

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Ястребов Олег Александрович

Должность: Ректор

Дата подписания: 22.05.2026 14:55:10

Уникальный программный ключ:

ca953a01204891083f939673078ef1a989dae18a

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования**

**«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»**

**Факультет искусственного интеллекта**

(наименование основного учебного подразделения (ОУП)-разработчика ОП ВО)

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **ЧИСЛЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

(наименование дисциплины/модуля)

**Рекомендована МССН для направлений подготовки:**

**02.03.02 ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ  
ТЕХНОЛОГИИ;**

**09.03.03 ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА**

(код и наименование направления подготовки/специальности)

**Освоение дисциплины ведется в рамках реализации основной профессиональной образовательной программы высшего образования (ОП ВО):**

### **ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ: РАЗРАБОТКА И ОБУЧЕНИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

(наименование (профиль/специализация) ОП ВО)

**2026 г.**

## 1. ЦЕЛЬ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Численная линейная алгебра» входит в программу бакалавриата «Искусственный интеллект: разработка и обучение интеллектуальных систем» по направлениям подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии и 09.03.03 Прикладная информатика, и изучается в 3 семестре 2 курса. Дисциплину реализует Кафедра прикладного искусственного интеллекта. Дисциплина состоит из 3 разделов и 35 тем и направлена на изучение численных методов решения основных задач линейной алгебры — систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения и сингулярные числа, — включая прямые и итерационные алгоритмы, матричные разложения, анализ устойчивости и обусловленности вычислений, работу с разреженными матрицами, а также приложения численных методов к задачам машинного обучения: метод наименьших квадратов, метод главных компонент, низкоранговые аппроксимации и градиентные методы оптимизации.

Целью освоения дисциплины является формирование у студентов системных знаний и практических навыков применения численных методов линейной алгебры для построения и анализа математических моделей в задачах машинного обучения и обработки данных, включая способность оценивать устойчивость и вычислительную сложность алгоритмов, обосновывать выбор метода для конкретной задачи, проводить вычислительные эксперименты и использовать результаты для оптимизации обучения и ускорения инференса моделей ИИ

## 2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Освоение дисциплины «Численная линейная алгебра» направлено на формирование у обучающихся следующих компетенций (части компетенций):

*Таблица 2.1. Перечень компетенций, формируемых у обучающихся при освоении дисциплины (результаты освоения дисциплины)*

Шифр	Компетенция	Индикаторы достижения компетенции (в рамках данной дисциплины)
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Умеет строить математические модели процессов и явлений, применять методы численного анализа и оптимизации для решения задач машинного обучения и обработки данных; ОПК-1.3 Владеет навыками проведения вычислительных экспериментов, анализа их результатов и обоснования выбора математического аппарата для решения конкретных профессиональных задач в области ИИ;
FC-1	Способен проводить передовые исследования в области архитектур, алгоритмов МО, оптимизации и математики	FC-1.3 Развивает методы ускорения обучения;
MF-3	Способен применять современные методы оптимизации для обучения моделей машинного обучения, настройки гиперпараметров и решения задач искусственного интеллекта	MF-3.1 Применяет методы оптимизации для разработки и исследования обучающих алгоритмов;

### 3. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО

Дисциплина «Численная линейная алгебра» относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины (модули)» образовательной программы высшего образования.

В рамках образовательной программы высшего образования обучающиеся также осваивают другие дисциплины и/или практики, способствующие достижению запланированных результатов освоения дисциплины «Численная линейная алгебра».

Таблица 3.1. Перечень компонентов ОП ВО, способствующих достижению запланированных результатов освоения дисциплины

