

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов»

Факультет физико-математических и естественных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендуется для направления подготовки/специальности

01.04.01 Математика

Направленность программы (профиль)

Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и
междисциплинарных исследованиях (англ.)

*(наименование образовательной программы в соответствии
с направленностью (профилем))*

1. Цели и задачи дисциплины: Основной целью курса является освоение студентами современной теории Фурье-анализа и теории мультипликаторов Фурье и ее приложений к некоторым задачам современного математического анализа, теории приближений и теории функциональных пространств. Обучение учащихся различным современным методам теории пространств дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Освоение соответствующего математического аппарата.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Блок 1, вариативная часть.

Необходимы знания по линейной алгебре, математическому анализу, функциональному анализу. Изложенные в рамках дисциплины знания используются в дисциплине «Нелинейный анализ и теория аппроксимации».

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
Универсальные компетенции			
	УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	-	Нелинейные эволюционные уравнения, Государственный экзамен
Профессиональные компетенции			
	ПК-40.011.01 Проведение работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований	-	Дополнительные главы математического моделирования, Государственный экзамен
	ПК-1. Способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного	-	Неевклидовы геометрии и их приложения, Введение в маломерную топологию, Государственный экзамен

	КОЛЛЕКТИВА		
--	------------	--	--

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные свойства Фурье-мультипликаторов, определения и основные свойства пространств функций с ограниченным спектром, пространств Соболева и Никольского-Бесова, эквивалентные нормы в них, а также их взаимосвязи и теоремы вложения и приложения в теории уравнений в частных производных.

Уметь: оценивать нормы Фурье-мультипликаторов, оценивать нормы производных и следов для функций с ограниченным спектром, корректно определять следы функций на многообразиях меньшей размерности, точно описывать пространства следов для функций из пространств Соболева и Никольского-Бесова.

Владеть: различными современными методами описания дифференциальных свойств функций, способами исследования задач об описании следов и построении продолжений, современными методами линейного и нелинейного гармонического анализа.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц.

	Вид учебной работы	Всего часов	Модули			
			1	2		
.	Аудиторные занятия (ак. часов)	68	36	32		
	В том числе:					
.1.	Лекции	34	18	16		
.2.	Прочие занятия	34	18	16		
	<i>В том числе:</i>					
.2.1.	<i>Практические занятия (ПЗ)</i>					
.2.2.	<i>Семинары (С)</i>	34	18	16		
.2.3.	<i>Лабораторные работы (ЛР)</i>					
	<i>Из них в интерактивной форме (ИФ):</i>					
.	Самостоятельная работа студентов (ак. часов)	121	81	40		
	В том числе:					
.1.	Курсовой проект (работа)					
.2.	Расчетно-графические работы					
.3.	Реферат					
.4.	Подготовка и прохождение промежуточной аттестации	6	3	3		
	Домашние задания	20	10	10		

	Другие виды самостоятельной работы	95	9	6		
	Контроль	63	27	36		
	Общая трудоемкость (ак. часов)	252	144	108		
	Общая трудоемкость (зачетных единиц)	7	4	3		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	Пространства основных и обобщенных функций Л. Шварца. Преобразование Фурье в этих пространствах, его связь со сдвигом, дифференцированием и сверткой. Обобщенное неравенство Минковского для свертки.
	Преобразование Фурье функций из L_1	Непрерывность и ограниченность преобразования Фурье. Поведение на бесконечности. Связь сильного и слабого преобразования Фурье. Алгебра Винера преобразований Фурье интегрируемых функций.
	Преобразование Фурье функций из L_2 . Теория Планшереля.	Подход к определению сильного преобразования Фурье функций из L_2 . Связь сильного и слабого преобразования Фурье. Теорема Планшереля и равенство Парсеваля.
	Преобразование Фурье функций из L_p .	Понятие об интерполяции. Интерполяционная теорема Рисса- Торина. Теорема Хаусдорфа- Юнга.
	Определение и основные свойства Фурье – мультипликаторов	Пространство Фурье- мультипликаторов в L_p . Достаточные условия Фурье- мультипликаторов в L_p . Формулировка и доказательство основной теоремы о мультипликаторах интеграла Фурье.
	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	Формулировки и сопоставление теорем Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье. Применение теорем о мультипликаторах интеграла Фурье для оценки норм смешанных производных через норму оператора Лапласа.
	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	Теорема Рисса об ограниченности сумм Дирихле. Характеристические функции полосы, прямоугольного параллелепипеда и выпуклого многогранника как о мультипликаторы интеграла Фурье. Результат Ч. Фейффермана по проблеме Фурье- мультипликаторов.
	Подпространств о функций с ограниченным спектром	Интегральное представление функции с ограниченным спектром. Неравенство Бернштейна для функции с ограниченным спектром. Неравенство разных метрик Никольского для функции с ограниченным спектром. Следы функций и неравенство разных измерений Никольского для функции с ограниченным спектром.

