Рекомендовано МССН

1. ПРОГРАММА КУРСА

Наименование дисциплины _____Прикладная математика__________

Рекомендуется для направления (ий) подготовки (специальности (ей))

120700 «Землеустройство и кадастры»

Квалификация (степень) выпускника магистр

А. Цели и задачи дисциплины.

Цель преподавания дисциплины «Прикладная математика» для направления 120700 «Землеустройство и кадастры» заключается в изучении математического аппарата, используемого
при математическом моделировании реальных физических и экономических явлений и процессов.
Акцент при изучении дисциплины «Прикладная математика» делается на методы решения
прикладных задач, имеющих место в геодезии и кадастр

Б. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата (магистратуры, специалитета)

Дисциплина «Прикладная математика» относится к базовой части общенаучного цикла (М1)
федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.
При обучении дисциплине «Прикладная математика» используются знания и навыки, полученные магистрантами при освоении математических и естественнонаучных дисциплин, таких
как математика, физика, информатика.

В. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

1. В области общекультурных компетенций (ОК)

1.1.Способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень (ОК- 1);
1.2. Способностью к самостоятельному обучению новым методам исследования, к изменению научного и научно-производственного профиля своей профессиональной деятельности (ОК-2);
1.3.Способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности (ОК-6);
1.4.Владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, критическому осмыслению, систематизации, прогнозированию, постановке целей и выбору путей их достижения, умением анализировать логику рассуждений и высказываний (ОК-8).

2. В области общепрофессиональных компетенций (ПК).

2.1 Способностью рассчитывать и оценивать условия и последствия принимаемых организационно-управленческих решений при организации и проведении практической деятельности в организации, на предприятии (ПК-2);
2.2 Способностью к проектной деятельности в земельно-имущественной сфере народнохозяйственного комплекса на основе системного подхода, уметь строить модели для
описания и прогнозирования использования земли и иной недвижимости, осуществлять их качественный и количественный анализы (ПК-9);
2.3 Готовностью применять методы анализа вариантов, разработки и поиска компромиссных решений (ПК-11);
2.4 Способностью получать и обрабатывать информацию из различных источников, используя самые современные информационные технологии, критически осмыслить полученную информацию, выделить в ней главное, создать на ее основе новое знание (ПК-13);
2.5 Способностью ставить задачи и выбирать методы исследования, интерпретировать и представлять результаты научных исследований (ПК-18);

В результате сбора данной дисциплины студент *должен знать:*
В результате освоения дисциплины обучающийся должен *(по каждой перечисленной компетенции):*
Знать:
- основные элементы теории статистической проверки гипотез, критерии на зависимость признаков
и однородных данных;
- векторный анализ и элементы теории поля, гармонический анализ, численные методы, функции
комплексного переменного, элементы функционального анализа;
Уметь:

- выбирать оптимальные формы организации бизнеса;
- находить новые источники повышения конкурентоспособности, пути решения проблемы
оптимизации ресурсного потенциала предприятия;
- оценить эффективность и результаты научной деятельности;

Владеть:

- математическими методами в землеустройстве и кадастрах;

Г. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 72 часа или 2 зачетных единиц.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	2		
Аудиторные занятия (всего)	36	36			
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции					
Практические занятия (ПЗ)	36	36			
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	36	36			
В том числе:	-	-	-	-	-
Индивидуальные домашние задания (со статусом курсовой работы)	12	12			
Расчетно-графические работы					
Реферат					
Другие виды самостоятельной работы	24	24			
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		Экзамен			
Общая трудоемкость час	72	72			

зач. ед.	2	2			

Темы, разделы дисциплины	Количество часов	Компетенции									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	Общее количество компетенций
Теория вероятностей и математическая статистика.	40										19
Вероятность	4	ОК			ОК				ПК		3

события. Теоремы и формулы вычисления вероятности.		-1			-8				-13		
Случайные величины.	8	ОК -1						ПК -11			2
Системы случайных величин.	8	ОК -1						ПК -11		ПК -18	3
Статистические оценки.	8				ОК -8		ПК -9	ПК -11			3
Проверка статистических гипотез.	4					ПК -2	ПК -9	ПК -11	ПК -13		4
Регрессионный и дисперсионный анализ.	8			ОК -6	ОК -8				ПК -13	ПК -18	4
Математические методы обработки результатов измерений.	32										8
Ошибки, возникающие при измерениях.	1М					ПК -2	ПК -9				2
Временные ряды и их моделирование.	1М				ОК -8		ПК -9			ПК -18	3
Основы теории принятия решений.	12		ОК -2			ПК -2			ПК -13		3
Итого	72	3	1	1	4	3	4	4	4	3	27

Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

Д.

№ п/п	Наименование обеспе-чиваемых (последую-щих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	**Информационные компьютерные технологии**	+								
2.	**Современные проблемы землеустройства и кадастров**	+	+							
3.	**Территориальное планирование и прогнозирование**				+					

4.	**Автоматизированные системы проектирования и кадастров**			+						
5.	**Мониторинг и кадастр природных ресурсов**	+								
6.	**Планирование и организация землеустроительных и кадастровых работ**			+						

Д.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	Семин	СРС	Все-го час.
1.	Комбинаторика		4				4
2.	Теория вероятностей		16				16
3.	Математическая статистика		16				16

Е. Лабораторный практикум не предусмотрены учебным планом

Ж. Практические занятия (семинары)

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
1.	Комбинатор ика	решение задач используя формул для сочетании и размешении.	4
2.	Теория вероятностей	Предмет теории вероятностей, история появления и развития данной науки. Классическое определение вероятности. Относительная частота (статистическая вероятность). Основные формулы комбинаторики в приложении к нахождению вероятностей. Зависимые, независимые, совместные и несовместные события. Полная группа событий, противоположные события. Сложение и умножение вероятностей. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Схема Бернулли, формула Бернулли. Биномиальное распределение. Наиболее вероятное число успехов. Приближенные формулы вычисления вероятностей. Локальная предельная теорема Лапласа. Формула Пуассона. Интегральная предельная теорема Лапласа. Случайные величины (дискретные и непрерывные). Законы распределения вероятностей и их основные виды. Функция распределения и плотность	16

		вероятностей. Законы равномерного и нормального распределения. Системы случайных величин.	
3.	Математическая статистика	Основные понятия, Генеральная совокупность и выборка, гистограмма, полигон частот. Оценки числовых характеристик. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Закон распределения Стьюдента. Статистические методы изучения зависимостей между случайными величинами. Корреляция и регрессия. Аппроксимация и пролонгация. Метод наименьших квадратов.	16

2. УЧЕБНИК, УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ, КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Изучая различные явления в окружающем нас мире, мы видим, что многие из них носят случайный характер - в том смысле, что по однократному наблюдению нельзя точно предсказать, как то или иное явление будет протекать при повторном наблюдении. Так, при посадке одного дерева нельзя быть уверенным, что оно приживется. Посеянное зерно может дать всходы, а может и не взойти. Если единожды метать жребий, то невозможно достоверно предсказать, что выпадет: *орел или решка!*