Шифр	Наименование компетенции	Предшествующие дисциплины/модули, практики*	Последующие дисциплины/модули, практики*
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	Линейная алгебра; Дискретная математика; Математический анализ;	Дифференциальные уравнения; Методы машинного обучения; Оптимизация моделей машинного обучения; Основы глубокого обучения; Нейронные сети;
МФ-3	Способен применять современные методы оптимизации для обучения моделей машинного обучения, настройки гиперпараметров и решения задач искусственного интеллекта		Эксплуатационная практика (учебная); Оптимизация моделей машинного обучения; Нейронные сети; Методы машинного обучения; Практическая подготовка на проектах отраслевых промышленных партнеров;
ФС-1	Способен проводить передовые исследования в области архитектур, алгоритмов МО, оптимизации и математики	Линейная алгебра; Математический анализ; Введение в искусственный интеллект;	Эксплуатационная практика (учебная); Преддипломная практика; Технологическая (проектно-технологическая) практика (производственная); Методы машинного обучения; Оптимизация моделей машинного обучения; Нейронные сети; Практическая подготовка на проектах отраслевых промышленных партнеров; Основы глубокого обучения; Параллельное и распределенное программирование; Массово-параллельные вычисления в машинном обучении (GPU);

\* - заполняется в соответствии с матрицей компетенций и СУП ОП ВО

\*\* - элективные дисциплины /практики

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Численная линейная алгебра» составляет «4» зачетные единицы.

Таблица 4.1. Виды учебной работы по периодам освоения образовательной программы высшего образования для очной формы обучения.

Вид учебной работы	ВСЕГО, ак.ч.		Семестр(-ы)
			3
<i>Контактная работа, ак.ч.</i>	68		68
Лекции (ЛК)	17		17
Лабораторные работы (ЛР)	0		0
Практически/семинарские занятия (СЗ)	51		51
<i>Самостоятельная работа обучающихся, ак.ч.</i>	49		49
<i>Контроль (экзамен/зачет с оценкой), ак.ч.</i>	27		27
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	<b>ак.ч.</b>	<b>144</b>	<b>144</b>
	<b>зач.ед.</b>	<b>4</b>	<b>4</b>

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 5.1. Содержание дисциплины (модуля) по видам учебной работы

