. Вычислить следующие стационарные характеристики обслуживания (4 балла):

а) вероятность потери  $\pi$  ;

б) вероятность немедленного обслуживания  $\beta$  ;

в) математическое ожидание и дисперсию длины очереди;

г) математическое ожидание и дисперсию времени ожидания начала обслуживания;

д) математическое ожидание и дисперсию времени пребывания в системе.

### Критерии оценки:

Оценивается правильность и полнота решения задач. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую задачу указано в скобках в образце.

## Сем 5 (модуль 10)

### Домашняя работа 1

#### Задача 1 (7 баллов)

Рассматривается двухканальная СМО с накопителем неограниченной емкости, на вход которой поступает групповой пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ , в каждой группе содержится по две заявки. Времена обслуживания заявок независимы и при этом время обслуживания каждой заявки на любом приборе распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ .

Найдите:

- 1) Производящую функцию числа заявок в системе.
- 2) Среднее и дисперсию числа заявок в системе.
- 3) Среднее и дисперсию числа заявок в очереди.

#### Задача 2 (8 баллов)

Для вариантов с нечетным номером:

Рассматривается двухканальная СМО с накопителем ограниченной емкости, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Времена обслуживания заявок на каждом приборе независимы и имеют гиперэкспоненциальное распределение.

Найдите:

- 1) Провести исследование системы.
- 2) Найти стационарные характеристики системы.

Для вариантов с четным номером:

Рассматривается двухканальная СМО с накопителем ограниченной емкости, на вход которой поступает поток заявок, имеющий гиперэкспоненциальное распределение. Времена обслуживания заявок независимы при этом время обслуживания каждой заявки на любом приборе распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ .

Найдите:

- 1) Провести исследование системы.
- 2) Найти стационарные характеристики системы.

### Критерии оценки:

Оценивается правильность и полнота решения задач. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую задачу указано в скобках в образце.

## Домашняя работа 2

**Задача 1** (10 баллов) Рассматривается система  $M|G|1|\infty$  с интенсивностью входящего потока  $\lambda$  и временем обслуживания требования с преобразование Лапласа-Стилтьеса

**Вариант 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.**

$$\beta(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2.$$

**Вариант 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.**

$$\beta(s) = \alpha \cdot \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+s}\right) + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_2+s}\right).$$

**Вариант 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.**

$$\beta(s) = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1+s}\right) \cdot \left(\frac{\mu_2}{\mu_2+s}\right).$$

1. Записать производящую функцию числа заявок в системе (1 балл).
2. Найти стационарное распределение числа заявок в системе (2 балла).
3. Найти среднее число заявок в системе и среднюю длину очереди (1 балл).
4. Записать преобразование Лапласа-Стилтьеса времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе (1 балл).
5. Найти функцию распределения времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе (3 балла).
6. Найти среднее время ожидания начала обслуживания и среднее время пребывания заявки в системе (1 балл).

**Задача 2** (5 баллов). Провести исследование системы:

**Вариант 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29.** Система  $M|G|\infty$ .

**Вариант 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30.** Система  $M|D|n|\infty$ .

**Вариант 3, 7, 11, 15, 19, 23, 28.** Система  $G|M|1|\infty$ .

**Вариант 4, 8, 12, 16, 20, 24, 26.** Система  $M|G|n|0$ .

### Критерии оценки:

Оценивается правильность и полнота решения задач. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую задачу указано в скобках в образце.

# Образцы вариантов для контрольных работ

по дисциплине Основы математической теории телетрафика  
(наименование дисциплины)

Сем 5 (модуль 9).

Контрольная работа 1.

Вариант 1.

1. Дана производящая функция случайной величины  $\xi$   $P(x) = \frac{7-9x}{2(x^2-5x+6)}$ . Найдите распределение случайной величины  $\xi$  (т.е.  $P_n = P\{\xi = n\}$ ).

или

Дано преобразование Лапласа –Стилтьеса некоторой случайной величины  $\xi$   
 $\alpha(s) = \frac{25}{s^2+10s+25}$ . Найдите функцию распределения случайной величины  $\xi$ .

2. Матрица вероятностей переходов цепи Маркова равна  $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$ .

Начальное – вектор  $\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ . Найдти:

- а) распределение вероятностей состояний в момент  $n = 2$ .  
б) вероятность того, что через три шага состоянием цепи будет 1.  
в) вероятность того, что в моменты  $n = 0, 1, 2, 3$  состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2.  
г) предельные (финальные) вероятности для данной цепи.