Однако, если повторять наблюдение много раз, то можно заметить закономерность того или иного исхода испытаний, и часто появляется возможность описать его количественно, то есть с помощью чисел. При подбрасывании монеты отношение числа выпадений *аверса* или *реверса* к общему числу метаний мало отличается от $\frac{1}{2}$; при этом, чем больше испытаний, тем ближе это отношение к половине. О результатах подобных наблюдений говорят, что они обладают *статистической устойчивостью.*

Математические модели для описания случайных событий, которые могут быть воспроизведены при неизменных условиях сколь угодно раз и которые при этом обладают свойством статистической устойчивости, изучаются в разделе математики, носящем название *теории вероятностей.*

Приступая к построению модели, обычно принимают во внимание главные, наиболее существенные особенности изучаемого явления или процесса, сбрасывая со счетов те частности, которые на данном уровне исследования представляются второстепенными. Так поступают, например, изучая сельскохозяйственные процессы, в которых действуют многочисленные факторы, взаимосвязанные между собой и скрытые от глаз наблюдателя. А при уже упомянутом метании монеты ограничиваются только двумя альтернативными исходами - скажем, возможности падения монеты на ребро или ее исчезновения вовсе не рассматриваются. Вообще, различные предположения, допущения и исключения, как правило, оговариваются особо в каждой конкретной задаче, что и будет в дальнейшем показано на примерах.

Изучив Приложение, студент должен

знать:

классическое определение вероятности;

формулу полной вероятности и формулу Байеса;

законы распределения – в частности, геометрический и биномиальный;

математическое ожидание и дисперсию,

уметь:

вычислять вероятность событий по классическому определению;

применять формулу полной вероятности и формулу Байеса;

при заданном законе распределения определять математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение,

владеть: *техникой решения вышеназванных задач*

§1.Классическое определение вероятности

Элементы комбинаторики

Воздадим должное видным математикам прошлых веков, стоявших у истоков теории вероятностей. Первую лепту внесли француз Блез Паскаль, поставивший и решивший такую задачу: «Сколько раз надо подбросить две игральные кости, чтобы вероятность выбросить две шестерки была больше половины?», голландец Гюйгенс трактатом: «О расчетах в игре в кости» (1657) и Якоб Бернулли трактатом «Искусство предположения» (1713). Их имена и поныне сохранились в названиях формул и теорем.

В те времена стимулом развития этой науки было, в основном, желание выигрывать в азартные игры. В наше время задачи такого рода, в частности, карточные, рассматриваются как учебные, традиционно служащие введением в современную теорию вероятностей.

Для понимания основ данного предмета необходимы некоторые сведения из *теории соединений.* Напомним основополагающие определения из теории соединений, называемой также *комбинаторикой.*

Пусть дано множество, состоящее из *n* элементов.

Определение 1. *Перестановкой из n элементов называется всякое расположение этих элементов в определенной последовательности,*

Отвлекаясь от предметной сути, чаще всего элементы множества обозначают натуральными числами. Например, при $n=3$: $\{1, 2, 3\}$. Из элементов этого множества можно составить шесть различных перестановок: (1,2,3); (1,3,2); (2,3,1); (2,1,3); (3,1,2); (3,2,1).

Число всех перестановок при произвольном *n* обозначают P_n. Покажем, как найти это число. Будем составлять всевозможные перестановки. Очевидно, имеется n различных вариантов выбора первого (крайнего левого) элемента. Вслед за ним на вторую позицию можно поставить любой из оставшихся $n-1$ элементов. Следовательно, первую упорядоченную пару элементов можно выбрать $n\,(n-1)$ различными способами. Третьим элементом может служить любой из оставшихся $n-2$ элементов, поэтому всего существует $n\,(n-1)(n-2)$ различных первых троек. Продолжая процесс, то есть на каждом шаге присоединяя (справа) к уже построенному набору новый элемент из числа еще не выбранных, в итоге приходим ***к*** тому, что на последнем шаге к построенному набору присоединяется единственный элемент. Таким образом, число разных перестановок из n элементов равно произведению $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ (читается *«эн-факториал»*). Приходим к формуле числа перестановок:

$$P_n = n! \ = \ 1\cdot 2\cdot 3\cdots \ (n-3)(n-2)(n-1) \ n.$$

В приведенном примере $P_3 = 3! = \ 1\cdot 2\cdot 3 \ = 6.$ Наряду с перестановками, важную роль в теории вероятностей (и в других разделах математики) играют *сочетания.* В этом понятии одновременно используются не все *n* элементов, а только k из них *(*$k \le n$*).*

Определение 2. *Всякий набор* k *элементов из n (независимо от их взаимного расположения) называется сочетанием из n по* k.

Возвращаясь к рассмотренному примеру, перечислим всевозможные сочетания из 3 по 2: (1,2); (1,3); (2,3).

Число всех различных сочетаний из *n* по *к* обозначается C_n^k Можно доказать, что оно определяется формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В частности, $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3.$

События и их классификация

Прежде всего, остановимся на некоторых важных первичных понятиях теории вероятностей .

Испытание — это осуществление определенного комплекса условий, при которых производится наблюдение. Будем предполагать, что испытание может быть воспроизведено сколь угодное число раз. Испытаниями являются метание монеты, стрельба по мишени, бросание игральной кости.

Результат, или исход, испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение орла или решки, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: *A, B, C*..

Два события называются *совместными,* при данном испытании, если появление одного из них не исключает появление другого, и несовместными, если появление одного из них исключает появление другого. Например, при однократном бросании игральной кости. выпадение четырех очков (событие

A) и выпадение четного числа очков(событие *B)* – совместимые события, а выпадение пяти очков (событие *C)* и число очков, кратного трем (событие *D)* – несовместные.

Два несовместных события, исчерпывающие все множество возможных событий, называются *противоположными (*обозначения A и $\overline{A}$). При однократном бросании монеты если A – выпадение орла, то $\overline{A}$ – выпадение решки.

Событие называется достоверным, если при данном испытании оно происходит наверняка, и невозможным, если в этих условиях оно заведомо не может произойти. Заметим, что достоверное и невозможное события являются противоположными.

Термин *случайное* применяют к событию, которое при данном испытании может либо произойти, либо не произойти.

Суммой двух событий *A и B* называется событие *C*, состоящее в появлении хотя бы одного из них; записывают $C = A + B$. Например, покупатель покупает молоко – событие *A*, покупатель покупает кефир – событие *B*, покупатель выходит из магазина не с пустыми руками событие $C = A + B$.