	Пространство Соболева	Усреднение функций по Соболеву, его связь с обобщенным дифференцированием. Совпадение слабых и сильных обобщенных производных по Соболеву. Формула Лейбница для обобщенных производных. Замкнутость обобщенного дифференцирования. Пространство Соболева, его полнота.
0.	Теоремы вложения для пространств Соболева	Интегральное представление Соболева и следствия из него. Оценки промежуточных производных для функций из пространств Соболева. Вложение разных метрик для пространств Соболева.
1.	Свойства модулей непрерывности	Свойства конечных разностей и модулей непрерывности как нелинейных дробных характеристик гладкости функций. Свойства монотонности и оценки модулей непрерывности. Теорема Маршо о связи модулей непрерывности различных порядков.
2.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	Определения пространств Никольского-Бесова, их общие свойства. Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова в терминах модулей непрерывности, в интегральной и в дискретной форме. Полнота пространств Никольского-Бесова
3.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики	Основная лемма об оценке дискретных сумм. Теорема вложения по показателю гладкости и по второму индексу. Расширяющаяся шкала пространств Никольского-Бесова. Оценка модуля непрерывности функции степенного типа и критерий ее принадлежности пространствам Соболева и Никольского-Бесова.
4.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	Операторы усреднения, свойства их ядер. Интегральные представления разностей через производные. Теоремы о свойствах операторов усреднения. Разностные критерии принадлежности обобщенных производных по направлениям к L_p .
5.	Разностная характеристика пространств Соболева	Эквивалентные нормы и разностная характеристика пространств Соболева. Взаимные вложения пространств Соболева и Никольского-Бесова.
6.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова	Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова с использованием обобщенных производных и модулей непрерывности.
7.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	Эквивалентные нормы в пространствах Никольского-Бесова в терминах разложений в ряды по функциям с ограниченным спектром. Формулировка и доказательство теоремы вложения разных метрик. Неулучшаемость теоремы вложения.
8.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	Понятие следа на подпространстве меньшей размерности. Теорема о точном описании пространства следов для пространств Никольского-Бесова. Предельный случай теоремы о следах. Отсутствие линейных операторов продолжения в предельном случае.

5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

п/п	Наименование раздела	Лекц.	Практические занятия и лабораторные работы			СРС	Всего
			ПЗ/С	конт роль	из них в ИФ		
1.	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	1	1	2		10	14
2.	Преобразование Фурье функций из L_1	1	1	2		8	12
3.	Преобразование Фурье функций из L_2 . Теория Планшереля.	2	2	4		6	14
4.	Преобразование Фурье функций из L_p .	1	1	2		8	12
5.	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов	3	3	4		6	16
6.	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	1	1	2		8	12
7.	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	2	2	4		6	14
8.	Подпространство функций с ограниченным спектром	3	3	4		6	16
9.	Пространство Соболева	1	1	2		8	12
10.	Теоремы вложения для пространств Соболева	2	2	4		6	14
11.	Свойства модулей непрерывности	2	2	4		6	14
12.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	3	3	5		5	16
13.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики	1	1	2		8	12
14.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	3	3	6		4	16
15.	Разностная характеристика пространств Соболева	1	1	2		8	12
16.	Включение производных в нормы пространств Никольского-Бесова	2	2	4		7	15
17.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	3	3	6		5	17
18.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	2	2	4		6	14
	ИТОГО	34	34	63		121	252

6. Лабораторный практикум: Не предусмотрен.