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы *	Формируемые индикаторы
Раздел 1	Прямые методы решения СЛАУ и матричные разложения	1.1	Арифметика с плавающей запятой и источники ошибок	Представление чисел с плавающей запятой (IEEE 754). Машинное эпсилон. Ошибки округления, катастрофическое сокращение. Прямая и обратная ошибки. Устойчивость алгоритмов. Связь с точностью вычислений при обучении нейронных сетей (FP32, FP16, BF16)	ЛК	ОПК-1.3, FC-1.3
		1.2	Обусловленность задач и матричные нормы	Векторные нормы ( $l_1$ , $l_2$ , $l_\infty$ ) и согласованные матричные нормы (спектральная, Фробениуса). Число обусловленности матрицы $\text{cond}(A)$ . Связь числа обусловленности с чувствительностью решения к возмущениям данных. Плохо обусловленные системы в задачах МО	ЛК	ОПК-1.2, ОПК-1.3
		1.3	Метод Гаусса и LU-разложение	Метод Гаусса с частичным выбором ведущего элемента. LU-разложение: существование, единственность, алгоритм. $PA = LU$ . Вычислительная сложность $O(n^3)$ . Применение: решение СЛАУ, вычисление определителя, обращение матрицы. Связь с решением нормальных уравнений в линейной регрессии	ЛК	ОПК-1.2, MF-3.1
		1.4	Практикум: арифметика с плавающей запятой — эксперименты	Экспериментальное исследование ошибок округления: катастрофическое сокращение, потеря ассоциативности суммирования. Алгоритм Кахана для точного суммирования. Сравнение FP32/FP64 на примере обучения модели. Реализация в Python (NumPy)	СЗ	ОПК-1.3, FC-1.3
		1.5	Практикум: матричные нормы и число обусловленности	Вычисление норм матриц и числа обусловленности ( <code>numpy.linalg.cond</code> ). Экспериментальное исследование: влияние обусловленности на точность решения СЛАУ. Матрицы Гильберта как пример плохой обусловленности	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3
		1.6	Практикум: LU-разложение — реализация и анализ	Программная реализация LU-разложения без выбора ведущего элемента и с частичным выбором. Сравнение устойчивости. Использование <code>scipy.linalg.lu</code> . Замеры времени работы для матриц разного размера	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1
		1.7	Практикум: разложение Холецкого	Разложение Холецкого $A = LL^T$ для положительно определённых матриц. Алгоритм, сложность $O(n^3/3)$ . Преимущества: вдвое быстрее LU, гарантия устойчивости.	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы *	Формируемые индикаторы
				Применение: решение нормальных уравнений для гребневой регрессии. <code>scipy.linalg.cholesky</code>		
		1.8	Практикум: QR-разложение — метод Грама — Шмидта и отражения Хаусхолдера	Ортогонализация Грама — Шмидта (классическая и модифицированная). Отражения Хаусхолдера. QR-разложение: $A = QR$ . Устойчивость различных подходов. Связь с методом наименьших квадратов	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1
		1.9	Практикум: решение задачи наименьших квадратов	Нормальные уравнения $A^T A x = A^T b$ : проблемы обусловленности. Решение через QR-разложение: $R x = Q^T b$ . Сравнение устойчивости обоих подходов. Связь с линейной регрессией. <code>numpy.linalg.lstsq</code>	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1, ОПК-1.3
		1.10	Практикум: разреженные матрицы — хранение и операции	Форматы хранения разреженных матриц: COO, CSR, CSC. Библиотека <code>scipy.sparse</code> . Эффективные операции: умножение матрицы на вектор, решение СЛАУ с разреженными матрицами. Связь с графовыми нейронными сетями и матрицами смежности	СЗ	FC-1.3, ОПК-1.3
		1.11	Практикум: LU для разреженных систем и заполнение	Проблема заполнения (fill-in) при LU-разложении разреженных матриц. Перестановки для уменьшения заполнения (AMD, RCM). Библиотека <code>scipy.sparse.linalg</code> . Масштабирование на большие системы	СЗ	FC-1.3, ОПК-1.3
		1.12	Практикум: комплексная задача — регрессия через матричные разложения	Сквозная задача: построение модели линейной регрессии через LU, Холецкого, QR. Сравнение методов по точности, устойчивости, времени работы. Анализ обусловленности матрицы признаков. Выводы о выборе метода	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3, MF-3.1
Раздел 2	Итерационные методы и задачи на собственные значения	2.1	Итерационные методы решения СЛАУ	Метод простой итерации (метод Рундсона). Условие сходимости: спектральный радиус. Метод Якоби. Метод Гаусса — Зейделя. Метод последовательной верхней релаксации (SOR). Сравнение скорости сходимости. Преимущества для больших разреженных систем	ЛК	ОПК-1.2, MF-3.1
		2.2	Методы подпространств Крылова	Пространства Крылова. Метод сопряжённых градиентов (CG) для положительно определённых систем: идея, сходимость, связь с обусловленностью. Метод GMRES для несимметричных систем. Предобуславливание: идея и типовые предобуславливатели. Связь CG с оптимизацией квадратичных функций	ЛК	MF-3.1, ОПК-1.2
		2.3	Задача на собственные значения:	Степенной метод нахождения максимального собственного	ЛК	ОПК-1.2,

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы	Содержание темы	Вид учебной работы *	Формируемые индикаторы
			степенной метод и QR-алгоритм		ОПК-1.3
		2.4	Практикум: метод Якоби и Гаусса — Зейделя	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1
		2.5	Практикум: метод SOR и влияние параметра релаксации	СЗ	MF-3.1, ОПК-1.3
		2.6	Практикум: метод сопряжённых градиентов	СЗ	MF-3.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3
		2.7	Практикум: GMRES и предобуславливание	СЗ	MF-3.1, FC-1.3
		2.8	Практикум: степенной метод и обратная итерация	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3
		2.9	Практикум: QR-алгоритм для собственных значений	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3
		2.10	Практикум: вычисление нескольких собственных значений для больших матриц	СЗ	ОПК-1.2, FC-1.3, MF-3.1