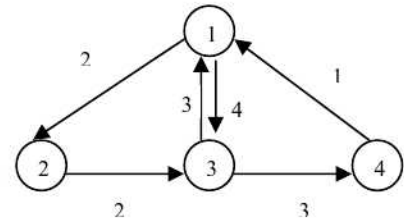
3. Марковский процесс задан графом переходов, изображенным на рисунке.

а) составьте матрицу интенсивностей переходов.

б) составьте систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

в) уравнение локального баланса, разбив множество состояний на классы  $I_1 = \{1, 3\}$  и  $I_2 = \{2, 4\}$ .

г) найдите стационарные вероятности состояний системы.



Вариант 2.

1. Дано преобразование Лапласа  $\pi(s) = \frac{2s^2-4}{s^2-9s}$ . Найдите функцию  $f(x)$ .

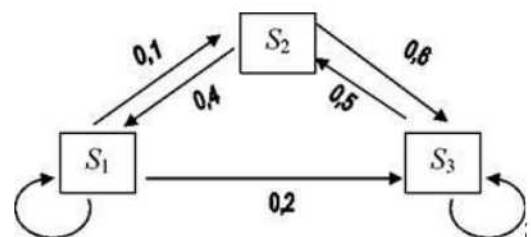
ИЛИ

Дана функция  $f(x) = 2x^6 + x^3 e^{-2x} + x^2 \sin^2 2x$ . Найдите преобразование Лапласа этой функции.

2. Цепь Маркова задана графом переходных вероятностей, изображенном на рисунке.

Начальное – вектор  $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ . Найдти:

- а) распределение вероятностей состояний в момент  $n = 2$ .





- б) вероятность того, что через три шага состоянием цепи будет 1.  
 в) вероятность того, что в моменты  $n = 0, 1, 2, 3$  состояниями цепи будут соответственно 2, 1, 3, 2.  
 г) предельные (финальные) вероятности для данной цепи.

3. Марковский процесс задан матрицей интенсивностей переходов  $A =$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

- а) изобразите граф интенсивностей переходов.  
 б) составьте систему дифференциальных уравнений Колмогорова.  
 в) уравнение локального баланса, разбив множество состояний на классы  $I_1 = \{2, 3\}$  и  $I_2 = \{1, 4\}$ .  
 г) найдите стационарные вероятности состояний системы.

### Критерии оценки:

Оценивается полнота и правильность решения каждой задачи. Максимальное число баллов, которое можно получить за первую задачу – 6, за вторую и третью по 7 баллов.

## Контрольная работа 2.

### Вариант 1.

1. Имеется однолинейная система массового обслуживания (СМО) с накопителем емкости 3. За 1 час в СМО поступает в среднем 10 заявок. Среднее время обслуживания заявки 20 минут. Среднее время ожидания заявки в очереди 10 минут, после чего заявка покидает систему (не дождавшись обслуживания).
  3. Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  4. Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  5. Найдите среднее число заявок в очереди.
  6. С какой вероятностью прибор простаивает.
2. В некоторую систему массового обслуживания (СМО) поступают заявки с интенсивностью 150 заявок в час. В СМО имеется три обслуживающих прибора, каждый из которых обслуживает в среднем 1 заявку за минуту.
  - 1) Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  - 2) Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  - 3) Найдите среднее число занятых приборов.
  - 4) Найдите среднее время ожидания начала обслуживания.
3. Рассматривается однолинейная система массового обслуживания (СМО), в которую поступают заявки от 8 источников (каждый источник может послать в систему только одну и пока эта заявка не обслужится, источник новую заявку послать не может). В среднем 2 источника посылают заявку за час. Обслуживание занимает в среднем 30 минут.
  - 1) Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  - 2) Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  - 3) Найдите вероятность того, что в очереди не менее одной заявки.
  - 4) Найдите среднее число заявок в системе.

### Вариант 2.

1. Система массового обслуживания имеет один обслуживающий прибор. Поток заявок, поступающий в СМО, простейший с интенсивностью 3 заявки за 15 минут. Время обслуживания заявки распределено по показательному закону со средним временем 2 минуты.
  - 1) Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  - 2) Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  - 3) Найдите среднюю длину очереди.
  - 4) Найдите вероятность того, что заявка пробудет в системе более 10 минут.
2. Рассматривается работа системы массового обслуживания (СМО) с тремя обслуживающими приборами. В среднем в систему поступает заявка каждые 2 минуты, а обслуживание одной заявки одним прибором длится в среднем 2 минуты.
  - 1) Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  - 2) Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  - 3) С какой вероятностью поступающая заявка займет место в очереди.
  - 4) Среднее время ожидания обслуживания.
3. 6 источников посылают заявки в систему массового обслуживания (СМО) с двумя приборами (каждый источник может послать в систему только одну и пока эта заявка не обслужится, источник новую заявку послать не может). Время с момента обслуживания заявки до момента нового поступления заявки в СМО в среднем равно 30 минутам. Среднее время обслуживания заявки 1 час.
  - 1) Постройте граф интенсивностей функционирования СМО.
  - 2) Найдите стационарные вероятности числа заявок в СМО.
  - 3) Найдите среднее число заявок в очереди.
  - 4) Найдите вероятность того, что все приборы заняты.