7. Практические занятия (семинары).

№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (час.)
19.	Преобразования Фурье основных и обобщенных функций	1
20.	Преобразование Фурье функций из L_1	1
21.	Преобразование Фурье функций из L_2 . Теория Планшереля.	2
22.	Преобразование Фурье функций из L_p .	1
23.	Определение и основные свойства Фурье-мультипликаторов	3
24.	Теоремы Лизоркина и Михлина – Хермандера о мультипликаторах интеграла Фурье	1
25.	Некоторые применения теорем о мультипликаторах интеграла Фурье	2
26.	Подпространство функций с ограниченным спектром	3
27.	Пространство Соболева	1
28.	Теоремы вложения для пространств Соболева	2
29.	Свойства модулей непрерывности	2
30.	Общие свойства пространств Никольского-Бесова	3
31.	Вложение пространств Никольского-Бесова без изменения метрики	1
32.	Взаимосвязь обобщенных производных и разностей	3
33.	Разностная характеристика пространств Соболева	1
34.	Включение производных в нормы пространств Никольского-	2

	Бесова	
35.	Вложение разных метрик для пространств Никольского-Бесова.	3
36.	Описание следов на подпространстве меньшей размерности	2
	ИТОГО	34

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ): Не предусмотрены.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература:

1. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, все годы издания.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, все годы издания.
3. Л. Хермандер. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: ИЛ, все годы издания.
4. В. И. Буренков. Функциональные пространства. Пространства Соболева. М.: РУДН, все годы издания.

б) дополнительная литература:

1. В. Г. Мазья. Пространства Соболева. ЛГУ, все годы издания.
2. Г. Трибель. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, все годы издания.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

учебная аудитория для проведения семинарских занятий, большая аудитория (лекционный зал) для чтения лекций, ноутбук - 1 шт., проектор - 1 шт., экран - 1 шт., ксерокс - 1 шт., принтер - 1 шт., сканер - 1 шт.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Соответствие систем оценок (используемых ранее оценок итоговой академической успеваемости, оценок ECTS и балльно-рейтинговой системы (БРС) оценок текущей успеваемости) (В соответствии с Приказом Ректора №996 от 27.12.2006 г.):

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	Баллы для перевода оценок	Оценки	Оценки ECTS
86 – 100	5	95 - 100	5+	A
		86 - 94	5	B
69 – 85	4	69 - 85	4	C
51 – 68	3	61 - 68	3+	D
		51 - 60	3	E
0 – 50	2	31 - 50	2+	FX
		0 - 30	2	F

1. Студенты обязаны сдавать все задания в сроки, установленные преподавателем.

2. Студент допускается к итоговому контролю с любым количеством баллов, набранным в семестре, но при условии, что у него имеется теоретическая возможность получить не менее 31 балла.
3. Если в итоге за модуль студент получил менее 31 балла, то ему выставляется оценка F и он должен повторить дисциплину в установленном порядке. Если же в итоге студент получил не менее 31 балла, т.е. F_x , то ему разрешается добор необходимого (до 51) количества баллов путём повторного однократного выполнения предусмотренных итоговых контрольных мероприятий; при этом аннулируются, по усмотрению преподавателя, соответствующие предыдущие результаты. Ликвидация задолженностей проводится по согласованию с деканатом.
4. Итоговая контрольная работа (итоговый контроль) содержит от 3 до 6 вопросов (или заданий). На подготовку к ответу отводится 1 час, после чего производится устный опрос студента. Оценивается работа из 60 баллов независимо от оценки, полученной в модуле.

