

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Ястребов Олег Александрович  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 26.05.2026 17:33:18  
Уникальный программный ключ:  
ca953a01204891083f939673078ef1a989aae18a

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»  
Факультет физико-математических и естественных наук**  
(наименование основного учебного подразделения (ОУП)-разработчика ОП ВО)

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

(наименование дисциплины/модуля)

**Рекомендована МССН для направления подготовки/специальности:**

### **02.03.01 МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ**

(код и наименование направления подготовки/специальности)

**Освоение дисциплины ведется в рамках реализации основной профессиональной образовательной программы высшего образования (ОП ВО):**

### **МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ**

(наименование (профиль/специализация) ОП ВО)

**2026 г.**

## 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Марковские процессы» входит в программу бакалавриата «Математика и компьютерные науки» по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» и изучается в 5 семестре 3 курса. Дисциплину реализует Кафедра теории вероятностей и кибербезопасности. Дисциплина состоит из 3 разделов и 11 тем и направлена на изучение основных разделов теории случайных процессов, а именно: определение и классификация случайных процессов, числовые характеристики случайных процессов; цепи Маркова - канонический вид матрицы переходных вероятностей, вероятностное распределение, числовые характеристики, предельное распределение; марковские процессы - вероятностное и предельное распределения, построение вложенной цепи Маркова, простейшие марковские процессы

Целью освоения дисциплины является приобретение знаний и навыков построения и исследования случайных процессов, функционирующих в непрерывном и дискретном времени и применении их при моделировании реальных процессов и явлений

## 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоение дисциплины «Марковские процессы» направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций (части компетенций):

*Таблица 2.1. Перечень компетенций, формируемых у обучающихся при освоении дисциплины (результаты освоения дисциплины)*

Шифр	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции (в рамках данной дисциплины)
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук; ОПК-1.2 Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности; ОПК-1.3 Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний;

## 3. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО

Дисциплина «Марковские процессы» относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы высшего образования.

В рамках образовательной программы высшего образования обучающиеся также осваивают другие дисциплины и/или практики, способствующие достижению запланированных результатов освоения дисциплины «Марковские процессы».

*Таблица 3.1. Перечень компонентов ОП ВО, способствующих достижению запланированных результатов освоения дисциплины*

Шифр	Наименование компетенции	Предшествующие дисциплины/модули, практики*	Последующие дисциплины/модули, практики*
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	Символьные методы математического анализа; Алгебра и аналитическая геометрия; Дискретная математика и математическая логика; Теория вероятностей и математическая статистика; Теория конечных графов; Символьные и численные методы интегрирования дифференциальных уравнений; Компьютерная геометрия; Компьютерная алгебра; Физика; Основы машинного обучения и нейронные сети; Химия и экология окружающей среды;	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы); Математическое моделирование; Имитационное моделирование; Дифференциальная геометрия и топология; Функциональный анализ и теория аппроксимации; Вариационное исчисление и классическая механика; Пакеты символьных вычислений в профессиональной деятельности;

\* - заполняется в соответствии с матрицей компетенций и СУП ОП ВО

\*\* - элективные дисциплины /практики

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Марковские процессы» составляет «4» зачетные единицы.

Таблица 4.1. Виды учебной работы по периодам освоения образовательной программы высшего образования для очной формы обучения.

Вид учебной работы	ВСЕГО, ак.ч.		Семестр(-ы)
			5
<i>Контактная работа, ак.ч.</i>	54		54
Лекции (ЛК)	18		18
Лабораторные работы (ЛР)	0		0
Практические/семинарские занятия (СЗ)	36		36
<i>Самостоятельная работа обучающихся, ак.ч.</i>	63		63
<i>Контроль (экзамен/зачет с оценкой), ак.ч.</i>	27		27
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	<b>ак.ч.</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
	<b>зач.ед.</b>	<b>4</b>	<b>4</b>

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 5.1. Содержание дисциплины (модуля) по видам учебной работы

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы*
Раздел 1	Случайные процессы, основные характеристики	1.1	Определение случайного процесса, классификация случайных процессов	Определение случайного процесса (с.п.) - случайной функции. Сечение случайного процесса. Классификация случайных процессов по времени и множеству состояний. Элементарная случайная функция. Законы распределения случайных процессов: конечномерные распределения (одномерный и двумерный случай), теорема Колмогорова	ЛК, СЗ
		1.2	Числовые характеристики случайных процессов	Основные характеристики случайных процессов: математическое ожидание с.п., начальные и центральные моменты с.п., корреляционная функция с.п., нормированная корреляционная функция с.п.	ЛК, СЗ
Раздел 2	Цепи Маркова как дискретные по времени марковские процессы	2.1	Определение цепи Маркова. Матрица переходных вероятностей. Вероятностное распределение.	Определение цепи Маркова в дискретном времени. Марковское свойство. Матрица вероятностей переходов. Вероятность перехода за n шагов. Уравнение Колмогорова-Чепмена	ЛК, СЗ
		2.2	Классификация состояний цепи Маркова	Классификация состояний: сообщающиеся, периодические, поглощающие	ЛК, СЗ
		2.3	Канонический вид матрицы переходных вероятностей цепи Маркова. Числовые характеристики	Обрывающиеся и поглощающие цепи. Фундаментальная матрица. Вероятность первого достижения и связанные с ней характеристики	ЛК, СЗ
		2.4	Предельное распределение цепи Маркова	Эргодические цепи Маркова с конечным множеством состояний. Финальное (стационарное) распределение цепи Маркова. Система уравнений равновесия. Вероятность возвращения и время возвращения	ЛК, СЗ
Раздел 3	Марковские процессы	3.1	Определение марковского процесса, матрица переходных вероятностей	Определение марковского процесса, матрица переходных вероятностей	ЛК, СЗ
		3.2	Примеры марковских процессов	Пуассоновский процесс, процесс чистого размножения, процесс размножения и гибели	ЛК, СЗ
		3.3	Матрица интенсивностей переходов. Дифференциальные уравнения Колмогорова-Чепмена. Вероятностное распределение марковского процесса.	Свойства переходных вероятностей цепи Маркова с непрерывным временем. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Инфинитезимальная матрица. Прямые и обратные уравнения Колмогорова-Чепмена.	ЛК, СЗ
		3.4	Классификация состояний марковского	Классификация состояний: сообщающиеся, существенные и	ЛК, СЗ

