

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Ястребов Олег Александрович  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 05.05.2026 16:44:52  
Уникальный программный ключ:  
ca953a0120d891083f939673078ef1a989dae18a

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»**

**Институт экологии**

(наименование основного учебного подразделения (ОУП)-разработчика ОП ВО)

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ**

(наименование дисциплины/модуля)

**Рекомендована МССН для направления подготовки/специальности:**

### **01.04.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

(код и наименование направления подготовки/специальности)

**Освоение дисциплины ведется в рамках реализации основной профессиональной образовательной программы высшего образования (ОП ВО):**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ЭКОЛОГИИ И ЭКОНОМИКЕ**

(наименование (профиль/специализация) ОП ВО)

**2026 г.**

## 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Вариационное исчисление и оптимальное управление» входит в программу магистратуры «Моделирование и прогнозирование процессов в экологии и экономике» по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и изучается в 3 семестре 2 курса. Дисциплину реализует Департамент экологической безопасности и менеджмента качества продукции. Дисциплина состоит из 5 разделов и 13 тем и направлена на изучение основных понятий и методов вариационного исчисления и оптимального управления.

Целью освоения дисциплины является овладение теоретическими и практическими методами вариационного исчисления и оптимального управления, включая формулирование и решение задач с ограничениями, применение принципа максимума Понтрягина и динамического программирования, а также развитие навыков моделирования и анализа динамических систем для решения прикладных задач в инженерных и экономических областях.

## 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоение дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций (части компетенций):

*Таблица 2.1. Перечень компетенций, формируемых у обучающихся при освоении дисциплины (результаты освоения дисциплины)*

Шифр	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции (в рамках данной дисциплины)
УК-6	Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 умеет оценивать свои ресурсы и их пределы (личностные, ситуативные, временные), целесообразно их использует; УК-6.2 способен определять образовательные потребности и способы совершенствования собственной (в том числе профессиональной) деятельности на основе самооценки; УК-6.3 владеет навыками выстраивания гибкой профессиональной траектории с учетом накопленного опыта профессиональной деятельности, динамично изменяющихся требований рынка труда и стратегии личного развития;
ПК-10	Способен разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного обучения	ПК-10.1 Знает особенности и стандарты разработки учебно-методических комплексов для электронного обучения; ПК-10.2 Владеет средствами и методами электронного обучения; ПК-10.3 Умеет использовать средства и методы электронного обучения при разработке обучающих материалов;
ПК-9	Способен к преподаванию математических дисциплин и информатики в общеобразовательных организациях, профессиональных образовательных организациях и образовательных организациях высшего образования	ПК-9.1 Знает основные математические методы и прикладные программные продукты; ПК-9.2 Знает особенности преподавания математических дисциплин и информатики; ПК-9.3 Владеет навыками изложения математических концепций и методов и способов использования программных продуктов для решения прикладных задач;

## 3. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО

Дисциплина «Вариационное исчисление и оптимальное управление» относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы высшего образования.

В рамках образовательной программы высшего образования обучающиеся также осваивают другие дисциплины и/или практики, способствующие достижению запланированных результатов освоения дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление».

Таблица 3.1. Перечень компонентов ОП ВО, способствующих достижению запланированных результатов освоения дисциплины

Шифр	Наименование компетенции	Предшествующие дисциплины/модули, практики*	Последующие дисциплины/модули, практики*
УК-6	Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки		
ПК-10	Способен разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного обучения	Математическая статистика и эконометрика; Дифференциальные уравнения; Математические методы исследования процессов в экологии и экономике;	
ПК-9	Способен к преподаванию математических дисциплин и информатики в общеобразовательных организациях, профессиональных образовательных организациях и образовательных организациях высшего образования	Языки и методы программирования; Дифференциальные уравнения; Математические методы исследования процессов в экологии и экономике;	

\* - заполняется в соответствии с матрицей компетенций и СУП ОП ВО

\*\* - элективные дисциплины /практики

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» составляет «4» зачетные единицы.

Таблица 4.1. Виды учебной работы по периодам освоения образовательной программы высшего образования для очной формы обучения.

