Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов» (РУДН)

Факультет физико-математических и естественных наук
Институт физических исследований и технологий

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Рекомендуется для направления подготовки

03.03.02 Физика

Квалификация (степень) выпускника

бакалавр

1. Цели и задачи дисциплины

Изложение единого современного подхода к исследованию широкого класса теории функций комплексного переменного, описывающих различные модели классической динамики, математической экономики, современных инженерных задач и междисциплинарных исследований.

2. **Место дисциплины в структуре ООП:** Вариативная часть Б1.О.01.06.

Требуются знания математического анализа, алгебры, аналитической геометрии. Является основой для последующего изучения специальных дисциплин.

В таблице № 1 приведены последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций дисциплины в соответствии с матрицей компетенций ОП ВО.

Таблица № 1

Предшествующие и последующие дисциплины, направленные на формирование компетенций

№ п/п	Шифр и наименование компетенции	Предшествующие дисциплины	Последующие дисциплины (группы дисциплин)
1	ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности	Дисциплины модуля «Математика»	Дисциплины модулей «Общая физика», «Теоретическая физика»

3. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные теоремы теории функций комплексного переменного.

Уметь: решать стандартные задачи по курсу теории функций комплексного переменного.

Владеть: основными аналитическими методами теории функций комплексного переменного.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		5	
Аудиторные занятия (всего)	**27**	**27**	
В том числе:			
Лекции	9	19	
Практические занятия (ПЗ)			
Семинары (С)	18	18	
Лабораторные работы (ЛР)			
Самостоятельная работа (всего)	**45**	**45**	
В том числе:			
Курсовой проект (работа)			
Расчетно-графические работы			
Реферат			
Другие виды самостоятельной работы			
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	2	2	
Общая трудоемкость, час з.е.	**72** **2**	**72** **2**	

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов дисциплины

Курс состоит из 4-х разделов

1. **Комплексные** числа. Операции над комплексными числами. Умножение, деление комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
Неравенство Буняковского для комплексных чисел. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме.
Решение уравнения $z^n = a$. Количество решений уравнения $z^n = a$.
Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция.
Топология расширенной комплексной плоскости. Предельные точки. Связные и компактные множества на расширенной комплексной плоскости.
Компоненты связности множества на комплексной плоскости.
Принцип Больцано–Вейерштрасса на расширенной комплексной плоскости.
Пределы последовательности точек комплексной плоскости. Свойства пределов. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.
Числовые ряды. Критерий Коши для рядов. Абсолютная сходимость рядов.
Предел функции комплексного переменного. Эквивалентность пределов по Коши и по Гейне.
2. **Непрерывные** функции комплексного переменного.
Функциональные ряды. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.
Непрерывность суммы функционального ряда в случае равномерной сходимости.
Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда.
Первая теорема Абеля о сходимости степенных рядов.
Теорема о существовании радиуса сходимости степенного ряда.
Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
Алгебраические операции над степенными рядами.
Определение элементарных функций через степенные ряды.
Аналитическая (регулярная) функция комплексного переменного. Комплексная производная. Условия Коши-Римана как необходимое условие комплексной дифференцируемости. Дифференциал регулярной функции.
Функции регулярные (моногенные) в области.
Регулярность в круге сходимости степенного ряда. (ДОКАЗАТЬ)
Конформное отображение. Конформность регулярного отображения в точке с ненулевой производной. Геометрическая интерпретация модуля и аргумента регулярного отображения.
Комплексное интегрирование вдоль кривой. Сведение комплексного интеграла к вещественным криволинейным интегралам второго рода. Зависимость интеграла от направления обхода контура интегрирования.
3. **Теорема Коши** для случая непрерывной производной для односвязной области. Доказательство.
Сильная теорема Коши. Без доказательства. Следствия из теоремы Коши.
Теорема Коши для многосвязных областей. Доказательство.
Пример. Интегрирование целых степеней по окружности с центром в точке 0.
Интегральная формула Коши в односвязной области. Доказательство.
Интегральная формула Коши в многосвязной области. Случай двусвязной области.
Теорема о среднем для регулярной функции.
Теорема о среднем для гармонической функции.
Доказательство теоремы: функция, имеющая комплексную производную в области D, может быть представлена сходящимся степенным рядом в окрестности каждой точки рассматриваемой области.
Бесконечная дифференцируемость в области регулярной (моногенной) функции.
Единственность ряда Тейлора для регулярной функции.
Теорема единственности для регулярной функции.