Произведением двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном наступлении обоих событий; Например, пассажир доезжает до вокзала – событие *A*, поезд с пассажиром отправляется в путь – событие *B*. Тогда событие *C* – пассажир благополучно отбывает – есть произведение*:* *C=AB.*

Классическое определение вероятности

Наблюдая или изучая какие-нибудь два или несколько событий, мы замечаем, что одни из них более, а другие менее возможны, то есть каждое событие обладает той или иной мерой возможности. Число, выражающее меру возможности некоторого события при данном испытании называется *вероятностью этого события.* Поясним на примере

Пример 1.

В ящике перемешано 25 шаров, из них 10 белых, 7 красных, 4 зеленых, 4 голубых. Испытание состоит в том, что наудачу вынимается один шар. При этом возможны следующие события: вынутый шар – белый *(A),* красный *(B),* зеленый*(C),*голубой *(D).* Числа 10/25, 7/25, 4/25 и 4/25 характеризуют меру возможности соответствующих событий. Общий подход к оценке меры возможности такого рода событий выражает следующее

Определение 3. Вероятностью *P(A*) события *A* при данном испытании *называется отношение числа m исходов, благоприятных для A, к числу n всевозможных исходов:*

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Таким образом, вероятность – это некоторая *числовая функция* случайного события.

Пример 2.

Найти вероятность наибольшего выигрыша на один билет при игре в спортлото, если для этого необходимо угадать 5 «счастливых» чисел из 36.

Решение.

Имеется единственный благоприятный исход, при котором угаданы все 5 чисел, то есть $m=1$. Число всевозможных различных исходов равно числу сочетаний из 36 чисел по 5: $n=C_{36}^{5}$. Находим:

$$P\left(A\right)=\frac{1}{C_{36}^{5}}=\frac{5!\cdot 31!}{36!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}=\frac{1}{376922}<0,000003.$$

Пример 3.

Из колоды, в которой 52 карты, последовательно выбираются наугад 3 карты. Какова вероятность, что это будет (в указанном порядке): *А) тройка, семерка, туз? В) тройка, семерка, пиковая дома?*

Решение. а) Число n всевозможных исходов, то есть различных троек выпавших карт с учетом их последовательного расположения, равно:

$$n=C_{52}^{3}3!=\frac{52!\cdot 3!}{49!\cdot 3!}=50\cdot 51\cdot 52=132600.$$

Число благоприятных исходов получится, если пересчитать «счастливые» тройки: $m=64$. По формуле получаем:

$$P(A)=\frac{64}{132600}\approx 0,0004.$$

b) Рассуждая аналогично, находим вероятность выпадения «несчастливой» тройки карт:

$$P(B)=\frac{16}{132600}=\approx 0,0001.$$

Таким образом, «счастливая» комбинация карт, обещанная Германну в повести Пушкина «Пиковая дама» старухой, могла выпасть с фантастически малой вероятностью, но, как известно, выпала «несчастливая» комбинация с вероятностью еще в 4 раза меньшей! От такого и впрямь можно лишиться рассудка.

Пример 4.

Дети, еще не знающие алфавита, играют в «паровозики», выстраивая наугад один за другим кубики, на которых написаны буквы: у одного ребенка М,А,Т,Е,М,А,Т,И,К,А, а у другого Ф,И,З,И,К,А. Какова вероятность того, что в результате у первого получится слово МАТЕМАТИКА, а у второго ФИЗИКА?

Решение. Вероятности $P(A)$ и $P(B)$, соответственно, следующие:

$$P(A)=\frac{P_2\cdot P_2\cdot P_3}{P_{10}}=\frac{2\cdot 2\cdot 6}{10!}=\frac{1}{151200};\qquad P(B)=\frac{P_2}{P_6}=\frac{2}{6!}=\frac{1}{160}.$$

Этот результат можно истолковать и так, что вероятность стать математиком почти в тысячу раз меньше, чем стать физиком!

Перечислим некоторые очевидные свойства вероятностей.

1. *Так как* $0 \le m \le n$, *то* $0 \le P(A) \le 1$.
2. *Если A – событие невозможное, то* $P(A) = 0$.
3. *Если B – событие достоверное, то* $P(B) = 1$.
4. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Если вероятность события *A* зависит от того, произошло событие *B* или нет, то говорят об *условной вероятности* события *A* и обозначают ее $P(A/B)$. В противном случае говорят, что *A* независимо от *B*.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

По аналогии с суммами и произведениями функций, изучаемых в математическом анализе, рассматриваются суммы и произведения вероятностей. На свойствах этих операций сказывается специфика «аргументов», роль которых здесь играют случайные события.

Теорема 1 (сложения). *Вероятность суммы событий (то есть вероятность наступления хотя бы одного из них) в случае их несовместности равна сумме их вероятностей:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае вероятность суммы двух событий равна сумме их вероятностей минус вероятность их произведения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Приведем геометрическую иллюстрацию этой теоремы, воспринимая произведения *AB* как пересечение множеств $A \cap B$ (рис.1)

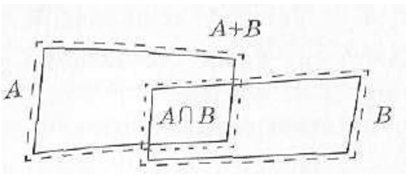

Рис. 1

Теорема 2 (умножения). *Вероятность произведения двух событий (то есть вероятность совместного наступления событий A и B) в случае независимых событий равна произведению их вероятностей.*

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

В общем случае вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B).$$

Пример 5.

Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны, соответственно, $P(A) = 0{,}7$ и $P(B) = 0{,}8$. производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в цель.

Решение. Поскольку промах есть событие противоположенное попаданию в мишень, то, по четвертому свойству, вероятность промаха для этих стрелков равны, соответственно, $P(\bar{A})=0{,}3$ *и* $P(\bar{B})=0{,}2$. По теореме 2, вероятность промаха обоих стрелков равна произведению $P(\bar{A})P(\bar{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06$. Поэтому вероятность противоположного события (хотя бы одного попадания в цель) по тому же свойству вероятностей равна разности: 1 – 0.06 = 0.94.

Пример 6.

В урне 2 белых и 3 красных шара. Вынимаем один за другим 2 шара. Найти вероятность того, что оба они белые.

Решение. Событие A – вынимание первого белого шара, событие B – вынимание второго белого шара, событие B/A – вынимание второго белого шара при условии, что первый шар белый, событие AB – вынимание двух белых шаров подряд. По теореме умножения имеем:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

Сделаем проверку по формуле классической вероятности. Поскольку число благоприятных исходов m = 1, а число всевозможных исходов n = 10, то получаем: $P(AB) = \dfrac{1}{10}$.

Формула полной вероятности события.

Формулу, объединяющую теоремы сложения и умножения, устанавливает

Теорема 3 (полной вероятности). *Вероятность события A, которое может произойти при условии осуществления одного из несовместных событий B_1, B_2, B_3, ... , B_n, образующих полную группу (то есть исчерпывающих все возможные события) определяется формулой*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i).$$

Проиллюстрируем эту формулу примером.

Пример 7.

Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из двух пунктов, причем из первого пункта в два раза больше, чем из второго. Вероятность события, что удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту, равна

$\frac{9}{10}$, а соответствующая вероятность для второго пункта равна $\frac{8}{10}$. Определить вероятность события A = {взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту}.

Решение. Обозначим:

событие B_1 = {удобрение поступило из первого пункта};

событие B_2 = {удобрение поступило из второго пункта}.

событие $P(A/B_1)$ = {удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту}

событие $P(A/B_2)$ = {удобрение из первого пункта удовлетворяет стандарту}

Находим:

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\quad P(B_2)=\frac{1}{3},\quad P(A/B_1)=\frac{9}{10},\quad P(A/B_2)=\frac{8}{10};$$

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{15}\cong 0{,}87.$$

Событие A имеет большую вероятность, оно практически достоверно, так как оно наступает в среднем в 87 случаях из 100.

Формула Байеса.

Рассмотрим практическую задачу.

Пример 8.

На двух фермах скотоводческого хозяйства произошла вспышка заболевания ящуром. На первой ферме доля заражения скота равна $\frac{1}{8}$ и на второй $\frac{1}{6}$. Животное, выбранное на одной из этих ферм, оказалось заболевшим. Найти вероятность того, зараженное животное было из первой фермы.

Решение. Введем обозначения. Животное выбирается из первой фермы – событие B_1, а из второй фермы – событие B_2.

Вероятности этих равновозможных событий: $P(B_1)= P(B_2)= \frac{1}{2}$. Животное заражено, это событие A. То, что животное, отобранное на первое ферме, заражено – событие A/B_1, а то, что животное, отобранное на второе ферме, заражено – событие A/B_2.

Тогда вероятность, того, что животное выбрано на первое ферме и заражено, выразится следующем образом:

$P(B_1)\cdot P(A/B_1)$. Но $P(B_1)\cdot P(A/B_1) = P(A)\cdot P(B_1/A)$. Поэтому получаем:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)}{P\left(A\right)}.$$

А поскольку по формуле полной вероятности:

$$P\left(A\right)=P(B_1)P(A/B_1)\ +\ P\left(B_2\right)P\left(A/B_2\right),$$

То окончательно получаем:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{P\left(B_1\right)\cdot P\left(A/B_1\right)}{P(B_1)P(A/B_1)\ +\ P\left(B_2\right)P\left(A/B_2\right)}.$$

Это формула носит название формулы *Байеса*.

Она позволяет вычислить вероятность событие B_1 (или B_2)в случае, когда событие A произошло, то есть переоценить вероятность.

Возвращаясь к нашей конкретной задаче, находим:

$$P\left(B_1/A\right)=\frac{1/2\cdot 1/8}{1/2\cdot 1/8+1/2\cdot 1/6}=\frac{3}{7}.$$

Рассмотрим ещё один пример, на этот раз из жизни человеческого сообщества.

Пример 9.

Большая популяция людей разбита на две группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний составило в этих группах 29% и 46%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

Р е ш е н и е . Обозначим:

событие B_1 = {человек придерживался специальной диеты};

событие B_2 = {человек принадлежал к контрольной группе};

событие A/B_1 = {человек заболел при условии, что он придерживался специальной диеты};

событие A/B_2 = {человек заболел при условии, что он принадлежал к контрольной группе};

событие A = {случайно отобранный человек заболел}.

Тогда, используя формулу полной вероятности, получим

$$P\left(A\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\{A/B_1)\ +\ P\left(B_2\right)\cdot P\left(A/B_2\right)\ =$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 0.29+\frac{1}{2}\cdot 0.46=0.375.$$

Вероятность того, что человек, имеющий заболевание, принадлежит к контрольной группе, определим по формуле Байеса. Имеем

$$P\left(B_2/A\right)=\frac{P\left(B_2\right)\cdot P\left(A/B_2\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0.5\cdot 0.46}{0.375}=0.61.$$

§2.Законы распределения

Теория вероятностей занимается не только случайными событиями и их вероятностями. Часто важно знать не вероятность случайного исхода, а связанные с ним «выигрыши или проигрыши», то есть оценивать определенную числовую величину, соответствующую этому исходу. Она называется *случайной величиной*. Если множество ее возможных значений образует конечную или бесконечную последовательность, то она называется *дискретной* случайной величиной. Дискретную случайную величину будем обозначать X, а ее конкретные значения x_1, x_2,…; соответствующие вероятности обозначим: $p(x_1) = p_1, p(x_2) = p_2$,…

Например, если испытание состоит в трехкратном выбрасывании монеты, то орёл может выпасть 0, 1, 2 или 3 раза. Поэтому имеем: $x_1= 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вероятности соответствующих исходов: $p_1 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = \frac{3}{8}$, $p_4 = \frac{1}{8}$ (сумма равна единице).

Закон распределения случайной величины – это правило, которое записывается в виде таблицы.

В первом примере:

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(мы предположили, что статистическая вероятность угона равна 1/100)

В общем случае закон распределения дискретной случайной величины имеет следующий вид:

X	x_1	x_2	…….	x_n
p	p_1	p_2	…….	p_n

Здесь $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Существуют различные законы распределения, они зависят от характера производимых испытаний. В качестве примеров, рассмотрим «геометрическое» и «биномиальное» распределения.

Геометрическое распределение

Как модель задач, приводящих к *геометрическому* распределению, рассмотрим случай, когда в качестве испытания берется попадание мячом в баскетбольную корзину со статистической вероятностью p, при этом вероятность промаха будет: $q = 1 – p$. Случайная величина – это число бросков X до первого попадания. Имеем следующие значения вероятностей:
$p(x = 1) = p, p(x=2) = qp, p(x=3) = qqp= q^2p,\ldots, p(x=n) = q^{(n-1)}\ p.$

Если полагать процесс бесконечным, то имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p(1+q+q^2 + \ldots + q^{(n-1)} + \ldots) = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

Мы применили формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (гл.4), а в конце учли, что $1 - q = p$.

Биномиальное распределение

Как модель задач, приводящих к *биномиальному* распределению, рассмотрим извлечение белого шара (*с возвращением!*) из корзины с белыми и черными шарами (*схема повторной выборки Бернулли*). Пусть, аналогично предыдущему, вероятность вынуть красный шар равна p, тогда вероятность вынуть черный шар равна: $q = 1 - p$. Опыт повторяется n раз. Обозначим через X число красных шаров, которое последовательно вынимается (с возвращением) при n испытаниях. Найдем соответствующие вероятности. Имеем:

$$p\,(x=0) = q^n,\ p\,(x=1) = n\,pq^{(n-1)},\ p\,(x=2) = n\,\frac{(n-1)}{2}\,p^2q^{(n-1)}, \ldots, p(x=n) = p^n\,.$$

Заметим, что при разложении бинома Ньютона

$$(\mathrm{p} + \mathrm{q})^{\mathrm{n}}$$

в многочлен (гл.4) как раз и получается сумма всех этих вероятностей. С другой стороны, поскольку $p + q = 1$, то эта сумма равна 1.