Разработчик:

Профессор

Математического института

им. С.М. Никольского



М.Л. Гольдман

Директор

Математического института

им. С.М. Никольского



А.Л. Скубачевский

Математический институт им. С.М. Никольского
(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕН

на заседании института

« ___ » _____ 20__ г., протокол

№ _____

Директор Математического
института

_____ А.Л.

Скубачевский
(подпись)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Современные проблемы математики и прикладной математики
(наименование дисциплины)

01.04.01 «Математика»

магистр

Квалификация (степень) выпускник

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО КУРСУ

Раздел 1. Функции с ограниченным носителем спектра

- 2.1 Общие свойства пространства функций с ограниченным носителем спектра
- 2.2 Интегральное представление функции с ограниченным носителем спектра.
- 2.3. Неравенство Бернштейна для функции с ограниченным с носителем спектра.
- 2.4. Неравенство Юнга для сверток.
- 2.5. Неравенство разных метрик Никольского для функции с ограниченным спектром.
- 2.6. Следы функций и неравенство разных измерений Никольского для функции с ограниченным спектром.
- 2.7. Связь преобразований Фурье функции и ее следа на подпространстве меньшей размерности. Следствие для функций с ограниченным спектром.

Раздел 2. Приближения и модули непрерывности

- 2.8. Понятие наилучшего приближения с помощью функций с ограниченным спектром и его общие свойства.
- 2.9. Реализация наилучшего приближения с помощью оператора Дирихле при $p = 2$.
- 2.10. Реализация приближения порядка наилучшего с помощью оператора Дирихле при $1 < p < \infty$.
- 2.11. Реализация приближения порядка наилучшего с помощью оператора интегрального представления при $1 \leq p \leq \infty$.
- 2.12. Свойства конечных разностей. Области определения и основные формулы для конечных разностей.
- 2.13. Понятие модуля непрерывности для функции из пространства Лебега $L_p(\Omega)$. Свойства модулей непрерывности: монотонность и ограниченность, предел при $t \rightarrow +0$.
- 2.14. Оценки модулей непрерывности.
- 2.15. Связь наилучших приближений и модулей непрерывности.

ПЕРЕЧЕНЬ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

1. Пусть X - нормированное пространство, $a \in X$, $r > 0$. Докажите, что множество $X \setminus \bar{B}(a, r)$ открыто ($\bar{B}(a, r)$ - замкнутый шар).
2. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ формулой

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_1$ обозначим R_1^n .

3. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ формулой

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_\infty$ обозначим R_∞^n .

Показать, что

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty.$$

4. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ формулой

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_2$ обозначим R_2^n .

Показать, что

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq n^{1/2} \|\vec{x}\|_\infty.$$

5*. В пространстве R^n определим норму вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ формулой

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Проверить выполнение аксиом нормы. Пространство R^n с нормой $\|\vec{x}\|_p$ обозначим R_p^n .

Показать, что

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{1/p} \|\vec{x}\|_\infty.$$

Указание. При обосновании неравенства треугольника можно следовать схеме:

1. Для любых чисел $x, y \geq 0$ установить неравенство Юнга:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}, \text{ где } 1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \text{ т.е., } p' = \frac{p}{p-1}.$$

2. Опираясь на неравенство Юнга установить неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p'} \right)^{1/p'}.$$

3. Опираясь на неравенство Гельдера вывести неравенство треугольника для нормы

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

6. Изобразить единичные круги в пространствах R_p^2 , $p=1, p=2, p=\infty$.

7. Изобразить единичные шары в пространствах R_p^3 , $p=1, p=2, p=\infty$.

8.* Установить неравенства между нормами в пространствах R_p^n и R_q^n , $1 \leq p < q \leq \infty$: для любых векторов $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$

$$\|\vec{x}\|_q \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|\vec{x}\|_q. \quad (1)$$

Привести примеры векторов, для которых неравенства в (1) превращаются в равенства.

Указания.

1. Для получения левого неравенства в (1), называемого неравенством Йенсена, можно

следовать схеме:

А) При условии $\|\vec{x}\|_p = 0$ показать, что $\|\vec{x}\|_q = 0$.

Б) При $0 < x \leq 1, 1 \leq p < q \leq \infty$ показать, что $x^q \leq x^p$. Вывести отсюда, что условие

$\|\vec{x}\|_p = 1$ влечет $\|\vec{x}\|_q \leq 1$ (это частный случай неравенства Йенсена).

В) Опираясь на результат п. Б), получить неравенство Йенсена в общем случае.

2. Для получения правого неравенства в (1) применить в нужном варианте неравенство

Гельдера.