Аналитическое продолжение регулярной функции. Теорема (принцип аналитического продолжения).
Аналитическое продолжение тригонометрических и экспоненциальных функций.
Интегралы, зависящие от параметра. Теорема о регулярности функции, определяемой интегральным преобразованием.
Теорема Морера.
Регулярность преобразования Лапласа.
Регулярность преобразования Фурье.
4. **Ряд Лорана.** Область сходимости ряда Лорана.
Разложение регулярной в кольце функции в ряд Лорана.
Единственность разложения функции в ряд Лорана.
Неравенства Коши для коэффициентов Лорана.
Изолированные особые точки однозначного характера. Типы особых точек. Примеры.
Ряд Лорана в окрестности особой точки. Характеризация особых точек с помощью ряда Лорана. Случай устранимой особой точки.
Ряд Лорана в окрестности особой точки. Характеризация особых точек с помощью ряда Лорана. Случай полюса.
Ряд Лорана в окрестности особой точки. Характеризация особых точек с помощью ряда Лорана. Случай существенно особой точки.
Теорема Лиувилля. Целые функции.
Доказательство основной теоремы алгебры.
Вычет функции в конечной точке. Вычет в регулярной точке.
Вычисление вычета в полюсе. Простой и кратный полюс.
Вычет в бесконечно удаленной точке.
Основная теорема в теории вычетов.
Обобщение основной теоремы вычетов на случай расширенной комплексной плоскости.
Вычисление определенных интегралов с помощью теории вычетов. Доказательство основной леммы.
Обратная функция на комплексной плоскости. Теорема об обратной функции. Доказательство.
Многозначная функция $\sqrt{z}$. Область значений и область однолистности однозначной функции. Регулярные однозначные ветви для $\sqrt{z}$. Области с разрезами.
Выделение регулярной ветви по значениям во внутренней точке области однолистности. Выделение регулярной ветви по значениям на берегах разреза.

5.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Семин	СРС	Всего час.
1.	**Комплексные** числа. Операции над комплексными числами. Умножение, деление комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.	4			6	10
2.	**Непрерывные** функции комплексного переменного. Функциональные ряды.	6			8	14
3.	**Теорема Коши** для случая непрерывной производной для односвязной области. Доказательство. Сильная теорема Коши. Без доказательства. Следствия из теоремы Коши. Теорема Коши для многосвязных областей.	12			12	24
4.	**Ряд Лорана.**	12			12	24

6. Лабораторный практикум: нет

7. Практические занятия (семинары): нет

8. Примерная тематика курсовых проектов (работ) – нет

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: Изд. ИЛ, 1963.
2. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1984.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции М.: Все годы издания.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций.- М.: Наука, 1967.-т.1; 1968.- т.2.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного.- М.: Наука, 1984.
6. Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. Евграфова М.А. – М.: Наука, 1972.

б) дополнительная литература

1. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. М.: Наука: Физматлит, 2014.
2. Краснов М.Л. и др. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – Избр. главы высшей математики в примерах и задачах. М.: Наука, 1971.

Вся литература есть в библиотеке РУДН и в электронном виде на кафедре.

в) программное обеспечение – Windows, Microsoft Office, Maple, TeX, WinEdt.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы – Yandex, Goole, MathNet.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитории 398, 485, 495, 497 в учебном корпусе РУДН, ул. Орджоникидзе, 3,
Ноутбук Toshiba Satellite 17/300GB Intel Core2 2.4 GHz, мультимедийный проектор и экран.