§3.Математическое ожидание. Дисперсия

Имея закон распределения случайной величины, задаются целью выразить ее свойства более гармонично и просто. Для этого нужно иметь какие-нибудь числовые характеристики случайной величины. Существуют две главные числовые характеристики. Одна из них характеризует так называемое «центральное значение» случайной величины, другая показывает разброс, рассеяние случайной величины, ее отклонение от центрального значения. Первая называется «математическим ожиданием»,
вторая «дисперсией» (dispersion – рассеяние, лат.).

Математическое ожидание определяется формулой:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_kp_k = \sum_{i=1}^{k} x_ip_i.$$

Пусть проводится N независимых испытаний. Значения переменной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{n}}$ встречаются при этом соответствующее число раз: : $m_1, m_2, \ldots, m_{\mathrm{n}}$, так что ($m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mathrm{n}} = N$). Найдем среднее арифметическое значение:

$$\frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \ldots + x_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}}{N} = \frac{x_1m_1}{N} + \frac{x_2m_2}{N} + \ldots + \frac{x_{\mathrm{n}}m_{\mathrm{n}}}{N}.$$

По формуле классической вероятности:

$$\frac{m_1}{N} = p_1,\ \frac{m_2}{N} = p_2, \ldots, \frac{m_{\mathrm{n}}}{N} = p_n\,.$$

Отсюда следует, что математическое ожидание равно среднему значению случайной величины, оно является «центром рассеивания» случайной величины.

Пример. Проводится денежная лотерея, в которой из 100 билетов 15 выигрышные: на 10 билетов приходится выигрыш в 50 рублей, на 4 билета по 200 рублей и на 1 билет падает выигрыш в 500 рублей. Каково математическое ожидание выигрыша на один билет?

Решение. Пусть X- размер выигрыша. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 50$, $x_3 = 200$, $x_4 = 500$. Соответствующие вероятности, вычисленные по классической формуле, будут: $p_1 = \frac{85}{100}$, $p_2 = \frac{10}{100}$, $p_3 = \frac{4}{100}$, $p_4 = \frac{1}{100}$. Закон распределения в этом примере имеет вид

X	0	50	200	500
p	$\frac{85}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$

Подсчет показывает, что математическое ожидание выигрыша равно 18 рублям. Это число является ориентиром для продажной цены за один билет.

Дисперсией $D(X)$ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Пусть $M(X) = \bar{x}$. Тогда $D(X) = M\,[(X - \bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\, p_i$.

Заметим, что математическое ожидание разности ($X - \bar{x}$) (без квадрата!) равно нулю.

В вышеприведенной задаче с лотереей дисперсия оказывается примерно равна 4000 «квадратных» рублей.

Квадратный корень из дисперсии выражает среднеквадратичное отклонение случайной величины от центра рассеивания.

Элементы математической статистики

Математическая статистика используется в различных областях знаний, в том числе в экономике сельского хозяйства, опытном деле, земледелии, животноводстве, лесном хозяйстве и т. д., т. е. там, где для изучения процессов и явлений недостаточно только качественной характеристики. Чтобы глубоко познать сущность процессов, необходимы количественные характеристики в виде измерений, наблюдений с их последующим анализом, обобщением и выводами. Изучению способов сбора результатов наблюдений и их обработки отводится настоящая глава.

§ 13-1- Предмет и задачи математической статистики

Генеральная и выборочная совокупность. Выборочный метод

Определение *Математическая статистика — это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.*

Результаты измерений (наблюдений) называют *статистическими данными.* В зависимости от поставленной цели все задачи математической статистики могут быть сформулированы в различных формах, среди которых типичными являются: 1) приближенное определение неизвестного закона распределения случайной величины; 2) приближенное определение неизвестных параметров распределения, т. е. их статистические оценки; 3) проверка правдоподобия гипотез о распределении.

Одним из основных способов сбора статистических данных является выборочный метод.

Определение *Вся исследуемая совокупность однородных объектов называется генеральной совокупностью.*

Определение • *Множество из n объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется выборочной совокупностью или выборкой (n — объем выборки).*

Необходимость исследования статистического материала с помощью выборки объясняется тем, что: 1) исследование всей генеральной совокупности трудоемко и приводит к большим затратам средств и времени или практически неосуществимое; 2) в ряде случаев исследование всех объектов генеральной совокупности привело бы к их порче, например исследование всех электролампочек на продолжительность горения, исследование на всхожесть всего семенного материала.

Определение ■ *Метод, основанный на том, что по данным обследования выборки, выделенной из данной генеральной совокупности, делается заключение о всей генеральной совокупности, называется выборочным методом.*

Выборка называется *репрезентативной,* если каждый объект генеральной совокупности имеет одинаковую возможность попасть в выборку.

Различают два основных способа составления выборки: *повторный* и *бесповторный.* При повторном способе каждый отобранный объект возвращается в генеральную совокупность, после чего выбирают следующий, очередной объект.

При бесповоротном способе объекты в генеральную совокупность не возвращаются.

§ 13-3- Статистическое распределение. Геометрическое изображение

Возьмем выборочную совокупность объема *n.* Если генеральная совокупность имеет небольшой объем, то в некоторых случаях можно в выборку включить все ее члены. Количественное значение признака, наблюдаемое при отборе, — это случайная величина, ее возможные значения обозначают символами $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, а числа n_i объектов с одинаковым количественным признаком называют частотами и обозначают $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$. Изучение выборки начинают с составления статистического распределения — таблицы с двумя строками. В одной строк* указывают значения признака, в другой — соответствующие ит частоты.

Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2— n_2 раз, n_k — пи раз и $n_1+ n_2+ n_3, ...,+n_k = n$ — объем выборки. Наблюдаемые $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$, называются вариантами, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, — вариационным рядом. Числа наблюдений $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ называются частотами, а их отношения к объему выборки $\frac{n_1}{n} p_1^*, \frac{n_2}{n} p_2^*, \ldots, \frac{n_k}{n} p_k^*$ относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал. Для графического изображения статистического распределения используются полигоны и гистограммы.

Для построения полигона на оси Ох откладывают значения вариант x_i , на оси О у — значения частот n_i { (относительных частот p_i^*).

Пример 1. На рисунке изображен полигон следующего распределения:

Варианта x_i	1	2	3	5
Относительная частота p_i^*	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигоном обычно пользуются в случае небольшого количества вариант. В случае большого количества вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i - сумму частот вариант, попавших в i интервал. Затем на этих интервалах, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{n_i}{nh}$ где n – объем выборки). Площадь i частичного прямоугольника равна $\frac{hn_i}{h} = n_i$ (или $\frac{hn_i}{nh} = \frac{n_i}{n} = p_i^*$)

Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), т. е. объему выборки (или единице).