#### Критерии оценки:

Оценивается полнота и правильность решения каждой задачи. Максимальное число баллов, которое можно получить за контрольную работу 0 – 20 баллов.

### Сем 5 (модуль 10).

#### Контрольная работа 1.

##### Вариант 1.

1. В однолинейную систему массового обслуживания и емкостью накопителя, равной 3, поступают заявки с интенсивностью 3: равновероятно приходит 1 или 2 заявки, при этом, если в накопителе 1 свободное место и приходит одновременно две заявки. То обе заявки теряются. Проведите исследование системы и найдите вероятности состояний системы, среднее число заявок в системе, среднюю длину очереди, вероятность потери.
2. Рассматривается система  $M|H_2|1|2$ , в которой  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\alpha_1 = 0,8$ ,  $\alpha_2 = 0,2$ . Проведите исследование системы и найдите вероятности состояний системы, среднее число заявок в системе, среднюю длину очереди, вероятность потери.

#### Критерии оценки:

Оценивается полнота и правильность решения каждой задачи. Максимальное число баллов, которое можно получить за контрольную работу 0 – 20 баллов.

#### Контрольная работа 2.

##### Вариант 1.

1. Рассматривается система  $M/G/1/\infty$  с интенсивностью входящего потока  $\lambda$  и временем обслуживания требования, распределенным по гиперэрланговскому закону с функцией

распределения  $B(x) = 0.1B_1(x) + 0.1B_2(x) + 0.4B_3(x) + 0.4B_4(x)$ , где функции  $B_k(x)$  имеют ПЛС  $\alpha_1(s) = \left(\frac{1}{2+s}\right)^2$ ,  $\alpha_2(s) = \frac{2}{2+s}$ ,  $\alpha_3(s) = \left(\frac{1}{1+s}\right)^2$ ,  $\alpha_4(s) = \frac{2}{2+s}$ .

Найти  $\lambda$  такое, что в стационарном режиме среднее число заявок в системе будет равно 7.25. Вычислить следующие стационарные характеристики обслуживания:

- а) математическое ожидание длины очереди;
- б) математическое ожидание времени ожидания начала обслуживания;
- в) математическое ожидание времени пребывания в системе.

2. В условиях задачи 1 поменять местами распределения времени между поступлениями соседних заявок и времени обслуживания. Построить вложенную цепь Маркова по моментам поступления заявок в систему, найти матрицу переходных вероятностей вложенной цепи Маркова и выписать уравнение для производящей функции числа заявок в системе.

**Критерии оценки:**

Оценивается полнота и правильность решения каждой задачи. Максимальное число баллов, которое можно получить за контрольную работу 0 – 20 баллов.

# Перечень вопросов по темам/разделам дисциплины для работы на занятии

по дисциплине Основы математической теории телетрафика  
(наименование дисциплины)

## Сем. 5 (модуль 9).

1. Определение преобразования Лапласа. Его свойства.
2. Определение преобразования Лапласа-Стилтьеса. Его свойства.
3. Определение производящей функции. Ее свойства.
4. Определение случайного процесса (с.п.). Реализация (траектория) с.п. Классификация (определения) с.п. по времени и по множеству состояний. Числовые характеристики с.п.
5. Цепь Маркова (ЦМ) – определение. Марковское свойство. Определение однородной ЦМ. Свойства переходных вероятностей. Матрица переходных вероятностей (МПВ) (стохастическая и полустохастическая). Способы задания ЦМ.
6. Вероятностное распределение за  $n$  шагов. Формулы расчета. Матрица переходных вероятностей за  $n$  шагов. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
7. Эргодические цепи Маркова. Пределы элементов МПВ за  $n$  шагов. Финальные (стационарные) вероятности ЦМ.
8. Марковские процессы (МП) с непрерывным временем. Определение МП с непрерывным временем. Определение однородного МП с непрерывным временем. Определение МПВ марковского процесса.
9. Пример марковского процесса – пуассоновский процесс. Определение, система дифференциальных уравнений для вероятностей  $p_n(t)$ . Решение системы дифференциальных уравнений (ДУ).
10. Пример марковского процесса – процесс рождения и гибели. Система дифференциальных уравнений для вероятностей  $p_n(t)$ .
11. Матрица интенсивностей переходов. Получение элементов данной матрицы. Определение консервативного МП и консервативной матрицы интенсивностей переходов. Системы ДУ для вероятностей  $p_{ij}(t)$  – прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова-Чепмена.
12. Вывод системы ДУ для вероятностей состояний марковского процесса. Распределение времени пребывания в состоянии  $i$ , если процесс стартовал из этого состояния. Условная вероятность перехода в состояние  $j$  из состояния  $i$ ,  $i \neq j$ .
13. Построение вложенной цепи Маркова по моментам переходов марковского процесса. Матрица переходных вероятностей ЦМ (по матрице интенсивностей переходов), стационарное распределение вложенной ЦМ.
14. Классификация Башарина-Кэндалла. Определяющие параметры СМО. Параметры функционирования СМО (основные вероятностные характеристики модели). Входящий поток требований: рекуррентный поток, детерминированный, пуассоновский, эрланговский потоки. Различные распределения длительности обслуживания. Показатели качества обслуживания: длина очереди, время ожидания начала обслуживания, число заявок в СМО, время пребывания заявки в СМО, вероятность потери заявки (по времени, по вызовам).
15. СМО  $M|M|1|\infty$ : схема модели, СП, пространство состояний модели, матрица  $A$ , диаграмма интенсивностей переходов, СУР из диаграммы интенсивностей переходов, условие существования решения СУР, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ : ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$  этих ФР, среднее число заявок в СМО, среднее число заявок в очереди.