9. Показать, что в линейном нормированном пространстве для любых векторов выполнено обратное неравенство треугольника

$$\left| \|\vec{x} - \vec{y}\| - \|\vec{z} - \vec{y}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\|.$$

Каков его геометрический смысл в пространстве геометрических векторов с нормой, равной длине вектора?

В качестве следствия получить неравенство

$$\left| \|\vec{x}\| - \|\vec{z}\| \right| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\|$$

(разность норм векторов не больше, чем норма разности векторов).

10. Доказать равенство $\operatorname{ess\,sup}_E f = \inf \{ M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \text{ п.в. на } E \}$.

11. Доказать, что при $0 < p \leq \infty$ $\|f\|_{L_p(E)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п.в. на E .

12. Показать, что п.в. на E выполнено неравенство $|f(x)| \leq \|f\|_{L_\infty(E)}$.

13. Доказать утверждение: пусть $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $\varphi \in C(0, \infty)$ - строго убывает, $\int_0^1 \varphi dx < \infty$.

Тогда, при любых $a \geq 0$, $b > 0$ справедливо неравенство

$$ab \geq \int_0^a \varphi dx - \int_b^\infty \varphi^{-1} dy,$$

причем равенство имеет место только при $b = \varphi(a)$.

14. Показать, что при $0 < p < 1$; $a \geq 0$, $b > 0$ справедливо неравенство

$$ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

причем равенство имеет место только при $a^p = b^{p'}$.

15. Пусть $f \in L_p(E)$, $g \in L_{p'}(E)$; $0 < p < 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$; $g \neq 0$ на E .

Показать, что имеет место обращение неравенства Гельдера:

$$\int_E |f g| dx \geq \|f\|_{L_p(E)} \|g\|_{L_{p'}(E)}.$$

16. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E), 1 \leq p \leq \infty \Rightarrow f + g \in L_p(E), \|f + g\|_{L_p(E)} \leq \|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)}$$

постоянная 1- точная.

17. Показать, что в неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E), 0 < p < 1 \Rightarrow f + g \in L_p(E), \|f + g\|_{L_p(E)} \leq 2^{1/p-1} (\|f\|_{L_p(E)} + \|g\|_{L_p(E)})$$

постоянная $2^{1/p-1}$ - точная.

18. Показать, что в модифицированном неравенстве треугольника:

$$f, g \in L_p(E), 0 < p < 1 \Rightarrow f + g \in L_p(E), \|f + g\|_{L_p(E)} \leq (\|f\|_{L_p(E)}^p + \|g\|_{L_p(E)}^p)^{1/p}$$

постоянная 1 - точная.

19*. Показать, что формула вычисления нормы линейного функционала

$$A_g(f) = \int_E f g dx, \quad f \in L_p(E), \quad (1 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1),$$

именно,

$$\|A_g\| = \|g\|_{L_{p'}(E)},$$

сохраняет силу при $\|g\|_{L_{p'}(E)} = \infty$.

20. Показать, что для измеримой функции g

$$\|g\|_{L_{p'}(E)} = \sup \left\{ \left| \int_E \varphi g dx \right| : \varphi \in L_p(E); \|\varphi\|_{L_p(E)} \leq 1 \right\},$$

причем, если $g \geq 0$, то

$$\|g\|_{L_{p'}(E)} = \sup \left\{ \int_E \varphi g dx : 0 \leq \varphi \in L_p(E); \|\varphi\|_{L_p(E)} \leq 1 \right\}.$$

21. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ введем для функций $x \in C[a, b]$

$$\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| ?$$

22. Можно ли в пространстве $C[a, b]$ ввести нормы по формулам

$$1) \quad \|x\| = \max_{t \in [a, (a+b)/2]} |x(t)|,$$

или

$$2) \|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| ?$$

23. В пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ введем для функций $x \in C^1[a, b]$ норму Соболева

$$\|x\|_{2,1} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |x'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| ?$$

24. Показать, что величина $\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ является нормой в пространстве $C^1[a, b]$. Будет ли она эквивалентна канонической норме

$$\|x\|_{C^1} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)| ?$$

25. При $1 \leq p \leq \infty$ показать, что множество последовательностей

$$l_p = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$l_\infty = \left\{ \vec{x} = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \|\vec{x}\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}, \quad p = \infty;$$

образует линейное нормированное пространство.