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы		Содержание темы	Вид учебной работы *	Формируемые индикаторы
				наименьших собственных значений лапласиана графа)		
		2.11	Практикум: градиентный спуск как итерационный метод линейной алгебры	Градиентный спуск для минимизации $\ Ax - b\ ^2$ . Скорость сходимости и число обусловленности. Сравнение GD, CG, прямых методов. Мотивация адаптивных методов (предобуславливание $\rightarrow$ Adam, AdaGrad). Визуализация траекторий	СЗ	MF-3.1, ОПК-1.3, FC-1.3
		2.12	Практикум: комплексная задача — итерационные методы на больших данных	Решение большой разреженной системы ( $10^5 \times 10^5$ ): сравнение прямых (LU sparse) и итерационных (CG, GMRES) методов по времени, памяти и точности. Выбор предобуславливателя. Формулирование рекомендаций по выбору метода	СЗ	MF-3.1, ОПК-1.3, FC-1.3
Раздел 3	Сингулярное разложение и приложения к машинному обучению	3.1	Сингулярное разложение (SVD)	Определение SVD: $A = U\Sigma V^T$ . Связь с собственными значениями $AA^T$ и $A^T A$ . Геометрическая интерпретация: SVD как последовательность вращения, масштабирования и вращения. Компактная и усечённая формы SVD. Алгоритмы вычисления: двусторонняя bidiagonalization	ЛК	ОПК-1.2, FC-1.3
		3.2	Низкоранговые аппроксимации и теорема Эккарта — Янга	Теорема Эккарта — Янга: наилучшее приближение матрицы рангом $k$ в нормах Фробениуса и спектральной. Усечённое SVD. Энергия, сохраняемая $k$ сингулярными значениями. Выбор ранга аппроксимации. Связь с сжатием данных и моделей	ЛК	ОПК-1.2, FC-1.3
		3.3	Рандомизированные методы линейной алгебры	Идея рандомизированного SVD: случайная проекция $\rightarrow$ малоразмерная задача $\rightarrow$ восстановление. Алгоритм Halko — Martinsson — Tropp. Рандомизированные алгоритмы умножения матриц. Преимущества: работа с данными, не помещающимися в память. Связь с методами обучения на подвыборках	ЛК	FC-1.3, ОПК-1.3
		3.4	Практикум: вычисление SVD и анализ спектра	Вычисление полного и усечённого SVD (numpy.linalg.svd, scipy.sparse.linalg.svds). Визуализация сингулярных значений (спектр). Оценка эффективного ранга матрицы. Задача: анализ спектра матрицы признаков реального датасета	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3
		3.5	Практикум: низкоранговая аппроксимация и сжатие изображений	Сжатие изображения с помощью усечённого SVD: восстановление при различных рангах $k$ , оценка ошибки, визуализация. Компромисс: ранг аппроксимации vs.	СЗ	FC-1.3, ОПК-1.2

Номер раздела	Наименование раздела дисциплины	Наименование темы	Содержание темы	Вид учебной работы *	Формируемые индикаторы
			качество vs. объём хранения. Связь с идеей сжатия нейронных сетей		
		3.6 Практикум: метод главных компонент (PCA) через SVD	Математическое обоснование PCA: центрирование данных, ковариационная матрица, связь с SVD. Реализация PCA через SVD вручную. Сравнение с <code>sklearn.decomposition.PCA</code> . Выбор числа компонент по доле объяснённой дисперсии	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1, FC-1.3
		3.7 Практикум: псевдообратная матрица и регуляризация	Псевдообратная матрица Мура — Пенроуза через SVD: $A^+ = V\Sigma^+U^T$ . Решение переопределённых и недоопределённых систем. Тихоновская регуляризация (гребневая регрессия) через SVD. Выбор параметра регуляризации	СЗ	ОПК-1.2, MF-3.1
		3.8 Практикум: рандомизированное SVD	Реализация рандомизированного SVD (алгоритм Halko — Martinsson — Tropp). Сравнение с точным SVD: точность, время работы. Применение к большим матрицам ( <code>sklearn.utils.extmath.randomized_svd</code> ). Рандомизированный PCA	СЗ	FC-1.3, ОПК-1.3
		3.9 Практикум: низкоранговые разложения для рекомендательных систем	Факторизация матрицы пользователь–объект: $U \approx WH$ . Связь с SVD и NMF. Реализация простейшей рекомендательной системы через SVD-разложение. Метрики качества рекомендаций. Проблема холодного старта	СЗ	MF-3.1, ОПК-1.2, FC-1.3
		3.10 Практикум: низкоранговые аппроксимации весовых матриц нейронных сетей	Идея LoRA: $W \approx W_0 + AB$ , где $A \in \mathbb{R}^{d \times r}$ , $B \in \mathbb{R}^{r \times k}$ , $r \ll \min(d, k)$ . Связь с усечённым SVD. Экономия памяти и вычислений. Демонстрация: сжатие линейного слоя нейронной сети через SVD, оценка потери качества. Связь с методами ускорения инференса	СЗ	FC-1.3, MF-3.1
		3.11 Практикум: комплексная задача — выбор численного метода для ML-задачи	Сквозная задача: задан датасет и задача МО → выбрать подходящее матричное разложение → обосновать выбор (обусловленность, размер, разреженность, требования к точности) → реализовать решение → провести вычислительный эксперимент → проанализировать результаты	СЗ	ОПК-1.2, ОПК-1.3, MF-3.1, FC-1.3