Вид учебной работы	ВСЕГО, ак.ч.		Семестр(-ы)
			3
<i>Контактная работа, ак.ч.</i>	36		36
Лекции (ЛК)	18		18
Лабораторные работы (ЛР)	0		0
Практические/семинарские занятия (СЗ)	18		18
<i>Самостоятельная работа обучающихся, ак.ч.</i>	96		96
<i>Контроль (экзамен/зачет с оценкой), ак.ч.</i>	12		12
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	<b>ак.ч.</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
	<b>зач.ед.</b>	<b>4</b>	<b>4</b>

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 5.1. Содержание дисциплины (модуля) по видам учебной работы

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы*
Раздел 1	Постановка задач оптимального управления	1.1	Основные понятия и терминология	Понятие управляемой динамической системы. Вектор состояния, вектор управления. Модель движения. Целевой функционал (критерий качества): терминальный, интегральный, смешанный. Ограничения на состояние и управление (фазовые, управляющие). Задача оптимального управления. Примеры: задача быстрогодействия, задача минимальной энергии, задача управления температурным режимом. Классификация: задачи с фиксированным и свободным временем, с фиксированным и свободным правым концом.	ЛК, СЗ
		1.2	Примеры задач оптимального управления	Разбор конкретных прикладных задач: управление движением материальной точки (перемещение из точки А в В с минимальными затратами топлива), управление инвестиционным портфелем (максимизация конечного капитала при ограниченном риске), управление популяцией (поддержание оптимальной численности при промысле), управление температурой в производственном процессе. Построение математической модели каждой задачи: фазовые переменные, управление, уравнения динамики, функционал, ограничения. Предварительное обсуждение методов решения.	ЛК, СЗ
Раздел 2	Интегральное вариационное исчисление	2.1	Простейшая задача интегрального вариационного исчисления	Функционал, граничные условия. Необходимое условие экстремума – уравнение Эйлера. Вывод из условия стационарности первой вариации. Примеры: задача о брахистохроне, задача о кратчайшей линии. Решение уравнения Эйлера для простейших интегрантов.	ЛК, СЗ
		2.2	Изопериметрическая задача	Задача с дополнительным интегральным ограничением. Метод множителя Лагранжа. Уравнение Эйлера для новой подынтегральной функции. Пример: задача о максимуме площади при заданном периметре (изопериметрическая задача в вариационном исчислении). Определение множителя $\lambda$ из условия выполнения изопериметрического ограничения.	ЛК, СЗ
		2.3	Задача с подвижными концами	Вариация граничных условий. Условия трансверсальности. Случаи: свободный конец (вертикальная касательная), конец на	ЛК, СЗ

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы*
				заданной кривой. Пример: задача о нахождении кривой, соединяющей точку с заданной прямой, с минимальной длиной (решение – перпендикуляр к прямой). Физическая интерпретация: условия естественных граничных условий в задачах механики.	
		2.4	Классы искомых функций	Пространства непрерывных и кусочно-гладких функций. Сильные и слабые вариации. Необходимые условия экстремума: условие Лежандра (сильный экстремум), условие Вейерштрасса. Понятие поля экстремалей. Достаточные условия (условие Якоби). Угловые точки (изломы) и условия Вейерштрасса – Эрдмана. Примеры задач с ломаными экстремалами.	ЛК, СЗ
Раздел 3	Гладкие задачи с ограничениями в виде равенств и неравенств	3.1	Условия экстремума функционалов	Вариационная задача с ограничениями типа равенств (дифференциальные связи). Понятие множителей Лагранжа для функционалов. Гамильтонова формулировка. Вывод системы Эйлера – Лагранжа для задач с несколькими искомыми функциями. Пример: задача геодезической линии на поверхности.	ЛК, СЗ
		3.2	Правило множителей Лагранжа	Метод неопределённых множителей Лагранжа для задач с интегральными и дифференциальными связями. Функционал Лагранжа. Стационарные точки. Пример: задача Дидоны (максимум площади при заданной длине границы). Численное решение с использованием Excel: для простейших случаев можно свести к системе уравнений и решить с помощью «Поиска решения».	ЛК, СЗ
Раздел 4	Оптимизация в бесконечномерных пространствах	4.1	Градиентные методы	Бесконечномерный градиент функционала. Метод наискорейшего спуска для задач вариационного исчисления. Сходимость, выбор шага. Реализация в Excel.	ЛК, СЗ
		4.2	Задача линейного ОУ с квадратичным функционалом	Линейная система и решение – линейная обратная связь, связь с уравнением Риккати. Уравнение Штурма Лиувилля.	ЛК, СЗ
		4.3	Оптимальное управление температурой стержня	Распределённая система: уравнение теплопроводности с управлением на границе или распределённым управлением. Минимизация функционала отклонения от желаемой температуры. Сведение к задаче оптимального управления с частными производными. Методы решения: принцип максимума для распределённых систем, метод конечных	ЛК, СЗ