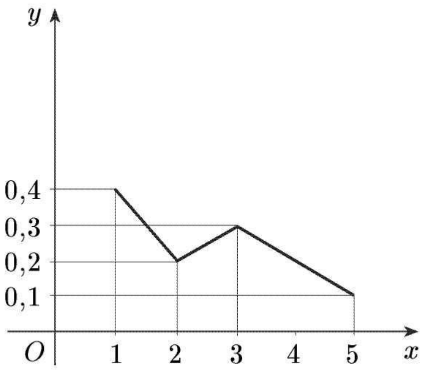

Рис. 123

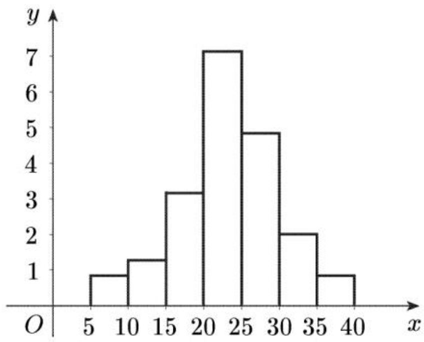

Рис. 124

Пример 2. На рисунке 124 изображена гистограмма непрерывного распределения объема n = 100, приведенного в следующей таблице:

Частичный интервал h	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	$\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0

35-40	4	0,8

Статистическим распределением случайной величины называют таблицу значений признака, расположенных в возрастающем порядке, и соответствующих им частот или относительных частот.

Выборочные характеристики статистического распределения

Пусть имеется выборка объема n со значениями признака $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$. Построим статистическое распределение:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	....	n_k

Для того чтобы охарактеризовать наиболее существенные свойства этого распределения, так же как и в теории вероятностей, используют средние показатели или, как их называют, *выборочные числовые характеристики.* Рассмотрим некоторые из них.

1. Выборочная средняя $\bar{X}_B$. При наличии повторяющихся значений признака

$$\bar{X}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad (13.5.1)$$

где n — объем выборки, x_i и n_i взяты из таблицы выше. Выборочная средняя $\bar{X}_B$ изменяется при переходе от одной выборки к другой, поэтому в силу случайного отбора является случайной величиной.

Для упрощения вычисления выборочных характеристик удобно перейти от данных значений признака $x_1, x_2, x_3, ..., x_k$ к условным значениям $u_1, u_2, u_3, ..., u_k$ по формуле

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}, \qquad (13.5.2)$$

т. е. ввести вспомогательную величину $U = (X - C)/h$, где C — новое начало отсчета, обычно это значение признака с наибольшей частотой, h — масштаб.

Можно показать, что при переходе к условным значениям признака по формуле (13.5.2) зависимость, связывающая $\bar{X}_B$ и $\bar{U}_B$, имеет вид

$$\bar{X}_B = \bar{U}_B h + C. \qquad (13.5.3)$$

ПРИМЕР • Дано статистическое распределение:

x_i	1	3	5	7	9	11
n_i	2	8	15	14	7	4

Найти $\bar{X}_B$.

Р е ш е н и - Перейдем к условным значениям признака, приняв за C значение с наибольшей частотой, т. е. $C = 5$. Далее находим $h = x_i - x_{i-1} = 2$. Имеем

$$u_i = \frac{x_i - 5}{2}$$

Составляем распределение условных значений признака:

Таблица 13,6

u_i	-2	-1	0	1	2	3
n_i	2	8	15	14	7	4

Находим

$$\overline{X}_B = 0{,}56 * 2 + 5 = 6{,}12.$$

Особенно выгодно применять формулу (13.5.2), если значения признака велики.

2. Выборочная и исправленная дисперсия. Одна числовая характеристика $X_в$ не дает полного представления о статистическом распределении. В агрономической и зоотехнической практике, как и в других сферах производства, при анализе результатов существенной для выводов является характеристика рассеяния значений признака относительно выборочной средней. Отклонение отдельных значений от выборочной средней бывает значительным, и с этим нельзя не считаться.

Выборочной дисперсией называется среднее арифметическое значение квадратов отклонений признака от выборочной средней.

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X}_B)^2 n_i.$$

Пример: Урожайность двух сортов *A и B* пшеницы, возделываемых на трех участках с одинаковыми условиями роста и развития, характеризуется следующими таблицами:

Сорт *A*

X, ц	18	19	20
Площадь, га	15	25	15

Сорт *B*

X, ц	17	19	22
Площадь, га	20	20	$\frac{40}{3}$

Р е ш е н и е - Вычислим $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, D_x, D_y . Находим

$$\overline{X}_B = \frac{18\cdot 5 + 19\cdot 25 + 20\cdot 15}{55} = \frac{1045}{55} = 19, \qquad \overline{Y}_B = \frac{3040}{160} = 19,$$

$$D_x = \frac{(18-19)^2 15 + (19-19)^2 25 + (20-19)^2 15}{55} = \frac{30}{55} = 0{,}545, \quad D_y = \frac{600}{160} = 3{,}75.$$

Как видим, дисперсия D_y как мера рассеяния или разброса урожайности сорта B относительно среднего значения $\bar{Y}_B$ в случае примерно одинаковых площадей больше, чем D_x, а это явление нежелательное. Из двух сортов лучшим является тот, урожайность которого более устойчива. По данным опыта сорт A предпочтительнее сорта B.

Для вычисления выборочной дисперсии используют следующую формулу:

Выборочная дисперсия имеет систематическую ошибку, приводящую к уменьшению дисперсии. Чтобы это устранить, вводят поправку, умножая D_B на $n/(n-1)$. В результате получают исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{X}_B)^2 n_i. \qquad (13.5.6)$$

При малых выборках S ощутимо отличается от D_B, например, при $n = 2$ имеем $S^2 = 2D_B$. С возрастанием n исправленная дисперсия $S^2 \to D_B$. Уже при $n = 30$ дисперсии S^2 и D_B различаются на 3%.

3, **Выборочное среднее квадратическое отклонение.**

Арифметическое значение квадратного корня из выборочной дисперсии называется выборочным средним квадратическим отклонением:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \qquad (13.5.9)$$

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_B. \qquad (13.5.10)$$

Средняя квадратическая ошибка выборочной средней $\sigma(X_B)$ *в* $\sqrt{n}$ *раз меньше среднего квадратического отклонения, случайной величины X, возможные значения которой попали в выборочную совокупность.*

$$\sigma(X_B) = \sqrt{D(X_B)} = \sqrt{\frac{D(X)}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

§ 13-Ь- Статистические оценки параметров распределения

Оценки математического ожидания и дисперсии. С понятием параметров распределения мы познакомились в теории вероятностей..

Определение *Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выборки* (x_1, x_2, x_3, ..., x_k; n_1, n_2, n_3, ..., n_k), *т. е. некоторую функцию этих величин.*

Статистическая оценка является случайной величиной.

Обозначим через θ — оцениваемый параметр, а через θ^* — его статистическую оценку. Величину $|\theta^* - \theta|$ называют *точностью оценки.* Чем меньше $|\theta^* - \theta|$, тем лучше, точнее определен неизвестный параметр.