26. Можно ли в пространстве l_q при $1 \leq p < q \leq \infty$ ввести норму $\|\vec{x}\|_p$?

27*. А) При $1 \leq p < q \leq \infty$ показать, что $\|\vec{x}\|_q \leq \|\vec{x}\|_p$ (неравенство Йенсена для последовательностей)

Б) В пространстве l_p при $1 \leq p < q \leq \infty$ введем норму $\|\vec{x}\|_q$. Проверить выполнение свойств нормы. Будет ли эта норма эквивалентна исходной норме $\|\vec{x}\|_p$?

28. Привести пример последовательности функций, сходящейся по норме $L_p(E)$, $0 < p < \infty$, но не сходящейся почти всюду на E . Возможен ли такой пример в $L_\infty(E)$?

29. Показать, что из последовательности, сходящейся по норме $L_p(E)$, $0 < p < \infty$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E .

30. Привести пример последовательности функций, сходящейся почти всюду на E но не сходящейся по норме $L_p(E)$, $0 < p \leq \infty$.

31. Докажите, что линейный оператор удовлетворяет условию Липшица тогда и только тогда, когда этот оператор непрерывен.

32. Докажите, что линейный ограниченный оператор переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную.

33. Докажите, что всякий линейный оператор переводит выпуклое множество в выпуклое множество. Верно ли, что образ замкнутого множества при линейном непрерывном операторе замкнут?

3.2. Контрольные работы (пример заданий):

1 модуль

1. Является ли поточечное умножение алгебраической операцией на множестве функций, имеющих интегрируемые преобразования Фурье?

Да.

2. Можно ли корректно определить преобразование Фурье функции с интегрируемым с квадратом в $L_2(\mathbb{R}^n)$ в виде интеграла?

Нет (т.к. такое определение требует интегрируемости функции, но существуют функции из $L_2(\mathbb{R}^n) \setminus L_1(\mathbb{R}^n)$)

3. Всегда ли будет ли преобразование Фурье функции из L_p регулярной функцией?

Да при $1 \leq p \leq 2$; нет при $p > 2$.

4. Можно ли определить мультипликаторы интеграла Фурье с помощью последовательного применения операций преобразования Фурье, поточечного умножения и обратного преобразования Фурье?

Нет.

5. Может ли неограниченная функция быть мультипликатором интеграла Фурье?

Нет.

6. Является ли характеристическая функция выпуклого многогранника мультипликатором интеграла Фурье при $1 < p < \infty$?

Да.

7. Является ли характеристическая функция выпуклого многогранника мультипликатором интеграла Фурье при $p=1$?

Нет.

8. Является ли характеристическая функция шара мультипликатором интеграла Фурье при $p=2$?

Да.

9. Является ли характеристическая функция шара мультипликатором интеграла Фурье при $p \neq 2$?

Нет.

10. Является ли пространство функций с ограниченным спектром замкнутым подпространством в L_p ?

Да.

11. Какие из указанных неравенств характеризуют функции с ограниченным спектром?

а) Коши; б) Гельдера; в) Бернштейна; г) Никольского разных метрик; д) Иенсена; е) Никольского разных измерений.

в, г, е.

12. Является ли след функции с ограниченным спектром на подпространстве также функцией с ограниченным спектром?

Да.

13. Может ли функция с ограниченным спектром из L_p быть неограниченной?

Нет.

14. Может ли наилучшее приближение функции с помощью функций с ограниченным спектром оказаться нулевым?

Да (если сама функция имеет ограниченный спектр).

15. Какая связь сильной и слабой обобщенной производной по Соболеву?

а) из сильной производной следует слабая, но не наоборот;

б) из слабой производной следует сильная, но не наоборот;

в) они эквивалентны.

в

16. Связано ли дифференцирование Соболевского усреднения с обобщенным дифференцированием?

Да.

17. Является ли обобщенное дифференцирование замкнутой операцией?

Да.

18. Будет ли пространство Соболева банаховым?

Да.