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы*
				разностей + оптимизация.	
Раздел 5	Методы решения задач оптимального управления	5.1	Принцип максимума Понтрягина	Принцип максимума как необходимое условие оптимальности для задач с ограничениями на управление. Формулировка, сопряжённая система, условие максимума: трансверсальные условия на правом конце. Пример: задача быстрогодействия (переключение управления).	ЛК, СЗ
		5.2	Динамическое программирование Беллмана	Принцип оптимальности Беллмана. Уравнение Беллмана для задачи оптимального управления. Функция цены. Решение в обратном времени. Примеры: задача управления запасами, задача оптимального инвестирования.	ЛК, СЗ

\* - заполняется только по **ОЧНОЙ** форме обучения: ЛК – лекции; ЛР – лабораторные работы; СЗ – практические/семинарские занятия.

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 6.1. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Тип аудитории	Оснащение аудитории	Специализированное учебное/лабораторное оборудование, ПО и материалы для освоения дисциплины (при необходимости)
Лекционная	Аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная комплектом специализированной мебели; доской (экраном) и техническими средствами мультимедиа презентаций.	
Семинарская	Аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная комплектом специализированной мебели и техническими средствами мультимедиа презентаций.	
Для самостоятельной работы	Аудитория для самостоятельной работы обучающихся (может использоваться для проведения семинарских занятий и консультаций), оснащенная комплектом специализированной мебели и компьютерами с доступом в ЭИОС.	

\* - аудитория для самостоятельной работы обучающихся указывается **ОБЯЗАТЕЛЬНО!**

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: Задачи и примеры с подробными решениями | Краснов М.Л., Макаренко Г.И., 2026

2. Толпегин, О. А. Математическое программирование. Вариационное исчисление : учебное пособие для вузов / О. А. Толпегин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 233 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11755-4

Дополнительная литература:

1. Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С.В. и др. Оптимальное управление, МЦНМО, 2008.

2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление, М.: Наука, 1979

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

1. ЭБС РУДН и сторонние ЭБС, к которым студенты университета имеют доступ на основании заключенных договоров

- Электронно-библиотечная система РУДН – ЭБС РУДН

<https://mega.rudn.ru/MegaPro/Web>

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>
- ЭБС Юрайт <http://www.biblio-online.ru>
- ЭБС «Консультант студента» [www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru)
- ЭБС «Знаниум» <https://znaniium.ru/>

2. Базы данных и поисковые системы

- Sage <https://journals.sagepub.com/>
- Springer Nature Link <https://link.springer.com/>
- Wiley Journal Database <https://onlinelibrary.wiley.com/>
- Научометрическая база данных Lens.org <https://www.lens.org>

*Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся при освоении дисциплины/модуля\*:*

1. Курс лекций по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление».

\* - все учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся размещаются в соответствии с действующим порядком на странице дисциплины **в ТУИС!**

**РАЗРАБОТЧИК:**

Доцент

*Должность, БУП*

*Подпись*

Шатлов Андрей

Борисович

*Фамилия И.О.*

**РУКОВОДИТЕЛЬ БУП:**

Заведующий департаментом

*Должность БУП*

*Подпись*

Савенкова Елена

Викторовна

*Фамилия И.О.*

**РУКОВОДИТЕЛЬ ОП ВО:**

Доцент

*Должность, БУП*

*Подпись*

Ледацева Татьяна

Николаевна

*Фамилия И.О.*