Чтобы оценка θ^* имела практическое значение, она не должна содержать систематической ошибки и вместе с тем иметь возможно меньшую дисперсию. Кроме того, при увеличении объема выборки вероятность сколь угодно малых отклонений $|\theta^* - \theta|$должна быть близка к 1.

Определение *Оценка параметра называется несмещенной, если ее математическое ожидание* $M(\theta^*)$ *равно оцениваемому параметру* θ, *т. е.*

$$M(\theta^*) = \theta, \qquad (13.6.1)$$

и смещенной, если

$$M(\theta^*) \neq \theta, \qquad \mathbf{(13.6.2)}$$

Определение - *Оценка θ^* называется состоятельной, если при любом δ > 0*

$$\lim_{x\to\infty} P(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta) = 1. \qquad (13.6.3)$$

Равенство (13.6.3) читается так: оценка θ^* сходится по вероятности к θ.

Определение • *Оценка θ^* называется эффективной, если при заданном n она имеет наименьшую дисперсию.*

Т Е О Р Е М А 1 . *Выборочная средняя $X_в$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.*

В качестве оценки дисперсии изучаемого признака в генеральной совокупности *D(X)* принимается исправленная дисперсия.

Т Е О Р Е И А 2 *Исправленная выборочная дисперсия* $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$ *является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии D(X).*

3. ФОНДЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

А. Словарь (глоссарий) основных терминов и понятий (включая индекс)

- **Вероятность —** степень (мера, количественная оценка) возможности наступления некоторого события.
- **Вероятностное простра́нство —** понятие, введённое А. Н. Колмогоровым в 30-х годах XX века для формализации понятия вероятности, которое дало начало бурному развитию теории вероятностей как строгой математической дисциплины..
- **Элементарные события (элементы Ω), по определению**, **—** это исходы случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один.
- **Случайная величина —** это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.
- **Теорема** Муавра — Лапласа — одна из предельных теорем теории вероятностей, установлена Лапласом в 1812 году. Если при каждом из n независимых испытаний вероятность появления некоторого случайного события E равна p (0<p<1) и m — число испытаний, в которых E фактически наступает, то вероятность неравенства близка (при больших n) к значению интеграла Лапласа.
- **Функция распределения в теории вероятностей —** функция, характеризующая распределение случайной величины или случайного вектора. При соблюдении известных условий (см. ниже) полностью определяет случайную величину.
- **Математическое ожидание —** среднее значение случайной величины, распределение вероятностей случайной величины рассматривается в теории вероятностей.[1] В англоязычной литературе обозначается через $\mathbb{E}[X]$[2] (например, от англ. Expected value или нем. Erwartungswert), в русской — $M[X]$

[источник не указан 265 дней](возможно, от англ. Mean value или нем. Mittelwert, а возможно от рус. Математическое ожидание). В статистике часто используют обозначение μ

- **Дисперсия случайной величины́** — мера разброса данной случайной величины, то есть её отклонения от математического ожидания. Обозначается $D[X]$ в русской литературе и $\mathrm{Var}(X)$ (англ. variance) в зарубежной. В статистике часто употребляется обозначение σ_X^2 или σ^2. Квадратный корень из дисперсии, равный σ, называется среднеквадратичным отклонением, стандартным или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и сама случайная величина, а дисперсия измеряется в квадратах этой единицы измерения.
- **Среднеквадратическое отклонение** (синонимы: среднеквадратичное отклонение, квадратичное отклонение; близкие термины: стандартное отклонение ,стандартный разброс) — в теории вероятностей и статистике наиболее распространённый показатель рассеивания значений случайной величины относительно её математического ожидания.
- В теории вероятностей два случайных события называются **независимыми**, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. Аналогично, две случайные величины называют зависимыми, если значение одной из них влияет на вероятность значений другой
- **Условная вероятность** — вероятность одного события при условии, что другое событие уже

Б. Методические указания для преподавателя, студента, слушателя

- Промежуточные контрольные мероприятия:
- Семестр N1. Коллоквиум комбинаторики и теории вероятностей.
- Семестр N1. Индивидуальные домашние задания N1.
- Семестр N1. Контрольная работа N1. комбинаторика и теории вероятностей.
- Семестр N1. Контрольная работа N2. Математическая статистика
- Семестр N1. Коллоквиум по статистике.
- Семестр N1. Индивидуальные домашние задания N2.

В. Сборник задач и упражнений.

Часть I. Задачи по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов.

1. Отдел технического контроля получил партию из 1000 деталей. Вероятность того, что взятая наугад деталь окажется дефектной, равна 0,001. Найти вероятность того, что в партии дефектны: а) хотя бы одна деталь; б) две детали; в) более двух деталей.

2. На экзамене предлагаются задачи по трем темам: по первой теме – 15 задач; по второй теме – 20 задач; по третьей теме – 25 задач. Вероятность того, что студент сможет решить задачу по первой теме равна 0,7; по второй – 0,9; по третьей – 0,3. Студент справился с задачей. Какова вероятность того, что ему попалась задача по первой теме?

3. В каждой из двух урн содержится восемь черных и два белых шара. Из второй урны наудачу переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый из первой урны шар окажется черным.

4. Электронное устройство состоит из четырех элементов работающих независимо. Вероятность безотказной работы в течение месяца соответственно равны 0,6 для первого элемента; 0,8 для второго; 0,7 для третьего и 0,9 для четвертого. Найти вероятность того, что в течение месяца будут безотказно работать: а) все четыре элемента; б) только один элемент; в) не менее двух элементов.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при ста выстрелах мишень будет поражена 90 раз.

6. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле только из первого орудия равна 0,7; из второго – 0,6; из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: 1) хотя бы один снаряд попадет в цель; 2) только два снаряда попадут в цель; 3) все три снаряда попадут в цель.

7. Монету бросают шесть раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет: а) три раза; б) менее трех раз; в) не менее трех раз.

8. Прибор состоит из двух узлов. Если отказывает хотя бы один узел прибор не функционирует. Вероятность безотказной работы в течение дня равны соответственно для первого узла 0,9, а для второго 0,8. В течение дня прибор отказал. Найти вероятность того, что отказал первый узел, а второй исправен. Отказы узлов происходят независимо.

9. На вычислительный центр поставлены дисплеи двух производителей: 30% - от первого, а остальные – от второго поставщика. Вероятность наличия скрытого дефекта дисплея от первого поставщика равна 0,05, а от второго 0,01. Какова вероятность того, что случайно выбранный дисплей имеет скрытый дефект?

10. Какова вероятность того, что при 100 бросаниях монеты “цифра” выпадет: а) хотя бы один раз; б) не менее 45 и не более 55 раз?

11-20. Задана непрерывная случайная величина X функцией распределения F(x). Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей f(x) ; 2) схематично построить графики функций f(x) и F(x); 3) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X; 4) найти вероятность того, что X примет значение из интервала ($\alpha;\beta$).