11. Методические рекомендации по организации изучения дисциплины:

Курс состоит из лекций и практических занятий. Соотношение часов между ними следующее:

– в первом семестр – 2 часа лекций и 1 час практических занятий в неделю,

В середине и в конце семестра проводятся контрольные работы, результаты которых входят в балльно-рейтинговую систему оценки знаний.

Особенность курса. Все основные теоремы курса доказываются с использованием простейших понятий теории формальных степенных рядов. Несколько содержательных определений позволяют сделать доказательства прозрачными и короткими.

Методически курс построен так, чтобы все наиболее сложные задачи рассматривались в простейших случаях, что облегчает понимание их студентами.

12. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Шкала оценок

Соответствие систем оценок (согласно Приказу Ректора № 996 от 27.12.2006 г.)

Баллы БРС	Традиционные оценки в РФ	ллы для перевода оценок	Оценки	Оценки
86-100	5	95-100	5+	A
		86-94	5	B
69-85	4	69-85	4	C
51-68	3	61-68	3+	D
		51-60	3	E
0-50	2	31-50	2+	FX
		0-30	2	F
51-60	Зачет		Зачет	Passed

Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»
Направление/Специальность: 03.03.02 «Физика»

Код контролируемой компетенции или ее части	Контролируемый раздел дисциплины	Контролируемая тема дисциплины	Наименование оценочного средства											Баллы темы	Баллы раздела
			Текущий контроль								Промежуточная аттестация				
			Опрос	Тест	Коллоквиум	Контрольная работа	Выполнение ЛР	Выполнение КР/КП	Выполнение ДЗ		Экзамен/Зачет	…	…		
ОПК-1	Раздел 1:Алгебраические операции над комплексными числами. Многозначные алгебраические функции. Степенные ряды	Тема 1:Операции над комплексными числами. Нахождение всех корней	+			+			+		+			10	17,5
		Тема 2: Разложение функций в степенные ряды в комплексной области.	+			+			+		+			7,5	
ОПК-1	Раздел 2: Непрерывные функции комплексного переменного. Функциональные ряды.	Тема 1: Оценка области сходимости функциональных рядов.	+		+	+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Комплексное интегрирование.	+			+			+		+			12,5	
ОПК-1	Раздел 3: Формулы и теорема Коши в односвязных и многосвязных областях . Особые точки и вычеты	Тема 1: Аналитические функции по Коши-Риману. Аналитические функции по Вейерштрассу.	+			+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Вычета однозначных функций. Особые точки аналитических функций	+			+			+		+			12,5	

ОПК-1	Раздел 4. Ряды Лорана и многозначные функции. Аналитическое продолжение	Тема 1:Разложение функций в ряд Лорана.	+			+			+		+			15	27,5
		Тема 2: Аналитическое продолжение функций и многозначные функции.	+			+			+		+			12,5	
		ИТОГО:												100	100

Вопросы для подготовки к опросу

1. Поле комплексных чисел. Различные формы записи комплексных чисел.
2. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов от тригонометрических функций. Примеры.
3. Основные действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.
4. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов. Примеры.
5. Понятие последовательности с комплексными членами и предела последовательности. Расширенная комплексная плоскость.
6. Основная теорема о вычетах.
7. Понятие интеграла от функции комплексного переменного вдоль кривой. Способы вычисления. Примеры.
8. Особые точки. Виды особых точек. Ряд Лорана. Вычеты.
9. Понятие производной функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
10. Критерий регулярности функции в области.
11. Непрерывность функции комплексного переменного: в точке, в области, в области вплоть до границы, на кривой.
12. Интегральная формула Коши.
13. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции в поле комплексных чисел. Определения и простейшие свойства.
14. Регулярные функции. Почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда.
15. Интегральная теорема Коши и следствия из нее.
16. Понятие первообразной функции комплексного переменного. Теорема о существовании первообразной.

Вариант контрольной работы

1.1. Записать комплексное число $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в тригонометрической и показательной формах.

1.2. Найти $\overline{z_2}$, z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1=5+i$, $z_2=2+3i$

1.3. Записав числа $z_1=\dfrac{i}{i-1}$ и $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме, найти $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

1.4. Записать число $z=\dfrac{(1+i)^8}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$ в алгебраической форме.