\* - заполняется только по **ОЧНОЙ** форме обучения: ЛК – лекции; ЛР – лабораторные работы; СЗ – практические/семинарские занятия.

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Таблица 6.1. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Тип аудитории	Оснащение аудитории	Специализированное учебное/лабораторное оборудование, ПО и материалы для освоения дисциплины (при необходимости)
Лекционная	Аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная комплектом специализированной мебели; доской (экраном) и техническими средствами мультимедиа презентаций.	
Семинарская	Аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная комплектом специализированной мебели и техническими средствами мультимедиа презентаций.	Персональные компьютеры, необходимое ПО
Для самостоятельной работы	Аудитория для самостоятельной работы обучающихся (может использоваться для проведения семинарских занятий и консультаций), оснащенная комплектом специализированной мебели и компьютерами с доступом в ЭИОС.	Персональные компьютеры, необходимое ПО

\* - аудитория для самостоятельной работы обучающихся указывается **ОБЯЗАТЕЛЬНО!**

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

*Основная литература:*

1. Шевцов, Г. С. Численные методы линейной алгебры : учебное пособие / Г. С. Шевцов, О. Г. Крюкова, Б. И. Мызникова. — 3-е изд. — Москва : ИНФРА-М, 2026. — 528 с. - ISBN 978-5-16-016796-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2211865>

*Дополнительная литература:*

1. Trefethen L.N., Bau D. Numerical Linear Algebra. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 388 p. ISBN 978-1-611976-16-6.

2. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. 5th ed. Johns Hopkins University Press, 2021. 808 p. ISBN 978-1-4214-0794-4.

3. Demmel J.W. Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 2017. 416 p. ISBN 978-1-611974-85-8.

4. Дайзенрот, М. П., Фейзал, А. А., Он, Ч. С. Математика в машинном обучении = Mathematics for machine learning : докопайся до сути / М. П. Дайзенрот, А. А. Фейзал, Ч. С. Он; пер. с англ. С. Черникова. — СПб. : Питер, 2024. — 507 с. : ил. — (Для профессионалов). — ISBN 978-5-4461-1788-8

5. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 3rd ed. SIAM, 2023. 650 p. ISBN 978-1-611977-17-0.

6. Higham N.J. Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. 2nd ed. SIAM, 2022. 710 p. ISBN 978-1-611976-90-6.

7. Strang G. Linear Algebra and Learning from Data. Wellesley-Cambridge Press, 2019. 432 p. ISBN 978-0-692-19638-0.

*Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:*

1. ЭБС РУДН и сторонние ЭБС, к которым студенты университета имеют доступ на основании заключенных договоров

- Электронно-библиотечная система РУДН – ЭБС РУДН

<https://mega.rudn.ru/MegaPro/Web>

- ЭБС «Университетская библиотека онлайн» <http://www.biblioclub.ru>

- ЭБС «Юрайт» <http://www.biblio-online.ru>

- ЭБС «Консультант студента» [www.studentlibrary.ru](http://www.studentlibrary.ru)

- ЭБС «Знаниум» <https://znanium.ru/>

2. Базы данных и поисковые системы

- Sage <https://journals.sagepub.com/>

- Springer Nature Link <https://link.springer.com/>

- Wiley Journal Database <https://onlinelibrary.wiley.com/>

- Научометрическая база данных Lens.org <https://www.lens.org>

*Учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся при освоении дисциплины/модуля\*:*

1. Курс лекций по дисциплине «Численная линейная алгебра».

\* - все учебно-методические материалы для самостоятельной работы обучающихся размещаются в соответствии с действующим порядком на странице дисциплины **в ТУИС!**