11. $F(x)=\begin{cases} 0, \quad x \le 0, & \alpha=-\infty, \\ \sin 2x, \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, & \beta=\dfrac{\pi}{8}, \\ 1, \quad x>\dfrac{\pi}{4}. & \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, \quad x \le 0, & \alpha=2, \\ \dfrac{x^2}{16}, \quad 0<x\le 4, & \beta=4, \\ 1, \quad x>4. & \end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \cos 3x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{2\pi}{3},\\ 1, & x>\dfrac{2\pi}{3}.\end{cases}$ $\quad\alpha=\dfrac{\pi}{2},\quad \beta=\infty,$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^3}{8}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $\quad\alpha=0,\quad \beta=1,$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{3\pi}{2},\\ 2\cos x, & \dfrac{3\pi}{2}<x\le\dfrac{5\pi}{3},\\ 1, & x>\dfrac{5\pi}{3}.\end{cases}$ $\quad\alpha=-\infty,\quad \beta=\dfrac{5\pi}{3},$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^{3/2}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $\quad\alpha=\dfrac{1}{4},\quad \beta=1,$

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sqrt{2}\sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$ $\quad\alpha=\dfrac{\pi}{6},\quad \beta=\dfrac{\pi}{4},$

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $\quad\alpha=\dfrac{3}{2},\quad \beta=\infty,$

19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\quad\alpha=\dfrac{\pi}{3},\quad \beta=\dfrac{\pi}{2},$

20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $\quad\alpha=1,\quad \beta=3,$

21-30. Заданы математическое ожидание ***a*** и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Написать плотность распределения вероятностей и схематично построить ее график. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$. Определить приближенно максимальное и минимальное значения случайной величины X, следуя правилу "трех сигм". Найти вероятность того, что X примет значение, превышающее β; найти интервал, симметричный относительно математического ожидания ***a***, в котором с вероятностью γ будут заключены значения случайной величины X.

21. $a=15,\quad \sigma=2,\quad \alpha=9,\quad \beta=19,\quad \gamma=0{,}99.$

22. $a=14,\quad \sigma=4,\quad \alpha=10,\quad \beta=22,\quad \gamma=0{,}98.$

23. $a=13,\quad \sigma=3,\quad \alpha=11,\quad \beta=19,\quad \gamma=0{,}96.$

24. $a=12,\quad \sigma=5,\quad \alpha=11,\quad \beta=22,\quad \gamma=0{,}94.$

25. $a=11,\quad \sigma=2,\quad \alpha=10,\quad \beta=17,\quad \gamma=0{,}92.$

26. $a=10,\quad \sigma=4,\quad \alpha=6,\quad \beta=18,\quad \gamma=0{,}90.$

27. $a=9,\quad \sigma=3,\quad \alpha=8,\quad \beta=18,\quad \gamma=0{,}88.$

28. $a=8,\quad \sigma=4,\quad \alpha=6,\quad \beta=12,\quad \gamma=0{,}86.$

29. $a=7,\quad \sigma=3,\quad \alpha=6,\quad \beta=10,\quad \gamma=0{,}84.$

30. $a=6,\quad \sigma=2,\quad \alpha=4,\quad \beta=12,\quad \gamma=0{,}82.$

31-40. Заданы среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X, выборочная средняя $\bar{x}_B$ и объем выборки n. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания ***a*** с доверительной вероятностью γ=0,95.

31. $\bar{x}_B=25{,}12,\quad n=100,\quad \sigma=5.$

32. $\bar{x}_B=25{,}22,\quad n=81,\quad \sigma=6.$

33. $\bar{x}_B=25{,}32,\quad n=49,\quad \sigma=7.$

34. $\bar{x}_B=25{,}42,\quad n=36,\quad \sigma=8.$

35. $\bar{x}_B=25{,}52,\quad n=225,\quad \sigma=9.$

36. $\bar{x}_B=25{,}62,\quad n=64,\quad \sigma=10.$

37. $\bar{x}_B=25{,}72,\quad n=121,\quad \sigma=11.$

38. $\bar{x}_B=25{,}82,\quad n=16,\quad \sigma=2.$

39. $\bar{x}_B=25{,}9,\quad n=144,\quad \sigma=3.$

40. $\bar{x}_B = 26{,}02, \quad n = 64, \qquad \sigma = 4.$

8. Примерная тематика курсовых домашних заданий:

- Семестр N1. Индивидуальные домашние задания N1 по темам: линейная алгебра и аналитическая геометрия на плоскости.
- Семестр N1. Индивидуальные домашние задания N2 по темам: числовые последовательности, функции, предел и непрерывность.
- Семестр N2. Индивидуальные домашние задания N1 по темам: Элементы векторной алгебры, аналитическая геометрия в пространстве и Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.
- Семестр N2. Индивидуальные домашние задания N2 по темам: определенный интеграл, Дифференциальные уравнения и ряды.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. В. И. Михеев, Ю. В. Павлюченко, *Высшая математика. Краткий курс// Учебное пособие, изд-во Физматлит, 2007, 2008.*
2. Зайцев И. А. Высшая математика: Учеб. для вузов. — 5-е изд. --М.:Дрофа,2005. ---400 с.---ISBN: 978-5-7107-9071-7.
3. Баврин И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 328 с. - ISBN 5-9221-0334-2.

б) дополнительная литература

4. Письменный Д., "Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике", Москва 2004, ISBN 5-8112-0970-3.
5. Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник- практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979.
6. Севастьянов Б.А.. Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1969.

в) программное обеспечение_________нет______________________________________

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы___________________

________ http://ru.wikipedia.org ____

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

- Электронные библиотеки, доступные в сети INTERNET. Например, по адресам http://poiskknig.ru, http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm http://www.mathnet.ru http://ilib.mirror1.mccme.ru/

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Сводная оценочная таблица дисциплины
ССБ 1й семестр

Раздел	Тема	Формы контроля уровня освоения ООП							
		Выполнение ДЗ	Выполнение КР	Работа на занятии	Работа на инт . занятии	Экзамен	Прочие формы контр.	Баллы темы	Баллы раздела
1. Комбинаторик	решение задач используя формул для сочетании и размешении.	3	15	2	1	8	3	32	32
2. Теория вероятностей	Введение втеории вероятностей	1	7	1		4	1	14	29
	Случайные величины	1	7		1	4	2	15	
3. Математическая статистика	Введение в анализ	2	8	1	1	4	1	17	39
	Статистические методы	3	8	1	2	5	3	22	
Итого		10	45	5	5	25	10	100	100

Таблица соответствия баллов и оценок

Баллы БРС	Традиционные оценки РФ	Оценки ECTS
95-100	5	A
86-94		B
69-85	4	C
61-68	3	D
51-60		E
31-50	2	FX
0-30		F
51 - 100	Зачет	Passed

Разработчики:

Доцент кафедры прикладной математики Нибаль Ш. Хассан

Заведующий кафедрой прикладной математики **А.Л. Скубачевский**