1.5. Вычислить $\sqrt[6]{-64}$.

1.6. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному условию: a) $|z+3-i|=2$, b) $\operatorname{Im}(z+i)>1$.

Вариант домашнего задания

Пример 1. Найти образ множества $E=\{z:\operatorname{Im}z=1\}$ при отображении $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

Пример 2. Найти образ области D при отображении $w = \dfrac{z}{z-1}$, где $D = \{z,\, 0 < \operatorname{Re}(z) < 1,\, 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$.

Пример 3. Найти дробно-линейное отображение, которое точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ оставляет неподвижными, а точку $z_3 = i$ переводит в точку $w_3 = 0$. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Im}(z) > 0$ при данном отображении.

Пример 4. Найти образ области $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi,\, \operatorname{Re} z \ge 0\}$ при отображении $w = e^z$.

Пример 5. Найти образ плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси при отображении той ветвью логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$, которая точку $z_0 = 1$ переводит в точку $w_0 = 4\pi i$.

Пример 6. Найти образ области $\Delta = \{z : 2 < |z| < 4,\, z \notin [-4, -2]\}$ при отображении ветвью логарифмической функции $w = \operatorname{Ln} z$, которая определяется ее значением $w_0 = -2\pi i$ в данной точке $z_0 = 1$.

Пример 7. Найти образы при отображении $w = z^2$ следующих областей:

a) $D = \left\{z : -\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2}\right\}$; b) $D = \{z : \operatorname{Im} z < -1\}$.

Пример 8. Найти образы заданных множеств при указанных отображениях:

a) $D = \left\{z : 1 < |z| < 2,\; 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = z^4$; b) $D = \{z : \operatorname{Re} z = 2\}$, $w = z^2$.

Пример 9. Найти образы следующих областей при отображении ветвью функции $w = \sqrt{z}$, выделяемой ее значением в указанной точке: a) $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\sqrt{i} = -\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$;

b) $D = \{z : (\operatorname{Im} z)^2 > 2\operatorname{Re} z + 1\}$, $\sqrt{-1} = -i$.

Пример 10. Найти образы следующих множеств при отображении функцией Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$:

a) $D = \left\{z : |z| < 1,\; z \notin \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right\}$;

b) $D = \left\{z : \dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{3\pi}{4},\; z \notin [0, i]\right\}$.

Вопросы к экзамену

Вопросы для проверки уровня обучаемости «ЗНАТЬ»

1. Основные понятия теории рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Достаточные признаки сходимости числовых рядов (признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак Коши).
2. Знакочередующиеся ряды Признак Лейбница.
3. Действия над рядами Ряды с комплексными числами.

4. Функциональные ряды. Основные понятия. Признаки сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Тейлора и Маклорена. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
5. Ряды Фурье. Ряды Фурье для четных, нечетных непериодических функций. Неравенство Бесселя. Равенство Ляпунова–Парсеваля. Ряды Фурье в комплексной форме. Интеграл Фурье.
6. Формы записи комплексных чисел и действия над ними.
7. Функции комплексного переменного.
8. Предел последовательности комплексных переменных. Непрерывность.
9. Дифференцирование функций комплексного переменного. Понятие аналитической функции. Условия Коши–Римана. Вычисление производных. Геометрический смысл производной.
10. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши. Интеграл Коши
11. Ряды функций комплексного переменного. Числовые ряды. Основные признаки сходимости. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора. Ряды Лорана.
12. Классификация особых точек.
13. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов.

Вопросы для проверки уровня обучаемости «УМЕТЬ»

1. Применять признаки сходимости к исследованию сходимости ряда.
2. Находить область сходимости функционального ряда.
3. Раскладывать функцию в ряд Тейлора.
4. Применять ряды к приближенным вычислениям.
5. Вычислять коэффициенты ряда Фурье.

Руководитель направления 03.03.02

Директор института физических исследований и технологий, д.ф.-м.н., профессор

О.Т. Лоза