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы*
			процесса. Предельные вероятности марковского процесса	несущественные, поглощающие, возвратные и невозвратные. Условия существования предельного распределения, вычисление предельного распределения	
		3.5	Построение вложенной цепи Маркова для марковского процесса	Построение матрицы переходных вероятностей вложенной цепи Маркова, вычисление предельного распределения вложенной цепи Маркова	ЛК, СЗ

\* - заполняется только по **ОЧНОЙ** форме обучения: ЛК – лекции; ЛР – лабораторные работы; СЗ – практические/семинарские занятия.

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 6.1. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Тип аудитории	Оснащение аудитории	Специализированное учебное/лабораторное оборудование, ПО и материалы для освоения дисциплины (при необходимости)
Лекционная	Аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная комплектом специализированной мебели; доской (экраном) и техническими средствами мультимедиа презентаций.	-
Семинарская	Аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная комплектом специализированной мебели и техническими средствами мультимедиа презентаций.	-
Для самостоятельной работы	Аудитория для самостоятельной работы обучающихся (может использоваться для проведения семинарских занятий и консультаций), оснащенная комплектом специализированной мебели и компьютерами с доступом в ЭИОС.	Компьютер/ноутбук с доступом к сети Интернет и электронно-образовательной среде университета, браузер, программное обеспечение для просмотра pdf-файлов, Яндекс Телемост или аналог. Дополнительное программное обеспечение: MS Office или LibreOffice

\* - аудитория для самостоятельной работы обучающихся указывается **ОБЯЗАТЕЛЬНО!**

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Каштанов, В. А. Случайные процессы : учебник и практикум для вузов / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 156 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04482-9.

2. Рыков В.В., Козырев Д.В. Основы теории массового обслуживания (Основной курс: марковские модели, методы марковизации) [электронное издание]: Учебное пособие / Рыков В.В., Козырев Д.В. - М.: ИНФРА-М, 2016. - 223 с. ил. - ISBN 978-5-16-010945-9

3. Рыков В.В. Теория случайных процессов [текст]: Учебное пособие / Рыков В.В. - М.: РУДН, 2009. - 233 с.: ил. - ISBN 978-5-209-03067-6

4. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2 : Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения [электронное издание] /

М.Я. Кельберт, Ю.М. Сухов; Пер. с англ. Л. Сахно; Под ред. Ю.Мишуры. - М. : МЦНМО, 2010. - 560 с. : ил. - ISBN 978-5-94057-557-3

*Дополнительная литература:*

1. Теория случайных процессов. Диффузионные процессы и процессы с независимыми приращениями : конспект лекций / В.В. Рыков. - М. : Изд-во РУДН, 2010. - 107 с.

2. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М. : Кнорус, 2018. - 448 с. : ил. - ISBN: 978-5-406-00746-4

3. Энатская, Н. Ю. Математическая статистика и случайные процессы : учебное пособие для вузов / Н. Ю. Энатская. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 201 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9808-5.

4. Курс теории случайных процессов : Учебное пособие для вузов / А.Д. Вентцель. - 2-е изд., доп. - М. : Наука, 1996. - 400 с. : ил. - ISBN 5-02-013948-3

*Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:*

1. ЭБС РУДН и сторонние ЭБС, к которым студенты университета имеют доступ на основании заключенных договоров

- Электронно-библиотечная система РУДН – ЭБС РУДН

<https://mega.rudn.ru/MegaPro/Web>

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>

- ЭБС Юрайт <http://www.biblio-online.ru>

- ЭБС «Консультант студента» [www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru)

- ЭБС «Знаниум» <https://znanium.ru/>

2. Базы данных и поисковые системы

- Sage <https://journals.sagepub.com/>

- Springer Nature Link <https://link.springer.com/>

- Wiley Journal Database <https://onlinelibrary.wiley.com/>

- Научометрическая база данных Lens.org <https://www.lens.org>

*Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся при освоении дисциплины/модуля\*:*

1. Курс лекций по дисциплине «Марковские процессы».

\* - все учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся размещаются в соответствии с действующим порядком на странице дисциплины **в ТУИС!**

**РАЗРАБОТЧИК:**

Доцент кафедры теории  
вероятностей и  
кибербезопасности

*Должность, БУП*

*Подпись*

Зарядов Иван Сергеевич

*Фамилия И.О.*

**РУКОВОДИТЕЛЬ БУП:**

Заведующий кафедрой теории  
вероятностей и  
кибербезопасности

*Должность БУП*

*Подпись*

Самуйлов Константин

Евгеньевич

*Фамилия И.О.*

**РУКОВОДИТЕЛЬ ОП ВО:**

Заведующий кафедрой теории  
вероятностей и  
кибербезопасности

*Должность, БУП*

*Подпись*

Самуйлов Константин

Евгеньевич

*Фамилия И.О.*