16. Первая модель Эрланга: схема модели, СП, пространство состояний модели, вывод СПДУК из уравнений Колмогорова-Чэпмена, СУР из СПДУК, условие существования решения СУР, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ : вероятность блокировки заявки, среднее число заявок в СМО. ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$ .

17. Первая модель Эрланга: схема модели, СП, пространство состояний модели, матрица  $A$ , СУР из диаграммы интенсивностей переходов, условие существования решения СУР, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ : вероятность блокировки заявки, среднее число заявок в СМО. ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$ .

18. Вторая модель Эрланга с конечной очередью: схема модели, СП, пространство состояний модели, вывод СПДУК из уравнений Колмогорова-Чэпмена, СУР из СПДУК, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ : вероятность блокировки заявки, среднее число заявок в СМО, среднее число заявок в очереди. ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$ .

19. Вторая модель Эрланга с конечной очередью: схема модели, СП, пространство состояний модели, матрица  $A$ , диаграмма интенсивностей переходов, СУР из диаграммы интенсивностей переходов, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ : вероятность блокировки заявки, среднее число заявок в СМО, среднее число заявок в очереди. ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$ .

20. Модель Энгсета (система с конечным числом источников): схема модели, СП, пространство состояний модели, матрица  $A$ , диаграмма интенсивностей переходов, СУР из диаграммы интенсивностей переходов, стационарное РВ, основные вероятностные характеристики модели через  $\{p_n, n \in J\}$ , среднее число заявок в системе, средняя длина очереди; ФР  $W(x)$  времени ожидания и ФР  $V(x)$  времени пребывания заявки в СМО, ПЛС  $\omega(x)$  и  $v(s)$ .

### **Сем. 5 (модуль 10).**

21. Система с групповым поступлением заявок. СП, пространство состояний модели, производящая функция числа заявок в системе; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди; стационарное время пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

22. Система  $M/E/1/\infty$  СП, пространство состояний модели, производящая функция числа заявок в системе; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди; стационарное время пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

23. Системы  $M|N|1|r$  и  $N|M|1|r$ . СП, пространство состояний модели, производящая функция числа заявок в системе; среднее число заявок в системе, средняя длина очереди; стационарное время пребывания заявки в системе, средние времена ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

24. Система  $M/G/1/\infty$ . Вложенная цепь Маркова. Стационарные вероятности состояний по вложенной цепи Маркова, применение для их вычисления производящей функции. Формула Поллачека-Хинчина. Виртуальное время ожидания. Уравнение Такача. Стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания заявки в системе.

25. Система  $M|G|\infty$ . Стационарное распределение числа заявок в системе.

26. Система  $M|D|\eta|\infty$ . Вложенная цепь Маркова, стационарные вероятности состояний.

27. Система  $G|M|1|\infty$ . Вложенная цепь Маркова, стационарные вероятности состояний по вложенной цепи Маркова. Стационарное распределение времени пребывания заявки в системе.

28. Система  $M|G|n|0$ . Система уравнений, описывающих марковский процесс, стационарное распределение числа заявок в системе.

### **Критерии оценки работы на занятии**

Оценивается полнота и правильность ответов на вопросы, использование научной терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа, умение делать обоснованные выводы, активность и частота участия в данном оценочном мероприятии.